

Corrigé du DM n°7

1 Isolation thermique d'une maison : Planche Oral CCINP

Une petite maison est modélisée par quatre murs de $S = 12 \text{ m}^2$ chacun. Deux de ces murs sont pleins et les deux autres comporte chacun une fenêtre de surface $S_f = 3,0 \text{ m}^2$. L'épaisseur d'un mur est $e_1 = 30 \text{ cm}$ et celle d'une fenêtre est $e_2 = 6,0 \text{ mm}$.

On donne les conductivités thermiques du béton : $\lambda_1 = 2,0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ et du verre : $\lambda_2 = 1,0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

1. Calculer la résistance thermique R_1 d'un mur plein. Application numérique.

On peut utiliser directement un résultat de cours :

$$R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 S} \stackrel{\text{AN}}{=} 1,3 \times 10^{-2} \text{ K.W}^{-1}$$

(Résultat avec deux chiffres significatifs suivant précision des données de l'énoncé).

2. Calculer la résistance thermique R_2 d'un mur avec fenêtre. Proposer un schéma "électrocinétique" équivalent. On notera T_i la température à l'intérieur de la maison et T_e la température à l'extérieur. Application numérique : calculer R_2 .

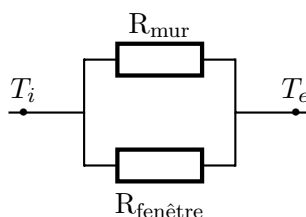
Un mur avec fenêtre est constitué d'une association en parallèle de deux résistances thermiques puisque les températures aux deux extrémités sont identiques. Ce sont donc les conductances thermiques qui s'ajoutent :

$$G_2 = G_{\text{mur}} + G_{\text{fenêtre}} = \frac{\lambda_1 (S - S_f)}{e_1} + \frac{\lambda_2 S_f}{e_2} = 560 \text{ W.K}^{-1}$$

d'où :

$$R_2 = \frac{1}{G_2} = 1,8 \times 10^{-3} \text{ K.W}^{-1}$$

Schéma électrocinétique équivalent :

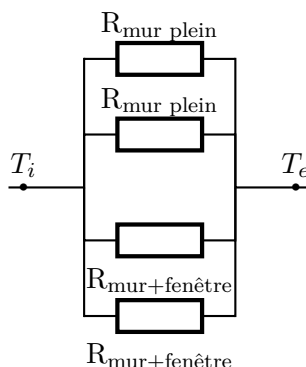


3. Déterminer la résistance thermique totale R de l'ensemble des quatre murs et des vitres. Proposer un schéma électrocinétique équivalent et faire l'application numérique.

Toutes les résistances thermiques sont en parallèle puisque les températures aux extrémités sont identiques. On a donc, en notant G les conductances thermiques :

$$G = 2 G_1 + 2 G_2 = \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} \iff R = \frac{R_1 R_2}{2 (R_1 + R_2)} = 7,8 \times 10^{-4} \text{ K.W}^{-1}$$

Schéma électrocinétique équivalent :

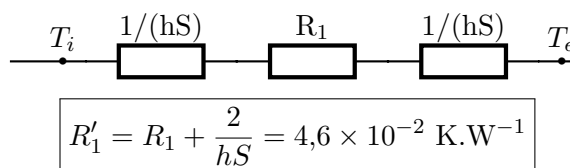


4. On tient maintenant compte des échanges thermiques par conducto-convection avec l'air (à la fois intérieur à la maison et extérieur). On donne le coefficient de conducto-convection h de ces échanges (le même pour toutes les interfaces mur-air et fenêtre - air) : $h = 5,0 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-2}$.

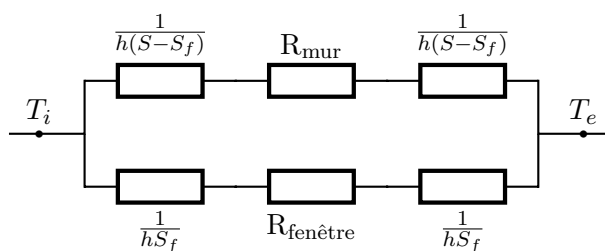
a) Comment sont modifiées R_1 ? R_2 ?

