QUELQUES NOTIONS DE MÉCANIQUE DES SYSTÈMES DE POINTS ET DES MILIEUX CONTINUS
APPLICATION À L'ÉTUDE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

Table des matières

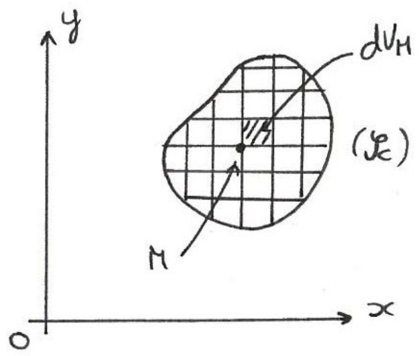
Dans tout le document les mouvements des systèmes matériels sont étudiés par rapport à un référentiel $(\mathscr{R})$ muni d'un repère d'espace $(R) = (Oxyz)$ dont la base cartésienne orthonormale directe sera notée $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

On considère deux types de systèmes matériels **non ponctuels** :

- Un système $(\mathscr{S}_p)$ constitué de N petits objets quasi-ponctuels assimilés à des points matériels M_i de masses m_i, $1 \leqslant i \leqslant N$.
- Un système matériel continu $(\mathscr{S}_c)$ où la matière est répartie de façon continue dans un volume V. Cela est typiquement le cas d'un solide ou d'un ensemble de solides.

  Dans ce cas on divise le volume V en une juxtapostion de petits volumes mésoscopiques $\mathrm{d}V_M$ localisés en des points $M \in V$ et on note $\delta m(M)$ la masse contenue dans $\mathrm{d}V_M$. On introduit la masse volumique en M, définie par :

$$\boxed{\delta m(M) = \rho(M)\,\mathrm{d}V_M}$$



On dira que le système continu est **homogène** si et seulement si la masse volumique est *uniforme*, c'est à dire indépendante du point M dans le système. Dans ce cas, la masse volumique sera notée simplement ρ.

Dans le cas d'un système continu $(\mathscr{S}_c)$ on notera de façon générale V son volume et Σ la surface qui le délimite.

Un dernier point avant de commencer : les démonstrations de ce document se terminent par un $\square$, ce qui signifie "ce qu'il fallait démontrer".

I. Quantité de mouvement et moment cinétique d'un système matériel non ponctuel

1) Masse totale

La **masse totale** m d'un système matériel non ponctuel est la somme des masses des différents éléments qui le composent.

- Pour un système de N points $(\mathscr{S}_p)$:

$$\boxed{m = \sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{1}$$

- Pour un système continu $(\mathscr{S}_c)$ on passe d'une somme discrète à une intégrale :

$$\boxed{m = \int_{\mathscr{S}_c} \delta m(M) = \iiint_V \rho(M)\,\mathrm{d}V_M} \tag{2}$$

et on intègre sur tout le volume du système.

Dans le cas particulier d'un système homogène on obtient simplement $m = \rho \times V$

2) Centre d'inertie (ou centre de masse) d'un système matériel

- Dans le cas d'un système de points $(\mathscr{S}_p)$ le *centre d'inertie* ou *centre de masse* (on dit aussi barycentre) du système est **l'unique point** G défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{OM_i}}{m} \quad \text{et donc} \quad m\,\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{OM_i}} \tag{3}$$

où m est la masse totale du système.

- Dans le cas d'un système continu $(\mathscr{S}_c)$ de volume V, le centre d'inertie est l'unique point défini par :

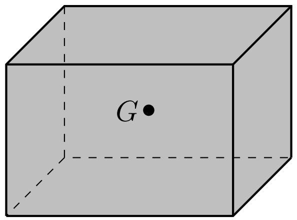
$$\boxed{\overrightarrow{OG} \overset{\text{déf}}{=} \frac{\displaystyle\int_{\mathscr{S}} \overrightarrow{OM}\,\delta m(M)}{m} = \frac{\displaystyle\iiint_V \overrightarrow{OM}\,\rho(M)\,\mathrm{d}V_M}{m}} \tag{4}$$

et donc :

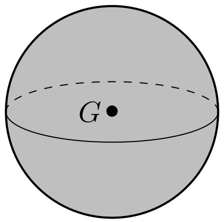
$$m\,\overrightarrow{OG} = \iiint_V \overrightarrow{OM}\,\rho(M)\,\mathrm{d}V_M \tag{5}$$

Lorsque le système continu $(\mathscr{S}_c)$ est homogène et qu'il admet un *centre de symétrie*, on montre que G est ce centre de symétrie.

