DM n°7
Pour le vendredi 5 décembre

1 Isolation thermique d'une maison

Une petite maison est modélisée par quatre murs de $S = 12\ \mathrm{m}^2$ chacun. Deux de ces murs sont pleins et les deux autres comporte chacun une fenêtre de surface $S_f = 3{,}0\ \mathrm{m}^2$. L'épaisseur d'un mur est $e_1 = 30$ cm et celle d'une fenêtre est $e_2 = 6{,}0$ mm.

On donne les conductivités thermiques du béton : $\lambda_1 = 2{,}0\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$ et du verre : $\lambda_2 = 1{,}0\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-1}}$.

1. Calculer la résistance thermique R_1 d'un mur plein. Application numérique.
2. Calculer la résistance thermique R_2 d'un mur avec fenêtre. Proposer un schéma "électrocinétique" équivalent. On notera T_i la température à l'intérieur de la maison et T_e la température à l'extérieur. Application numérique : calculer R_2.
3. Déterminer la résistance thermique totale R de l'ensemble des quatre murs et des vitres. Proposer un schéma électrocinétique équivalent et faire l'application numérique.
4. On tient maintenant compte des échanges thermiques par conducto-convectionavec l'air (à la fois intérieur à la maison et extérieur). On donne le coefficient de conducto-convection h de ces échanges (le même pour toutes les interfaces mur-air et fenêtre - air) : $h = 5{,}0\ \mathrm{W.m^{-1}.K^{-2}}$.
   a) Comment sont modifiées R_1 ? R_2 ?
   b) Comment est modifiée R ? Faire un schéma électrocinétique équivalent.
5. Pour maintenir la température intérieure de la maison égale à $T_i = 19$°C, on doit utiliser un radiateur qui doit fournir au local une puissance thermique $\mathscr{P}_{\mathrm{th}}$. Déterminer $\mathscr{P}_{\mathrm{th}}$ sachant que la température extérieure est $T_e = 5$ °C.

2 Le soleil a rendez-vous avec la pluie

Ce sujet traite des gouttes d'eau. Dans les parties I et II (mécanique du point), on s'intéresse d'abord à la vitesse limite de chute des gouttes de pluie et à la mesure de leurs diamètres puis, dans la partie III, à la répartition (distribution) de ces diamètres dans une averse.

Partie I - Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique $\rho = 1{,}0.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1{,}3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\vec{g} = g\,\overrightarrow{e_z}$ avec $g = 9{,}8\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

Q1. Définir " référentiel galiléen ".

Q2. On admet que la seule autre force que le poids mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{frott}}} = -\,C\pi\rho_a D^2\, v^2\, \overrightarrow{e_z} \text{ avec } C = 6{,}0.10^{-2}$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Q3. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\,\overrightarrow{e_z}$$

où K est un coefficient à exprimer en fonction de ρ, ρ_a, C et de g.

Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à 1 mm, 3 mm et 5 mm.

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la figure 1 en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en Q3 en traits pointillés.

Q4. Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux questions de Q1 à Q3 n'est-il pas validé pour toutes les tailles de gouttes ?