Il faut tenir compte des deux résistances thermiques de conducto-convection qui sont en série : une pour l'interface avec l'air intérieur et l'autre pour l'interface avec l'air extérieur. On a donc le schéma électrocinétique équivalent :

Pour R_1 :



Pour R_2 :



avec $R_{\text{mur}} = \frac{e_1}{\lambda_1(S - S_f)}$ et $R_{\text{fenêtre}} = \frac{e_2}{\lambda_2 S_f}$. En utilisant les conductances :

$$G'_2 = \frac{S - S_f}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{2}{h}} + \frac{S_f}{\frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{2}{hS_f}} \approx 2,4 \times 10^1 \text{ W.K}^{-1} \iff R'_2 = \frac{1}{G'_2} = 4,2 \times 10^{-2} \text{ K.W}^{-1}$$

b) Comment est modifiée R ? Faire un schéma électrocinétique équivalent.

C'est le même schéma électrocinétique qu'à la question 3. : il faut seulement remplacer R_1 et R_2 par R'_1 et R'_2 . On a donc :

$$R' = \frac{R'_1 R'_2}{2(R'_1 + R'_2)} = 1,1 \times 10^{-2} \text{ K.W}^{-1}$$

5. Pour maintenir la température intérieure de la maison égale à $T_i = 19^\circ\text{C}$, on doit utiliser un radiateur qui doit fournir au local une puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{th}}$. Déterminer $\mathcal{P}_{\text{th}}$ sachant que la température extérieure est $T_e = 5^\circ\text{C}$.

On applique le premier principe au contenu de la maison entre t et $t + dt$. Comme le régime est permanent, il n'y a pas de variation d'énergie interne et si on suppose le volume constant : $\delta W = 0$. En notant Φ le flux thermique > 0 qui traverse les 4 murs, on obtient :

$$0 = \mathcal{P}_{\text{th}} dt - \Phi dt = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{P}_{\text{th}} = \frac{T_i - T_e}{R'} \approx 1300 \text{ W}}$$

La maison est donc une passoire thermique ! Normal s'il n'y a que du béton sans isolant thermique et des vitres.

2 Le soleil a rendez-vous avec la pluie : CCINP 2023

Partie I - Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre D et de masse volumique $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe Oz est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\vec{g} = g \vec{e}_z$ avec $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

Q1. Définir " référentiel galiléen ".

C'est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié, c'est à dire que le mouvement de tout point matériel isolé ou pseudo-isolé est rectiligne et uniforme. On peut aussi le formuler en disant que le mouvement du centre d'inertie G de tout système matériel isolé ou pseudo-isolé est rectiligne uniforme.

Q2. On admet que la seule autre force que le poids mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse v de la goutte. Elle s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{frott}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z \quad \text{avec } C = 6,0 \cdot 10^{-2}$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

Le facteur C étant sans dimension (tout comme π), il vient :

$$[F_{\text{frott}}] = [\rho_a] [D^2] [v^2] = M.L^{-3}.L^2.L^2.T^{-2} = M.L.T^{-2}$$

où M est une masse, L une longueur et T un temps. F_{frott} est donc homogène au produit d'une masse par une accélération : c'est bien une force.

Q3. En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D} \vec{e}_z$$

où K est un coefficient à exprimer en fonction de ρ , ρ_a , C et de g .

Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à 1 mm, 3 mm et 5 mm.

Les gouttes d'eau sont sphériques de volume $V = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} D^3$.

Bilan des forces exercées sur la goutte :

- Poids : $\vec{P} = \rho \frac{\pi}{6} D^3 g, \vec{e}_z$
- Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -\rho_a \frac{\pi}{6} D^3 g, \vec{e}_z$ (opposée au poids du volume d'air déplacé).
- $\vec{F}_{\text{frott}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e}_z$

Le mouvement de la goutte étant vertical descendant, son vecteur vitesse est $\vec{v} = v(t) \vec{e}_z$. On a donc, en projection sur $\vec{e}_z$:

$$\rho \frac{\pi}{6} D^3 \frac{dv}{dt} = (\rho - \rho_a) \frac{\pi}{6} D^3 g - C\pi\rho_a D^2 v^2$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte $v = v_{\text{lim}} = \text{Cste}$ ce qui donne :

$$(\rho - \rho_a) \frac{\pi}{6} D^3 g - C\pi\rho_a D^2 v_{\text{lim}}^2 = 0 \iff v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{(\rho - \rho_a)g}{6C\rho_a}} \sqrt{D}$$

et donc :

$$K = \sqrt{\frac{(\rho - \rho_a)g}{6C\rho_a}}$$

A.N. :

$$D = 1 \text{ mm} : v_{\text{lim}} \approx 5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$D = 3 \text{ mm} : v_{\text{lim}} \approx 8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$D = 5 \text{ mm} : v_{\text{lim}} \approx 10 \text{ m.s}^{-1}$$

Gunn et Kinzer ont mesuré en 1949 avec précision des vitesses limites de gouttes de différents diamètres. Les résultats de leurs mesures avec les barres d'incertitudes sont reportés sur la figure 1 en trait plein ainsi que la représentation de la relation obtenue en Q3 en traits pointillés.