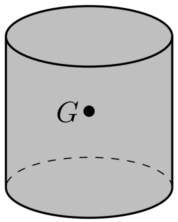
Exemples classiques :



Parallélépipède homogène



Boule homogène



Cylindre homogène

Propriété fondamentale de G :

Soit A un point quelconque. Que ce soit pour un système de points $(\mathscr{S}_p)$ ou bien pour un système continu $(\mathscr{S}_c)$ on a :

$$\boxed{m\,\overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{AM_i} \quad \text{et} \quad m\,\overrightarrow{AG} = \iiint_V \overrightarrow{AM}\,\rho(M)\,\mathrm{d}V_M} \tag{6}$$

En effet, pour un système de points :

$$m\,\overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{OM_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM_i}\right) = m\,\overrightarrow{OA} + \sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{AM_i}$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{AM_i} = m\,\left(\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}\right) = m\,\overrightarrow{AG}$$

La démonstration est identique pour un système continu en utilisant la relation de Chasles et la linéarité de l'intégrale.
□

Il n'y a **aucune contrainte** sur le choix du point A qui est absolument quelconque. En faisant en particulier $A = G$ on obtient l'importante relation :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i\,\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \iiint_V \overrightarrow{GM}\,\rho(M)\,\mathrm{d}V_M = \overrightarrow{0}} \tag{7}$$

Exercice :

Montrer que pour un système de deux points matériels M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 on a :

$$\overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1+m_2}\,\overrightarrow{M_1M_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{GM_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2}\,\overrightarrow{M_1M_2}$$

3) Quantité de mouvement d'un système matériel non ponctuel

Dans le référentiel $(\mathscr{R})$ de repère (R), la **quantité de mouvement** ou **impulsion** d'un point matériel M de masse m est par définition :

$$\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v}(M/R)}$$

Par définition, la quantité de mouvement dans le repère (R) d'un système non ponctuel est la somme des quantités de mouvements des différents points qui constituent le système. On a donc :

- Système de points $(\mathscr{S}_p)$:

$$\boxed{\overrightarrow{P}(\mathscr{S}_p/R) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}(M_i/R)} \tag{8}$$

- Système continu $(\mathscr{S}_c)$:

$$\boxed{\overrightarrow{P}(\mathscr{S}_c/R) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathscr{S}_c} \delta m(M)\,\vec{v}(M/R) = \iiint_V \rho(M)\,\vec{v}(M/R)\,\mathrm{d}V_M} \tag{9}$$

Propriété fondamentale :

Aussi bien pour un système de points que pour un système continu, on a toujours :

$$\overrightarrow{P}(\mathscr{S}_p/R) = m\,\vec{v}(G/R) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{P}(\mathscr{S}_c/R) = m\,\vec{v}(G/R)$$

Autrement dit, la quantité de mouvement d'un système matériel non ponctuel est *celle de son centre d'inertie, affecté de la masse totale du système.*

Cela se démontre bien pour un système des N points matériels. En partant de l'équation (3) et en la dérivant par rapport au temps dans le repère (R) on obtient :

$$m\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \sum_{i=1}^{N} m_i\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_i}}{\mathrm{d}t}\right)_R = \sum_{i=1}^{N} m_,\vec{v}(M_i/R) = \overrightarrow{P}(\mathscr{S}_p/R)$$

et comme :

$$\vec{v}(G/R) = \left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right)_R$$

on obtient bien le résultat cherché :

$$\overrightarrow{P}(\mathscr{S}_p/R) = m\,\vec{v}(G/R)$$

Pour un système continu, la démonstration est la même en partant de l'équation (5) mais il faut admettre qu'on peut permuter la dérivation temporelle et l'intégrale sur le volume du système.

□

4) Moment cinétique d'un système matériel non ponctuel

Soit A un point quelconque. On appelle moment cinétique en A d'un point matériel M de masse m dans le repère (R) la grandeur vectorielle :

$$\boxed{\overrightarrow{L_A} = \overrightarrow{AM} \wedge m\,\vec{v}(M/R)}$$

Par définition, le moment cinétique en A d'un système matériel non ponctuel dans le repère (R) est la somme des moments cinétiques des différentes points qui le constituent. Cela se traduit par :

- Système de N points $(\mathscr{S}_p)$:

$$\boxed{\overrightarrow{L_A}(\mathscr{S}_p/R) \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i\,\vec{v}(M_i/R)} \tag{10}$$

- Système continu $(\mathscr{S}_c)$:

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{L_A}(\mathscr{S}_c/R) &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathscr{S}_c} \overrightarrow{AM} \wedge \delta m(M)\,\vec{v}(M/R)\\ &= \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \rho(M)\,\vec{v}(M/R)\,\mathrm{d}V_M\end{aligned}} \tag{11}$$

5) Énergie cinétique d'un système matériel non ponctuel

L'énergie cinétique dans un repère (R) d'un système matériel non ponctuel est la somme des énergies cinétiques des points qui composent ce système. On a donc :

- Système de N points $(\mathscr{S}_p)$:

$$\boxed{E_c(\mathscr{S}_p/R) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\, m_i \,\|\vec{v}(M_i/R)\|^2} \tag{12}$$