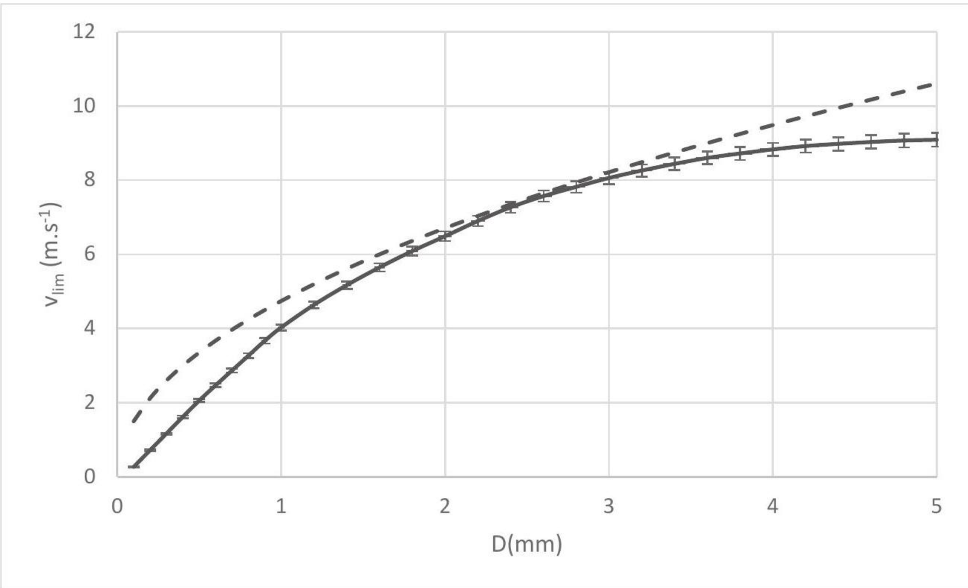

FIGURE 1 – Influence du diamètre sur la vitesse limite

Selon les précipitations, la taille des gouttes de pluie est très variable. La distribution des tailles de goutte, qui renseigne sur les événements météorologiques, doit souvent être mesurée. On utilise pour cela un disdromètre ("Distribution of Drops Meter").

Partie II - Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\,\overrightarrow{e_z} \text{ avec } K = 150 \text{ m}^{1/2}.\text{s}^{-1}$$

Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le disdromètre à impact (figure 2). Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

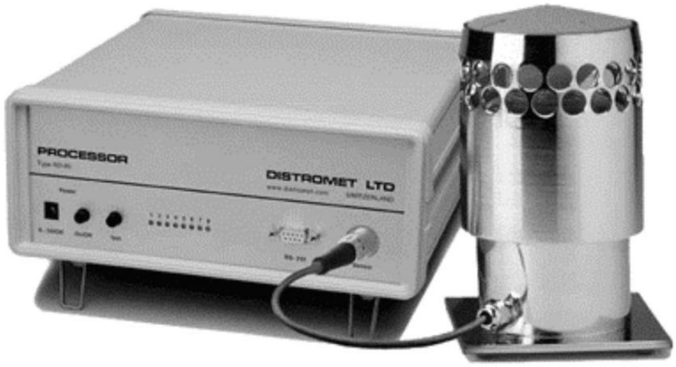

FIGURE 2 – Disdromètre Joss-Waltvogel

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M, relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti. Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, ℓ_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc $\vec{f} = -\lambda\,\vec{v}_{\text{platine}}$.

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\overrightarrow{F(t)} = F(t)\,\overrightarrow{e_z}$ verticale sur celle-ci.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (figure 3).

