

Questions de cours sur les forces centrales

Les questions de cours suivantes doivent être bien connues avant d'aborder les concours. Dans tout ce qui suit on étudie le mouvement d'un point matériel M de masse m dans un référentiel galiléen (\mathcal{R}_g). On suppose que M est soumis à une unique force \vec{F} , supposé centrale.

- 1) Définir une force centrale. Définir une force centrale conservative.

Dans la suite on note O le centre de force et on suppose que O est immobile dans (\mathcal{R}_g), que l'on munit du repère d'espace ($Oxyz$).

- 2) On considère une force centrale newtonienne $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$ avec k constante. En donner des exemples. Montrer soigneusement que \vec{F} est conservative et calculer son énergie potentielle $E_p(r)$ en supposant qu'elle s'annule à l'infini.

On revient provisoirement à une force centrale quelconque, pas forcément conservative.

- 3) Montrer que le mouvement de M est plan. Caractériser le plan du mouvement.

Dans toute la suite on suppose que le plan du mouvement est (Oxy) et on repère le point M par ses coordonnées polaires (r, θ) .

- 4) Montrer que la grandeur $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement. Comment appelle-t-on C et que représente-t-elle ?

- 5) On considère une force centrale newtonienne $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$.

- a) Montrer que l'énergie mécanique de M s'écrit sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

et donner l'expression de $U_{\text{eff}}(r)$ en faisant intervenir k et C . Comment s'appelle $U_{\text{eff}}(r)$?

- b) Étudier $U_{\text{eff}}(r)$ et tracer son graphe dans le cas d'une force newtonienne attractive. Qu'appelle-t-on état lié ? Quelles sont les types possibles de trajectoires selon le signe de E_m ?

À partir de $U_{\text{eff}}(r)$ et dans le cas d'une trajectoire elliptique, déterminer les distances r_{\min} au péricentre (point le plus proche de O) et r_{\max} à l'apocentre (point le plus éloigné de O) en fonction de E_m , k et C (entre autres). En déduire que :

$$E_m = -\frac{k}{2a} \quad \text{avec} \quad a = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$$

Que représente a ?

- c) Étudier $U_{\text{eff}}(r)$ et tracer son graphe dans le cas d'une force centrale newtonienne répulsive. Quel est le signe de E_m dans ce cas ? Quelle est la nature de la trajectoire ?

- 6) On revient à une force centrale newtonienne attractive (type gravitation) et on étudie une trajectoire circulaire de rayon R . Faire l'exercice 6 du TD de révisions de mécanique de MPSI (vitesse circulaire, lois de Kepler, en particulier troisième loi de Kepler, expressions de E_c , E_p et E_m pour la trajectoire circulaire).