- Système continu $(\mathscr{S}_c)$:

$$\boxed{\begin{aligned} E_c(\mathscr{S}_c/R) &\overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathscr{S}_c} \frac{1}{2}\,\delta m(M)\,\|\vec{v}(M/R)\|^2 \\ &= \iiint_V \frac{1}{2}\,\rho(M)\,\|\vec{v}(M/R)\|^2\,\mathrm{d}V_M \end{aligned}} \tag{13}$$

où l'intégrale s'étend à tout le volume V du système $(\mathscr{S}_c)$

6) Cas particulier d'un solide en translation

Un cas particulier important en pratique est celui où $(\mathscr{S}_c)$ est un solide en translation (quelconque) par rapport au référentiel $(\mathscr{R})$. On a vu dans le chapitre sur le changement de référentiel que dans ce cas, tous les points du solide ont le même vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ à chaque instant :

$$\forall\, M \in V,\ \vec{v}(M/R) = \vec{v}(t)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} E_c(\mathscr{S}_c/R) &= \iiint_V \frac{1}{2}\,\rho(M)\,\|\vec{v}(t)\|^2\,\mathrm{d}V_M \\ &= \frac{1}{2}\left(\iiint_V \frac{1}{2}\,\rho(M)\,\mathrm{d}V_M\right)\|\vec{v}(t)\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\,m\|\vec{v}(t)\|^2 \end{aligned}$$

D'autre part, la quantité de mouvement du solide dans (R) s'écrit dans ce cas particulier :

$$\overrightarrow{P}(\mathscr{S}_c/R) = \iiint_V \rho(M)\,\vec{v}(t)\,\mathrm{d}V_M = \left(\iiint_V \rho(M)\,\mathrm{d}V_M\right)\vec{v}(t) = m\,\vec{v}(t)$$

et, enfin, comme $\overrightarrow{P}(\mathscr{S}_c/R) = m\,\vec{v}(G/R)$, il vient : $\vec{v}(G/R) = \vec{v}(t)$.

Conclusion :

Lorsqu'un solide $(\mathscr{S}_c)$ est en translation par rapport à un référentiel $(\mathscr{R})$, tous les points du solide ont le même vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ à chaque instant et on a :

$$\overrightarrow{P}(\mathscr{S}_c/R) = m\,\vec{v}(t) \quad ; \quad \vec{v}(G/R) = \vec{v}(t) \quad \text{et} \quad E_c(\mathscr{S}_c/R) = \frac{1}{2}\,m\,\|\vec{v}(t)\|^2$$

II. Quelques notions de dynamique d'un système matériel non ponctuel

1) Forces intérieures et forces extérieures

Dans le cas d'un système matériel non ponctuel il faut distinguer les *forces intérieures et les forces extérieures au système.* Comme en thermodynamique, on définit le milieu extérieur (sous-entendu au système) comme étant toute la matière de l'univers qui ne fait pas partie du système. On dit alors :

- qu'une force est **intérieure** au système lorsqu'elle est exercée par une partie du système sur une autre partie du système.
- qu'une force est **extérieure** au système lorsqu'elle est exercée par une partie du milieu extérieur sur le système (ou sur une partie du système).

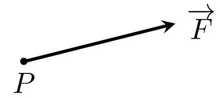
Dans le cas des systèmes non ponctuels, se sont les forces extérieures qui sont importantes dans les lois de la mécanique (sauf pour les théorèmes énergétiques). C'est pour cela qu'il convient de savoir comment on les décrit.

2) Description des forces extérieures. Résultante et moment résultant.

Fondamentalement, une force est un couple $\left(P, \overrightarrow{F}\right)$ formé d'un point P et d'un vecteur $\overrightarrow{F}$:

- $\overrightarrow{F}$ est le *vecteur force* : il indique la direction, le sens et l'intensité de la force exercée.
- P est le *point d'application de la force.* On dit que la force s'exerce sur le point P.

On dit que le vecteur force $\overrightarrow{F}$ **est lié** (au point P) au sens où on ne peut le représenter que par une flèche dont l'origine est en P (et pas par une flèche qu'on peut dessiner où on veut comme dans le cas d'un vecteur libre, par exemple $\overrightarrow{e_x}$).



Un ensemble de forces est un ensemble de $\mathcal{F}$ couples $\left(P, \overrightarrow{F_P}\right)$, chaque couple étant consitué d'un vecteur force et de son point d'application. Cet ensemble peut être fini ou bien non-dénombrable (cf. plus bas).

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(P, \overrightarrow{F_P}\right) \right\}$$

a) Forces extérieures exercées sur un système de N points

Dans ce cas la description est très simple. Sur chaque point M_i du système $(\mathscr{S}_p)$ s'exerce un vecteur force $\overrightarrow{F_{i,\text{ext}}}$ qui est la somme de tous les vecteurs forces exercés par le milieu extérieur sur le point M_i.

L'ensemble des forces exercées par le milieu extérieur sur le système $(\mathscr{S}_p)$ est donc l'ensemble des couples ci-dessous :

$$\mathcal{F}_{\text{ext}} = \left\{ \left(M_i, \overrightarrow{F_{i,\text{ext}}}\right) \mid 1 \leqslant i \leqslant N \right\}$$

On définit alors :

- La *résultante des forces extérieures* :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\text{ext}} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F_{i,\text{ext}}}} \tag{14}$$

- Le *moment résultant en A des forces extérieures* :

$$\boxed{\overrightarrow{M_{A,\text{ext}}} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{F_{i,\text{ext}}}} \tag{15}$$

Remarque :

