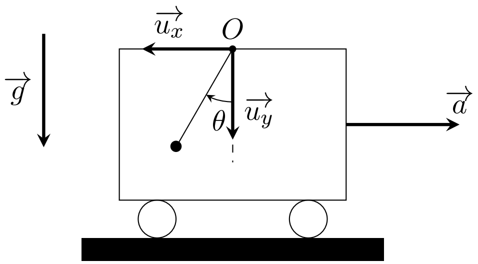
Dans toute cette feuille d'exercices, le référentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$) sera considéré comme étant galiléen. Il sera donc pris comme référentiel absolu. Un repère fixe par rapport à ce référentiel terrestre, adapté à chaque exercice, sera considéré comme le repère absolu R_a.

1 Oscillations d'un pendule dans un train

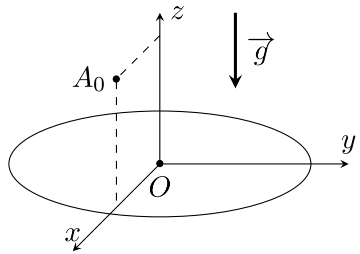
Un passager dans un wagon en translation horizontale d'accélération constante $\overrightarrow{a} = -a\,\overrightarrow{u_x}, a > 0$, étudie les petites oscillations planes d'un pendule simple formé par une masse m et un fil de longueur L accroché au plafond du wagon.



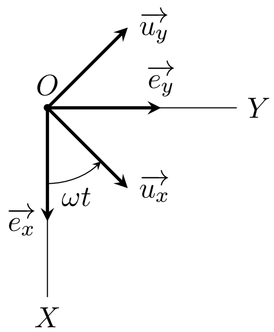
1. Déterminer l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ. (Il y a 3 méthodes possibles)
2. Déterminer la position d'équilibre θ_0 du pendule.
3. Expliciter la période T_0 des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

2 Chute d'une bille dans un manège

Un manège est constitué d'une plate forme circulaire tournant à la vitesse angulaire ω constante autour de Oz fixe dans le référentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$) supposé galiléen. Le référentiel du manège, noté ($\mathscr{R}_m$), est muni du repère $\mathrm{R}_m = (Ox; Oy; Oz)$ de base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$. Une bille de masse m est abandonnée sans vitesse initiale dans ($\mathscr{R}_m$) à partir du point A_0 de coordonnées $r_0, 0, h$ dans R_m.



1. a) Déterminer les équations différentielles vérifiées par les coordonnées (x, y, z) de la bille dans le référentiel du manège.
   b) Résoudre ces équations en posant $\underline{u} = x + iy$ (avec $i^2 = -1$) et en déduire $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ en fonction du temps.
2. On reprend toute l'étude en raisonnant dans le référentiel terrestre ($\mathscr{R}_T$), muni du repère $\mathrm{R}_T = (OX; OY; OZ)$ (repère absolu) muni de la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{u_z})$ (base canonique) indiqué ci-dessous. Les deux repères coïncident à $t = 0$.



a) Déterminer la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ de la bille dans $(\mathscr{R}_T)$.

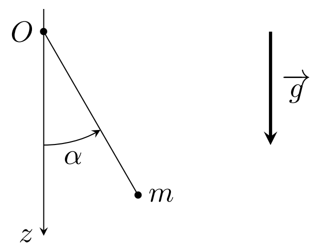
b) On note X, Y et Z les coordonnées cartésiennes de la bille dans le repère R_T attaché au référentiel terrestre.

Déterminer les équations différentielles verifiées par ces coordonnées et en déduire $X(t)$, $Y(t)$ et $Z(t)$ en fonction du temps.

c) En exprimant le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ puis dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$, déterminer la relation entre X ,Y, Z et x, y, z. Comparer alors les résultats du 1. et du 2.

3 Angle d'inclinaison d'un pendule simple

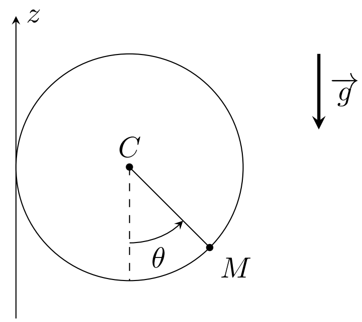
On considère un pendule simple de longueur L, au bout duquel est accrochée une masse m. L'autre extrémité du fil est accroché à un point O d'un axe vertical Oz. On communique à la masse m un mouvement circulaire autour de Oz, à la vitesse angulaire ω, de sorte que le fil finisse par former un angle α constant avec Oz. Déterminer



α en fonction de g, L et ω. En déduire la norme T de la tension exercée par le fil sur m. Faire le raisonnement dans le référentiel terreste $(\mathscr{R}_T)$, puis dans un référentiel tournant dans lequel la masse m est immobile.

4 Mouvement sur un cercle

On considère un point M de masse m astreint à se déplacer sans frottement sur un cercle de centre c et de rayon R. Ce cercle est dans un plan vertical et tourne à vitesse angulaire constante ω autour d'un axe Oz, fixe dans le référentiel terrestre (supposé galiléen) selon le schéma ci-dessous. On repère le point M par l'angle θ par rapport à la verticale. On se place dans le référentiel du cercle.



1. Établir l'équation vérifiée par θ en appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel du cercle.
2. Retrouver le résultat grâce à une méthode énergétique.