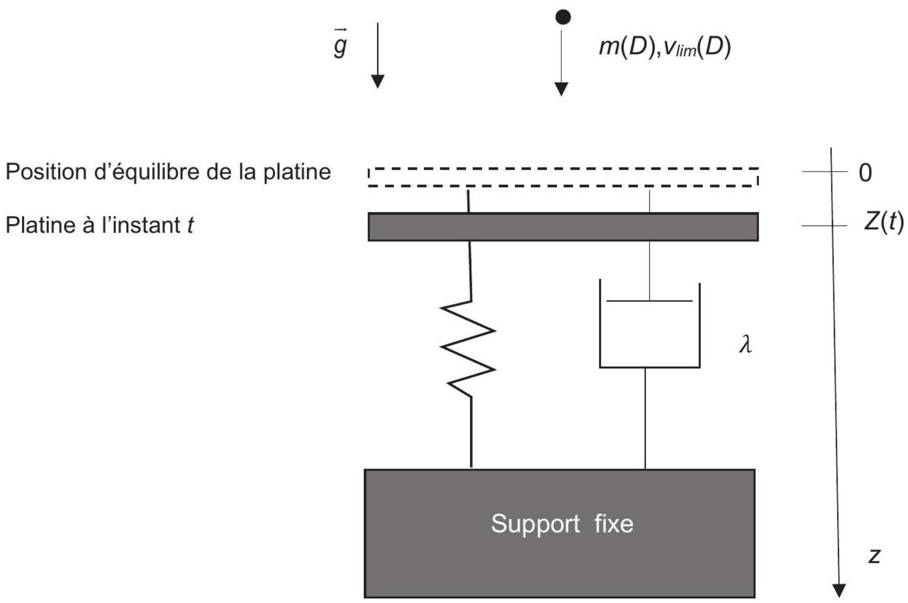

FIGURE 3 – Modélisation du disdromètre à impact à platine

Q5. Exprimer la longueur $\ell_{\text{équ}}$ du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

Q6. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} + \beta\, Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β en fonction de k, M et de λ.

La force $F(t)$ est modélisée par :

- $F = F_0 = m(D)\,\dfrac{v_{\text{lim}}\,(D)}{\tau(D)}$ pour $0 < t < \tau$;
- $F = 0$ pour $t > \tau$.

Q7. Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0{,}65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi\, \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

Calculer τ pour $D = 2{,}5$ mm.

Q8. On se place à $0 \leqslant t \leqslant \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

a) Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ? Dans la suite on se place dans ce cas.

b) Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leqslant t \leqslant \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(1 + \gamma \frac{t}{2}\right) e^{-\gamma t/2}\right]$$

c) Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^α et donner la valeur de α.

d) Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant 2\tau$.

e) Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?

Partie III - Dimensionnement et étalonnage du disdromètre à impact

On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D, tombent à la vitesse $v_{\text{lim}}\,(D)$ et sont réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N.

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation : $\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\;\overrightarrow{e_z}$ avec $K = 150\ \mathrm{m}^{1/2}\cdot\ \mathrm{s}^{-1}$ et que la durée de l'impact est :

$$\tau(D) = \xi\, \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)} \text{ avec } \xi = 0{,}65$$

Q9. Exprimer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant la durée $\tau(D)$ d'un impact, en fonction de N, S, D et de ξ. En déduire l'expression de la surface maximale S_{max} du capteur du disdromètre permettant d'éviter des chevauchements du signal dus à deux impacts successifs.

Dans une averse, on trouve en fait plusieurs tailles de gouttes. La distribution des tailles de gouttes est caractérisée par la valeur $n(D)$, telle que le nombre de gouttes de pluie par unité de volume, de diamètre compris entre D et $D + \mathrm{d}D$, s'écrit : $\mathrm{d}N = n(D)\,\mathrm{d}D$.

Une distribution empirique très utilisée est celle de Marshall et Palmer :

$$n(D) = n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right)$$

avec $n_0 = 8{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{m}^{-3} \cdot\ \mathrm{mm}^{-1}$ (unité usuelle).

Q10. On considère une averse contenant toutes les tailles de gouttes, répondant à la distribution de Marshall et Palmer. Montrer que D_0 représente le diamètre moyen des gouttes.
On donne :

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x = 1$$

Q11. Exprimer pour la distribution de Marshall et Palmer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant une durée τ.

En déduire la nouvelle expression de S_{max} (en pratique, le constructeur applique une marge). En prenant la valeur $\xi = 6{,}5$ calculer S_{max} numériquement pour $D_0 = 1{,}5$ mm.

On peut étalonner le disdromètre à l'aide d'un pluviomètre : c'est un simple récipient cylindrique gradué recueillant l'eau de pluie (figure 4). Il ne permet pas de mesurer $n(D)$, mais seulement l'intensité R de l'averse.

Cette intensité R est définie comme la hauteur d'eau tombant au sol par unité de temps. Elle est donnée en pratique en $\mathrm{mm} \cdot \mathrm{h}^{-1}$. Il suffit donc de graduer le pluviomètre pour lire la hauteur d'eau après une durée définie et calculer l'intensité R.