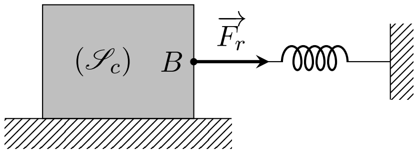
$\overrightarrow{R}_{\text{ext}}$ est un vecteur force (somme de vecteurs forces) mais ne possède pas de point d'application ! Comme on a sommé différentes forces qui s'appliquent en des points différents, on a perdu dans ce processus la notion de point d'application pour la résultante.

b) Forces extérieures exercées sur un système matériel continu

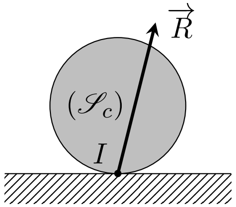
Dans ce cas, on classe les forces exercées par le milieu extérieur en 3 types :

- Les forces qui agissent *sur des points particuliers de* $(\mathscr{S}_c)$:

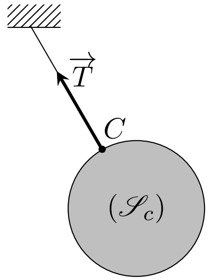
  On va les appeler **forces discrètes** dans le sens où elles sont en nombre fini : elles agissent sur un nombre fini de points particuliers de $(\mathscr{S}_c)$. On les rencontre souvent lorsque le système est un solide. En voici quelques exemples typiques :



Ressort attaché en B. B est le point d'application de la force $(B, \overrightarrow{F_r})$



Contact ponctuel en I. I est le point d'application de la force $(I, \overrightarrow{R})$, réaction du support



Tension exercée par un fil attaché en C. C est le point d'application de la force $(C, \overrightarrow{T})$

S'il y a K forces discrètes $\left(P_k, \overrightarrow{F_k}\right)$ dont les points d'applications sont $P_k \in (\mathscr{S}_c)$, $1 \leqslant k \leqslant K$, alors leur résultante et leur moment résultant en A s'écrivent :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\text{ext}}^{(\text{disc})} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{F_k}} \tag{16}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{M}_{A\text{ext}}^{(\text{disc})} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{AP_k} \wedge \overrightarrow{F_k}} \tag{17}$$

- Les forces qui agissent sur *chaque point du volume de* $(\mathscr{S}_c)$:

  On parle de *forces volumiques*. Sur chaque élément de volume $\mathrm{d}V_M$ localisé en $M \in V$ le milieu extérieur exerce un vecteur force élémentaire $\overrightarrow{\delta F}(M)$. Il est commode d'introduire une **densité volumique de forces** $\overrightarrow{f_V}(M)$, définie en tout point M du volume V de $(\mathscr{S}_c)$ par :

$$\overrightarrow{\delta F}(M) = \overrightarrow{f_V}(M)\, V_M$$

Dans ce cas M est le point d'application du vecteur force $\overrightarrow{\delta F}(M)$, la résultante et le moment résultant en A des forces volumiques sont respectivement donnés par :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\text{ext}}^{(\text{vol})} \overset{\text{déf}}{=} \int_{\text{volume de } \mathscr{S}_c} \overrightarrow{\delta F}(M) = \iiint_V \overrightarrow{f_V}(M)\,\mathrm{d}V_M} \tag{18}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{M_{A,\text{ext}}}^{(\text{vol})} \overset{\text{déf}}{=} \int_{\text{volume de } \mathscr{S}_c} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{\delta F}(M) = \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f_V}(M)\,\mathrm{d}V_M} \tag{19}$$

Ce type de force sert à décrire les actions à distance exercées par le milieu extérieur sur le système $(\mathscr{S}_c)$, par exemple les forces de gravitation, etc ...

Exemple typique : le poids

Le poids est la force exercée à distance par la Terre sur le système. En notant $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre, on a :

$$\overrightarrow{\delta F}(M) = \delta m(M)\,\vec{g} = \rho(M)\,\vec{g}\,\mathrm{d}V_M$$

La densité volumique de poids est donc $\overrightarrow{f_V}(M) = \rho(M)\,\overrightarrow{g}$.

Dans le cas particulier où $\vec{g}$ est **uniforme**, on a le résultat remarquable suivant pour la résultante et le moment en A des forces du poids :

$$\overrightarrow{R}(\text{poids}) = \iiint_V \rho(M)\vec{g}\,\mathrm{d}V_M = \left(\iiint_V \rho(M)\,\mathrm{d}V_M\right)\vec{g} = m\vec{g}$$

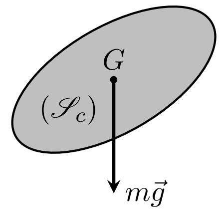
où m est la masse totale de $(\mathscr{S}_c)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_A}(\text{poids}) &= \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \rho(M)\vec{g}\,\mathrm{d}V_M \\ &= \left(\iiint_V \overrightarrow{AM}\rho(M)\,\mathrm{d}V_M\right) \wedge \vec{g} \\ &= m\,\overrightarrow{AG} \wedge \vec{g} = \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{g}\end{aligned}$$

où on a utilisé la définition du centre de masse G de $(\mathscr{S}_c)$.

Le résultat remarquable ci-dessous est donc à retenir :

Dans le cas où un système matériel continu $(\mathscr{S}_c)$ est plongé dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$, alors les forces volumiques du poids sont équivalentes à une force discrète $m\vec{g}$ qui s'applique au centre de masse G de $(\mathscr{S}_c)$.