Q4. Pour quelle(s) raison(s) le modèle théorique élaboré aux questions de Q1 à Q3 n'est-il pas validé pour toutes les tailles de gouttes ?

C'est probablement dû à la mauvaise modélisation de la force de frottement. Celle-ci ne convient pas pour les vitesses trop petites.

D'autre part les gouttes de grande taille se déforment sous l'effet de la force de traînée, ainsi le coefficient géométrique C entre la surface frontale et le volume de la goutte n'est pas celui donné par l'énoncé.

Remarque :

Cette question nécessite d'avoir des connaissances sur les forces de frottement fluides, ce qui n'est pas au programme de MP !

Partie II - Disdromètre à impact avec platine

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D} \vec{e}_z \text{ avec } K = 150 \text{ m}^{1/2}.\text{s}^{-1}$$

On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon R et de masse M , relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti. Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

On note k la raideur du ressort liant la platine au support, ℓ_0 sa longueur à vide et λ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc $\vec{f} = -\lambda \vec{v}_{\text{platine}}$.

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\overrightarrow{F(t)} = F(t) \vec{e}_z$ verticale sur celle-ci.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (figure 3).

Q5. Exprimer la longueur $\ell_{\text{éq}}$ du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

On applique le TCI (théorème du centre d'inertie) à la platine, à l'équilibre. La force de frottement est alors égale à zéro et on obtient :

$$k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \vec{e}_z + Mg \vec{e}_z = \vec{0}$$

d'où :

$$\ell_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{Mg}{k} < \ell_0$$

ce qui est cohérent puisque, à l'équilibre, le poids de la platine comprime le ressort.

Q6. Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + \gamma \frac{dZ(t)}{dt} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients γ et β en fonction de k , M et de λ .

On remarquera que la platine est un solide en **translation (rectiligne)** : tous les points de la platine ont donc le même vecteur vitesse $\vec{v}$ à chaque instant et il en est de même pour le centre de masse G .

En dehors de l'équilibre, la longueur du ressort est $\ell = \ell_{\text{éq}} - Z$ (cf. schéma). D'autre part, l'origine de l'axe Oz étant fixé sur la position d'équilibre de la platine, la vitesse de tous les points de la platine est $\vec{v} = \dot{Z} \vec{e}_z$. Le TCI conduit donc à :

$$M \frac{d^2 Z}{dt^2} \vec{e}_z = k(\ell_{\text{éq}} - Z - \ell_0) \vec{e}_z - \lambda \frac{dZ}{dt} \vec{e}_z + Mg \vec{e}_z + F(t) \vec{e}_z$$

En projetant sur $\vec{e}_z$ et en utilisant l'expression de $\ell_{\text{éq}}$ on obtient :

$$M \frac{d^2 Z}{dt^2} = -kZ - \lambda \frac{dZ}{dt} + F(t)$$

d'où :

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \frac{\lambda}{M} \frac{dZ}{dt} + \frac{k}{M} Z = \frac{F(t)}{M}$$

donc :

$$\gamma = \frac{\lambda}{M} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{k}{M}$$

La force $F(t)$ est modélisée par :

- $F = F_0 = m(D) \frac{v_{\text{lim}}(D)}{\tau(D)}$ pour $0 < t < \tau$;
- $F = 0$ pour $t > \tau$.

Q7. Donner la signification physique de τ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0,65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}$$

Calculer τ pour $D = 2,5 \text{ mm}$.

C'est probablement l'ordre de grandeur de la durée de l'impact de la goutte sur la platine. Sachant que la vitesse de la goutte est v_{lim} et que son diamètre est D , la durée pour que la goutte s'écrase entièrement sur la platine est de l'ordre de D/v_{lim} .

A.N. $\tau = 2,2 \times 10^{-4} \text{ s} = 0,22 \text{ ms}$

Q8. On se place à $0 \leq t \leq \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

a) Quelle doit être la relation entre les coefficients β et γ ? Dans la suite on se place dans ce cas.