FIGURE 4 – Pluviomètre

Q12. On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D_0, tombant à la vitesse $v_{\text{lim}}(D_0)$ et réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N.

Exprimer l'intensité R de cette averse en fonction de N, D_0 et de $v_{\text{lim}}(D_0)$.

Q13. Justifier que R s'exprime de manière générale par :

$$R = \int_0^\infty n(D)\, v_{\text{lim}}(D)\, \pi \frac{D^3}{6}\, \mathrm{d}D$$

et calculer R. On donne $\displaystyle\int_0^\infty x^{3,5}\, e^{-x} \mathrm{d}x = \frac{105\sqrt{\pi}}{16} \approx 11,6.$

Faire l'application numérique en $\mathrm{mm} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ pour $D_0 = 1{,}5$ mm.

En général, le disdromètre sépare les gouttes en "classes" : à chaque classe correspond un diamètre D moyen et une "largeur" δD en diamètre. Cela signifie qu'appartiennent à la même classe toutes les gouttes dont le diamètre est compris dans l'intervalle $\left[D - \frac{\delta D}{2}, D + \frac{\delta D}{2}\right]$.

On donne (figure 4) l'histogramme obtenu après une mesure sur une durée de 24 heures avec un disdromètre de surface $S = 80$ cm^2. Cet histogramme donne le nombre de gouttes mesuré pour chaque classe, de largeur en diamètre variable :

- $\delta D = 0{,}1$ mm pour 0 mm $< D \leqslant 1$ mm,
- $\delta D = 0{,}2$ mm pour 1 mm $< D \leqslant 2$ mm,
- $\delta D = 0{,}4$ mm pour $D > 2$ mm.

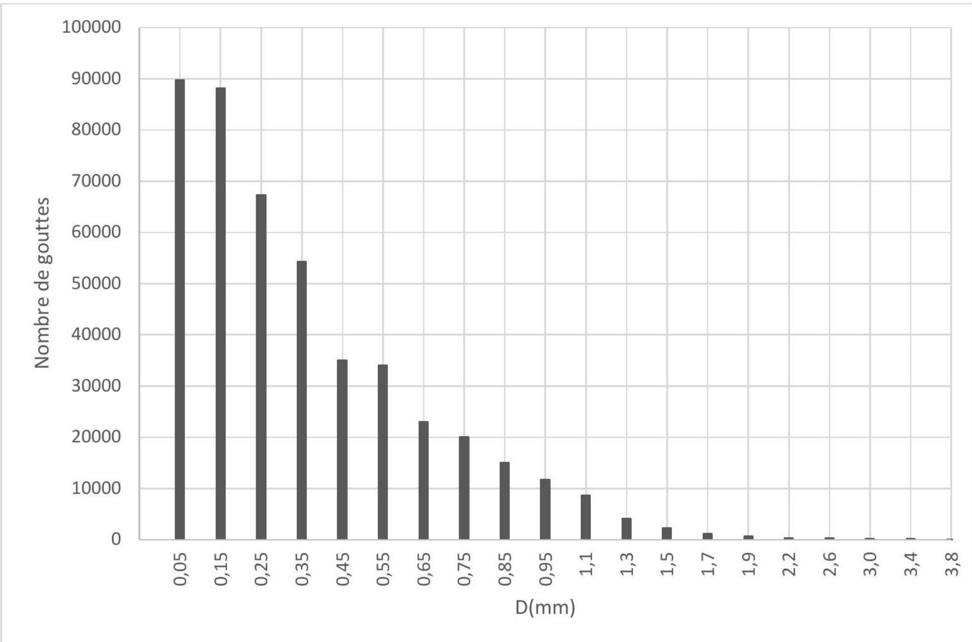

Figure 5 – Résultats d'une mesure sur une durée de 24 heures

Q14. Expliquer comment il est possible de calculer R à l'aide de ces données (le calcul n'est pas demandé).