- Les forces qui agissent sur *chaque point de la surface de* $(\mathscr{S}_c)$:

On parle de *forces surfaciques*. Sur chaque élément de surface $\mathrm{d}S_N$ localisé en $N \in \Sigma$ le milieu extérieur exerce un vecteur force élémentaire $\overrightarrow{\delta F}(N)$. On introduit alors une **densité surfacique de forces** $\overrightarrow{f_S}(N)$, définie en tout point N de la surface Σ de $(\mathscr{S}_c)$ par :

$$\overrightarrow{\delta F}(N) = \overrightarrow{f_S}(N)\,S_N$$

Le point N est point d'application du vecteur force $\overrightarrow{\delta F}(N)$. La résultante et le moment résultant en A des forces surfaciques sont alors respectivement donnés par :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\text{ext}}^{(\text{surf})} \overset{\text{déf}}{=} \int_{\text{surface de } \mathscr{S}_c} \overrightarrow{\delta F}(N) = \iint_\Sigma \overrightarrow{f_S}(N)\,\mathrm{d}S_N} \tag{20}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{M_{A\text{ext}}}^{(\text{surf})} \overset{\text{déf}}{=} \int_{\text{surface de } \mathscr{S}_c} \overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{\delta F}(N) = \iint_\Sigma \overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{f_S}(N)\,\mathrm{d}S_N} \tag{21}$$

Ce type de force sert à décrire les *actions de contact* exercées sur la surface de $(\mathscr{S}_c)$ par le milieu extérieur. Il y a deux exemples typiques de ce type de forces :

Les forces de pression exercées par un fluide dans lequel est immergé le système $(\mathscr{S}_c)$

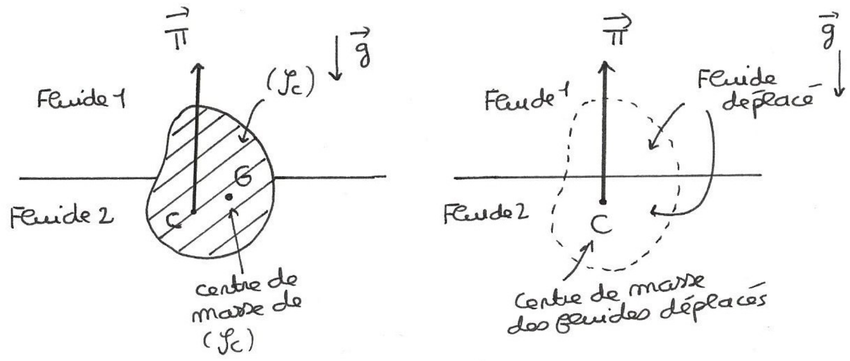
Dans ce cas $\overrightarrow{\delta F}(N) = -\,P(N)\,\vec{n}_{\text{ext}}(N)\,\mathrm{d}S_N$ où $P(N)$ est la pression exercée par le fluide sur l'élément de surface $\mathrm{d}S_N$. On remarque donc que la densité surfacique des forces de pression est donnée par :

$$\overrightarrow{f_S}(N) = -\,P(N)\,\vec{n}_{\text{ext}}(N)$$

Dans le cas particulier où le fluide est au repos et que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme on a le théorème remarquable suivant, dû à Archimède :

Théorème d'Archimède

Lorsqu'un système matériel continu $(\mathscr{S}_c)$ (un solide par exemple) est plongé dans un fluide immobile dans le référentiel terrestre dont le champ de pesanteur $\vec{g}$ est supposé uniforme, alors l'ensemble des forces de pression exercées sur toute la surface de $(\mathscr{S}_c)$ est équivalent à une force discrète $\overrightarrow{\Pi}$ appelée *poussée d'Archimède*, égale à l'opposé du poids du fluide déplacé et qui s'applique au point C qui est le centre de masse du fluide déplacé. C est appelé *centre de poussée.*



Liaison pivot

Le deuxième exemple important de forces surfaciques concerne l'ensemble des forces exercées par l'axe de rotation Δ sur un solide en rotation autour de Δ. On pensera par exemple à une porte qui tourne autour de ses gonds.

En pratique c'est une **liaison pivot** qui permet la rotation du solide autour de l'axe Δ. Un dessin schématique d'une liaison pivot est donné ci-dessous ; celle-ci ne doit permettre que des mouvement de rotation du solide autour de Δ ; elle doit empêcher tout mouvement de translation (glissement) du solide le long de Δ [1].

Ce type de liaison utilise un solide cylindrique d'axe de symétrie Δ, fixe dans le référentiel d'étude, appelé **articulation de la liaison**, autour duquel le solide $(\mathscr{S}_c)$ peut tourner librement.

1. En réalité on "fluidifie" le mouvement en laissant un espace entre les deux solides, à l'intérieur duquel on place des petites billes : principe du roulement à billes.