Pour $0 \leq t \leq \tau(D)$, Z est la réponse d'un oscillateur harmonique amorti à une excitation constante F_0/M . On sait que la réponse la plus rapide a lieu pour le **régime critique** (voir cours de MPSI).

L'équation caractéristique est $r^2 + \gamma r + \beta = 0$ dont le discriminant est $\delta = \gamma^2 - 4\beta$. Le régime critique correspond à $\Delta = 0$, c'est à dire :

$$\gamma^2 = 4\beta$$

b) Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$:

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} \left[1 - \left(1 + \gamma \frac{t}{2} \right) e^{-\gamma t/2} \right]$$

En régime critique, l'équation caractéristique admet une racine double $r_0 = -\frac{\gamma}{2}$. La solution générale de l'équation homogène est de la forme :

$$Z_h(t) = (At + B) e^{-\gamma t/2}$$

et la solution particulière est $Z_p = \frac{F_0}{k}$. On a donc :

$$Z(t) = (At + B) e^{-\gamma t/2} + \frac{F_0}{k} \quad \text{avec} \quad Z(0) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{Z}(0) = 0$$

Or $\dot{Z}(t) = A e^{-\gamma t/2} - \frac{\gamma}{2} (At + B) e^{-\gamma t/2}$, ce qui conduit à :

$$B + \frac{F_0}{k} = 0 \quad \text{et} \quad A - \frac{\gamma}{2} B = 0$$

On a donc :

$$B = -\frac{F_0}{k} \quad \text{et} \quad A = -\frac{F_0}{k} \frac{\gamma}{2}$$

d'où le résultat demandé par l'énoncé.

- c) Comment choisir γ pour réaliser $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à D^α et donner la valeur de α .

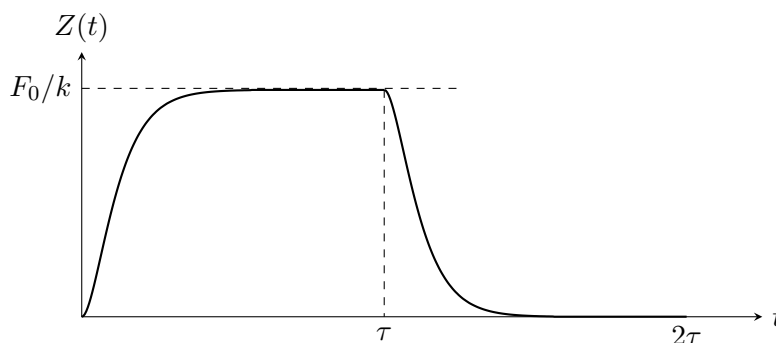
Il faut pouvoir négliger l'exponentielle lorsque $t = \tau$. On doit donc avoir $\gamma\tau/2 \gg 1$ et donc $\gamma \gg 2/\tau$. Dans ce cas on aura :

$$Z(\tau) \approx \frac{F_0}{k} = \frac{m(D)v_{\text{lim}}(D)}{k\tau(D)} = \frac{m(D)v_{\text{lim}}^2}{\xi k D} = \frac{m(D)K^2}{\xi k} = \frac{\pi K^2}{6\xi k} D^3$$

d'où :

$$\boxed{\alpha = 3}$$

- d) Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.



- e) Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître D ?

Le coefficient de proportionnalité entre $Z(\tau)$ et D^3 est $\frac{\pi K^2}{6\xi k}$ ne dépend pas de la goutte. La connaissance de ces différents coefficients ou un étalonnage permet de relier $Z(\tau)$ à D .

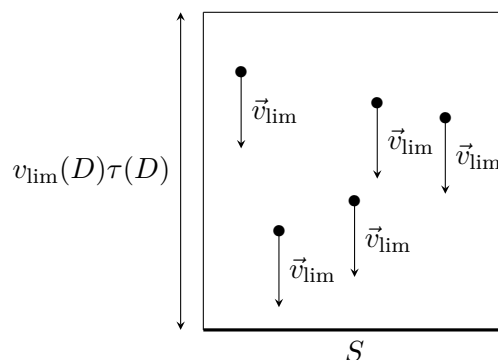
Partie III - Dimensionnement et étalonnage du disdromètre à impact

On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D , tombent à la vitesse $v_{\text{lim}}(D)$ et sont réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N .