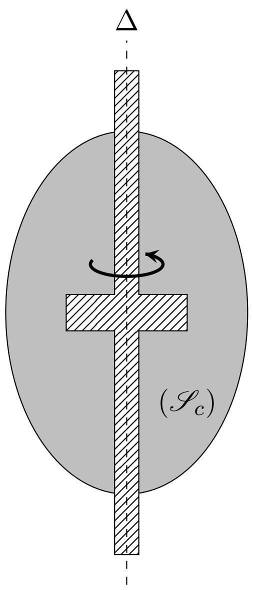


FIGURE 1 – Principe d'une liaison pivot. Le solide hachuré (l'articulation de la liaison pivot) est de forme cylindrique et son axe de symétrie est Δ ; il est fixe dans le référentiel d'étude $(\mathscr{R})$. Le solide $(\mathscr{S}_c)$ en gris n'a plus qu'un seul degré de liberte de rotation autour de Δ.

Soit $(\Sigma_{\text{contact}})$ la surface de contact entre le solide (S_c) et le solide hachuré. La résultante et le moment en A des actions exercées par l'articulation en tout point $N \in \Sigma_{\text{contact}}$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\text{pivot}} = \iint_{\Sigma_{\text{contact}}} \overrightarrow{f_S}(N)\,\mathrm{d}S_N} \tag{22}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{M_{A,\text{pivot}}} = \iint_{\Sigma_{\text{contact}}} \overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{f_S}(N)\,\mathrm{d}S_N} \tag{23}$$

3) Théorème du transport du moment résultant

a) Énoncé du théorème

Lorsqu'on a affaire à un ensemble de forces $\mathcal{F}$ qui s'applique sur un système matériel non ponctuel on a souvent besoin de pouvoir décaler le moment résultant d'un point A en un point B. Cela signifie qu'on veut pouvoir calculer $\overrightarrow{M_B}$ connaissant $\overrightarrow{M_A}$.

On dispose alors du théorème du déplacement des moments résultants qui est parfaitement adapté à cette situation :

Théorème du déplacement des moments

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble de forces (ensemble de couples (point d'application, vecteur force)) dont la résultante est $\overrightarrow{R}$. Soient deux points A et B quelconques. Alors les moments résultants en A et en B sont reliés par l'équation :

$$\overrightarrow{M_B} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$$

Démo :

On peut faire la démonstration pour un ensemble de forces discrètes (ce qui est plus simple) mais aussi pour tout autre type de forces. On remarquera tout de suite que cela marche pour n'importe quel type de forces :

- Ensemble de forces discrètes $\left(P_k, \overrightarrow{F_k}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant K$ qui s'applique sur un système matériel continu ou bien sur un ensemble de points. On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_B} &\overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{BP_k} \wedge \overrightarrow{F_k} = \sum_{k=1}^{K} \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP_k}\right) \wedge \overrightarrow{F_k} \\
&= \sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{AP_k} \wedge \overrightarrow{F_k} + \sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F_k} \\
&= \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \left(\sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{F_k}\right) \\
&= \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}
\end{aligned}$$

- Prenons un autre exemple. Pour un ensemble de forces volumiques qui s'appliquent en tous points M du volume d'un système matériel continu $(\mathscr{S}_c)$ la démonstration est la même, sauf que cela se fait avec une intégrale :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_B} &\overset{\text{déf}}{=} \iiint_V \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{f_V}(M)\,\mathrm{d}V_M \\
&= \iiint_V \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \overrightarrow{f_V}(M)\,\mathrm{d}V_M \\
&= \iiint_V \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{f_V}(M)\,\mathrm{d}V_M + \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{f_V}(M)\,\mathrm{d}V_M \\
&= \overrightarrow{BA} \wedge \left(\iiint_V \overrightarrow{f_V}(M)\,\mathrm{d}V_M\right) + \overrightarrow{M_A} \\
&= \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}
\end{aligned}$$

□

b) Définition d'un couple

Il est courant d'avoir affaire à des ensembles de forces appelés **couples**.

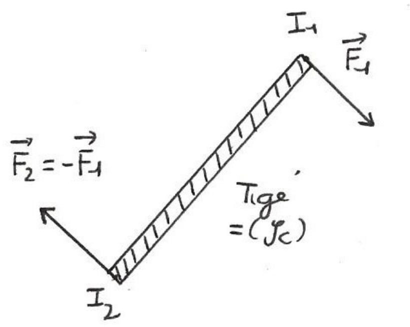
Définition

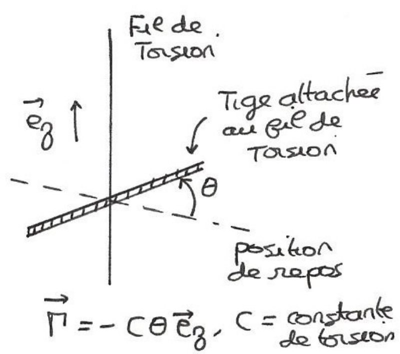
En mécanique on appelle *couple* tout ensemble de forces dont la résultante est nulle : $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$. Le théorème du transport du moment résultant indique alors que :

$$\forall\, A, B,\ \overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B}$$

Le moment résultant est indépendant du point par rapport auquel on le calcule. Dans ce cas on le note traditionnellement $\overrightarrow{\Gamma}$.

Exemples





4) Théorème du centre d'inertie

C'est un des théorèmes fondamentaux de la dynamique des systèmes matériels non ponctuels. On l'appelle aussi *théorème du centre de masse* :

Théorème du centre d'inertie (TCI)

Pour tout système matériel ($\mathscr{S}_p$) ou ($\mathscr{S}_c$) de masse totale m et dans un référentiel galiléen ($\mathscr{R}_g$), on a :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}(\mathscr{S}_{p \text{ ou } c}/R_g)}{\mathrm{d}t}\right)_{R_g} = m\left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}(G/R_g)}{\mathrm{d}t}\right)_{R_g} = m\,\vec{a}(G/R_g) = \overrightarrow{R}_{\text{ext}}$$

où $\overrightarrow{R}_{\text{ext}}$ est la résultante de toutes les forces extérieures exercées sur le système matériel.

Remarque :

- Dans le cas d'un système de N points : $\overrightarrow{R}_{\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F}_{i,\text{ext}}$.
- Dans le cas d'un système matériel continu ($\mathscr{S}_c$), $\overrightarrow{R}_{\text{ext}}$ est la somme des résultantes des forces discrètes, des forces volumiques et des forces surfaciques :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\text{ext}} = \overrightarrow{R}_{\text{ext}}^{(\text{disc})} + \overrightarrow{R}_{\text{ext}}^{(\text{vol})} + \overrightarrow{R}_{\text{ext}}^{(\text{surf})}}$$

5) Théorème du moment cinétique

C'est le second théorème fondamental de la dynamique des systèmes matériels non ponctuels. On l'énonce dans le cas particulier où A est un point fixe :

Théorème du moment cinétique (TMC)

Pour tout système matériel ($\mathscr{S}_p$) ou ($\mathscr{S}_c$) et dans un référentiel galiléen ($\mathscr{R}_g$), lorsque A est un **point fixe** dans ($\mathscr{R}_g$) on a :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_A}(\mathscr{S}_{p \text{ ou } c}/R_g)}{\mathrm{d}t}\right)_{R_g} = \overrightarrow{M}_{A,\text{ext}}$$

où $\overrightarrow{M}_{A,\text{ext}}$ est le moment résultant en A des forces extérieures exercées sur le système matériel.

Remarque :

- Dans le cas d'un système de N points : $\overrightarrow{M}_{A,\text{ext}} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{AM_i} \wedge \overrightarrow{F}_{i,\text{ext}}$.
- Dans le cas d'un système matériel continu ($\mathscr{S}_c$), $\overrightarrow{M}_{A,\text{ext}}$ est la somme des moments résultants en A des forces discrètes, des forces volumiques et des forces surfaciques :

$$\boxed{\overrightarrow{M}_{A,\text{ext}} = \overrightarrow{M}_{A\text{ext}}^{(\text{disc})} + \overrightarrow{M}_{A\text{ext}}^{(\text{vol})} + \overrightarrow{M}_{A\text{ext}}^{(\text{surf})}}$$

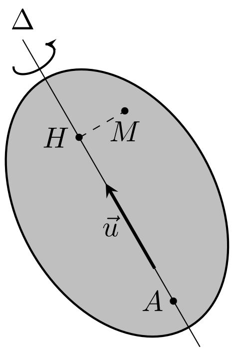
III. Application à l'étude d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

Dans toute cette partie on étudie un système matériel continu particulier qui est un solide en rotation autour d'un axe Δ, fixe par rapport à un référentiel $(\mathscr{R})$ munit d'un repère (R). Ce système sera noté (S) au lieu de $(\mathscr{S}_c)$ et son vecteur rotation (cf. chapitre sur les changements de référentiels) $\overrightarrow{\omega}(S/R_g)$ sera noté plus simplement $\overrightarrow{\omega}$.

1) Rappel de cinématique

L'axe de rotation Δ est orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}$. On aura donc $\overrightarrow{\omega} = \omega\,\vec{u}$. D'autre part, si M est un point de (S) et A un point de Δ, alors :

$$\boxed{\vec{v}(M/R) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AM}}$$



Si on introduit le projeté H de M sur Δ, alors comme $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$ et que $\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{0}$, le vecteur vitesse de M peut aussi s'écrire :

$$\boxed{\vec{v}(M/R) = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}}$$

2) Moment cinétique en un point de l'axe de rotation

On le calcule par rapport à un point $A \in \Delta$ qui est donc fixe dans le référentiel $(\mathscr{R})$ d'étude. En partant de la définition (11) du moment cinétique on obtient :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{L_A}(S/R) &= \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \delta m(M)\,\vec{v}(M/R) \\
&= \int_S \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \delta m(M)\,\vec{v}(M/R) \\
&= \int_S \overrightarrow{HM} \wedge \delta m(M)\,\vec{v}(M/R) + \int_S \overrightarrow{AH} \wedge \delta m(M)\,\vec{v}(M/R)
\end{aligned}$$

Or :

$$\overrightarrow{HM} \wedge \vec{v}(M/R) = \overrightarrow{HM} \wedge \left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{HM}\right)$$

et, grâce à la formule du double produit vectoriel, on obtient :

$$\overrightarrow{HM} \wedge \vec{v}(M/R) = \left(\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{HM}\right)\,\overrightarrow{\omega} - \left(\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{\omega}\right)\,\overrightarrow{HM} = HM^2\,\overrightarrow{\omega}$$

D'autre part, $\overrightarrow{AH} \wedge \vec{v}(M/R)$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$, ce qui implique que la seconde intégrale est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ comme somme de vecteur $\perp \vec{u}$. On la note $\overrightarrow{L_{A\perp}}(S/R)$.