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre D qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation : $\vec{v}_{\text{lim}} = K\sqrt{D} \vec{e}_z$ avec $K = 150 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$ et que la durée de l'impact est :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)} \text{ avec } \xi = 0,65$$

- Q9.** Exprimer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant la durée $\tau(D)$ d'un impact, en fonction de N, S, D et de ξ . En déduire l'expression de la surface maximale S_{max} du capteur du disdromètre permettant d'éviter des chevauchements du signal dus à deux impacts successifs.



Raisonnement courant en physique. Les gouttes qui tombent sur la surface S entre les instants t_0 et $t_0 + \tau(D)$ sont situées dans le cylindre de surface S et de longueur de génératrices $v_{\text{lim}}(D)\tau(D)$. Il y en a donc :

$$G = N \times S v_{\text{lim}}(D)\tau(D) = N S \xi D$$

Afin d'éviter les chevauchements du signal il faut que $G \leq 1$. Il serait même préférable que $G \leq 1/2$ afin qu'une seule goutte tombe en moyenne tous les $2\tau(D)$ secondes, ce qui laisse le temps à la platine de revenir à sa position d'équilibre initiale (en supposant en outre que la masse M de la platine ne change pas beaucoup suite aux gouttes d'eau qui s'y accumulent). En adoptant la seconde inégalité on obtient :

$$S \leq \frac{1}{2N\xi D} = S_{\text{max}}$$

Dans une averse, on trouve en fait plusieurs tailles de gouttes. La distribution des tailles de gouttes est caractérisée par la valeur $n(D)$, telle que le nombre de gouttes de pluie par unité de volume, de diamètre compris entre D et $D + dD$, s'écrit : $dN = n(D) dD$.

Une distribution empirique très utilisée est celle de Marshall et Palmer :

$$n(D) = n_0 \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right)$$

$$\text{avec } n_0 = 8,0 \cdot 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{mm}^{-1} \text{ (unité usuelle).}$$

Q10. On considère une averse contenant toutes les tailles de gouttes, répondant à la distribution de Marshall et Palmer. Montrer que D_0 représente le diamètre moyen des gouttes.

On donne :

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1$$

Par diamètre moyen on doit comprendre moyenne arithmétique des diamètres de toutes les gouttes. Dans un volume V d'air, il y a $dN \times V = n(D)V dD$ gouttes dont le diamètre est compris entre D et $D + dD$, ce qui donne une contribution $D \times dN V$ à la somme des diamètres. On somme ensuite sur toutes les gouttes contenue dans ce volume V donné :

$$\text{Sommes des diamètres} = V \int D dN = V \int_0^{+\infty} D n(D) dD = n_0 V \int_0^{+\infty} D \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD$$

On fait le changement de variable $x = D/D_0$, ce qui conduit à :

$$\text{Sommes des diamètres} = n_0 V D_0^2 \int_0^{+\infty} x \exp(-x) dx = n_0 V D_0^2$$

On divise ensuite par le nombre total de gouttes contenues dans le volume V :

$$N = V \int dN = V \int_0^{+\infty} n(D) dD = n_0 V \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD = n_0 V D_0$$

Il en résulte que :

$$\langle D \rangle = \frac{\text{Sommes des diamètres}}{N} = D_0$$

Q11. Exprimer pour la distribution de Marshall et Palmer le nombre de gouttes G tombant sur la surface S du disdromètre pendant une durée τ .

En déduire la nouvelle expression de S_{max} (en pratique, le constructeur applique une marge). En prenant la valeur $\xi = 6,5$ calculer S_{max} numériquement pour $D_0 = 1,5$ mm.

On refait le même raisonnement qu'à la question Q9 mais en commençant maintenant par compter le nombre de gouttes dont le diamètre est compris entre D et $D + dD$, dont la vitesse limite est $v_{lim}(D)$.

Elles sont situées dans le cylindre de surface S et de longueur de génératrices $v_{lim}(D)\tau$ et il y en a donc :

$$\delta G = dN \times S v_{lim}(D) \tau = n_0 S K \tau \sqrt{D} \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD$$

Cependant, contrairement à la question Q9 il n'y a pas de relation entre $v_{lim}(D)$ et τ (qui est le même pour toutes les gouttes, quel que soit leur diamètre). On ne peut donc pas remplacer $v_{lim}(D)\tau$ par $K\sqrt{D}$!

Le nombre total de gouttes s'obtient en sommant sur les diamètres :

$$G = n_0 S K \tau \int_0^{+\infty} \sqrt{D} \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD$$

Il y a donc un problème avec cette question car on ne connaît pas τ et, d'autre part, on ne voit pas comment calculer l'intégrale.

On peut étalonner le disdromètre à l'aide d'un pluviomètre : c'est un simple récipient cylindrique gradué recueillant l'eau de pluie (figure 4). Il ne permet pas de mesurer $n(D)$, mais seulement l'intensité R de l'averse.

Cette intensité R est définie comme la hauteur d'eau tombant au sol par unité de temps. Elle est donnée en pratique en $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$. Il suffit donc de graduer le pluviomètre pour lire la hauteur d'eau après une durée définie et calculer l'intensité R .

Q12. On considère tout d'abord une averse dont toutes les gouttes ont le même diamètre D_0 , tombant à la vitesse $v_{lim}(D_0)$ et réparties en volume de manière homogène avec une densité volumique N .

Exprimer l'intensité R de cette averse en fonction de N , D_0 et de $v_{lim}(D_0)$.

Pour une durée donnée τ , le nombre de gouttes d'eau qui tombent dans le pluviomètre de surface S est donné par :

$$G = N \times S v_{lim}(D_0) \tau$$

Chaque goutte d'eau ayant un volume $\frac{\pi}{6} D_0^3$, le volume d'eau qui tombe dans le pluviomètre durant τ secondes est donc :

$$V = G \times \frac{\pi}{6} D_0^3 = N \times S v_{lim}(D_0) \tau \times \frac{\pi}{6} D_0^3$$

La hauteur d'eau par unité de temps est donc :

$$R = \frac{V}{S\tau} = N \times v_{\text{lim}}(D_0) \times \frac{\pi}{6} D_0^3$$

Q13. Justifier que R s'exprime de manière générale par :

$$R = \int_0^\infty n(D) v_{\text{lim}}(D) \pi \frac{D^3}{6} dD$$

et calculer R . On donne $\int_0^\infty x^{3,5} e^{-x} dx = \frac{105\sqrt{\pi}}{16} \approx 11,6$.

Faire l'application numérique en $\text{mm} \cdot \text{h}^{-1}$ pour $D_0 = 1,5 \text{ mm}$.

Le volume d'eau apporté par les gouttes dont le diamètre est compris entre D et $D+dD$ est :

$$\delta V = dN \times S v_{\text{lim}}(D) \tau \times \frac{\pi}{6} D^3 = n(D) dD \times S v_{\text{lim}}(D) \tau \times \frac{\pi}{6} D^3$$

Le volume total d'eau accumulé dans le pluviomètre durant la durée τ s'obtient donc en sommant :

$$V = S\tau \int_0^{+\infty} n(D) v_{\text{lim}}(D) \frac{\pi}{6} D^3 dD$$

ce qui conduit à :

$$R = \frac{V}{S\tau} = \int_0^{+\infty} n(D) v_{\text{lim}}(D) \frac{\pi}{6} D^3 dD$$

en accord avec la formule proposée par l'énoncé.

En remplaçant $v_{\text{lim}}(D)$ par $K\sqrt{D}$ et $n(D)$ par son expression, on aboutit à l'expression :

$$R = \frac{n_0 \pi K}{6} \int_0^{+\infty} D^{3,5} \exp\left(-\frac{D}{D_0}\right) dD$$

et le changement de variable $x = D/D_0$ conduit à :

$$R = \frac{n_0 \pi K}{6} D_0^{4,5} \int_0^{+\infty} x^{3,5} e^{-x} dx = \frac{n_0 \pi K}{6} D_0^{4,5} \times \frac{105\sqrt{\pi}}{16}$$

A.N. : $D_0 = 1,5 \times 10^{-3} \text{ m}$, $n_0 = 8 \times 10^6 \text{ m}^{-4}$ et $K = 150 \text{ m}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$R = 1,4 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1} = 5,2 \times 10^3 \text{ mm} \cdot \text{h}^{-1}$$

ce qui est gigantesque!!

Q14. Expliquer comment il est possible de calculer R à l'aide de ces données (le calcul n'est pas demandé).

Pour chaque classe de gouttes on connaît le diamètre moyen donc le volume moyen des gouttes de cette classe. On multiplie ce volume moyen par le nombre de gouttes de la classe puis on recommence avec toutes les classes de gouttes. En additionnant les résultats on obtient le volume total moyen tombé sur la surface $S = 80 \text{ cm}^2$ durant 24h.

On convertit ensuite le volume obtenu en mm^3 et on le divise par $S = 8000 \text{ mm}^2$ et par 24h.