Il vient :

$$\overrightarrow{L_A}(S/R) = \left(\int_S HM^2\,\delta m(M)\right)\,\overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{L_{A\perp}}(S/R)$$

Définition. Moment d'inertie

La grandeur J_Δ définie par l'intégrale :

$$J_\Delta = \int_S HM^2\,\delta m(M) = \iiint_V \rho(M)\,HM^2\,\mathrm{d}V_M$$

est appelée *moment d'inertie du solide* (S) *par rapport à l'axe* Δ. Dans le système international d'unités il s'exprime en kg.m^2.

Conclusion :

Le moment cinétique de (S) en $A \in \Delta$ s'écrit sous la forme :

$$\boxed{\overrightarrow{L_A}(S/R) = J_\Delta\,\overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{L_{A\perp}}(S/R)} \tag{24}$$

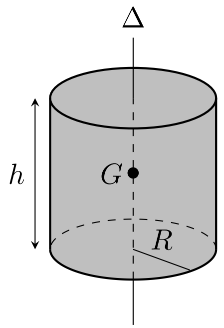
Il est la somme d'une composante colinéaire à $\vec{u}$ ($J_\Delta \overrightarrow{\omega}$) et d'une composante orthogonale à $\vec{u}$ ($\overrightarrow{L_{A\perp}}(S/R)$).

3) Exemples de moments d'inertie

Dans les sujets de concours et les exercices, les moments d'inertie J_Δ sont toujours fournis. Il n'est donc pas nécessaire de savoir les calculer. On donne ci-dessous les résultats les plus courants.

a) Moment d'inertie d'un cylindre homogène

Le solide est un cylindre homogène de rayon R et de hauteur h. L'axe Δ est son axe de symétrie.

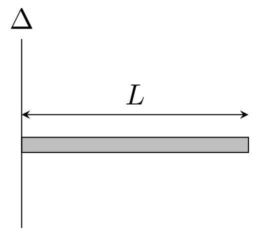


Cylindre homogène
rayon R
hauteur h

$$\boxed{J_\Delta = \frac{mR^2}{2}}$$

b) Moment d'inertie d'une tige homogène

On considère une tige homogène de longueur L et de très petite section s. L'axe Δ est orthogonal à la tige et passe par une de ses extrémités. Comme s est petite on peut donc supposer que tous les points d'une section sont à la même distance de l'axe Δ.

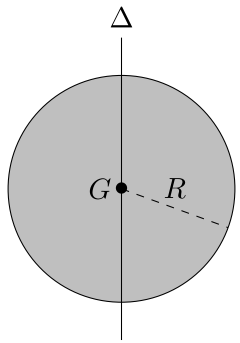


Tige homogène
longueur L

$$\boxed{J_\Delta = \frac{mL^2}{3}}$$

c) Moment d'inertie d'une boule homogène

Le solide est une boule homogène de rayon R. L'axe Δ est un diamètre de la boule.



Boule homogène
rayon R

$$\boxed{J_\Delta = \frac{2\,mR^2}{5}}$$

4) Énergie cinétique du solide

L'énergie cinétique dans le repère (R) du solide (S) est définie par l'équation (13), à savoir :

$$E_c(S/R) = \frac{1}{2} \iiint_V \rho(M)\,\|\vec{v}(M/R)\|^2\,\mathrm{d}V_M$$

En utilisant la formule du **produit mixte** :

$$\vec{a}.\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) = \left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right).\vec{c}$$

on peut transformer $\|\vec{v}(M/R)\|^2$ selon :

$$\begin{aligned}\|\vec{v}(M/R)\|^2 = \vec{v}(M/R).\vec{v}(M/R) &= \left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{AM}\right).\vec{v}(M/R)\\ &= \vec{\omega}.\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{v}(M/R)\right)\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}E_c(S/R) &= \frac{1}{2}\iiint_V \rho(M)\,\vec{\omega}.\left(\overrightarrow{AM}\wedge\vec{v}(M/R)\right)\,\mathrm{d}V_M\\ &= \frac{1}{2}\,\vec{\omega}.\left(\iiint_V \overrightarrow{AM}\wedge\,\rho(M)\,\vec{v}(M/R)\,\mathrm{d}V_M\right)\\ &= \frac{1}{2}\,\vec{\omega}.\overrightarrow{L_A}(S/R)\end{aligned}$$

Finalement, on obtient la relation très simple suivante :

$$\boxed{E_c(S/R) = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}.\overrightarrow{L_A}(S/R) = \frac{1}{2}\,J_\Delta\omega^2} \qquad (25)$$

5) Théorème scalaire du moment cinétique

On suppose que le référentiel dans lequel on étudie le mouvement du solide est galiléen et on le note $(\mathscr{R}_g)$. A étant un point de Δ, il est fixe dans $(\mathscr{R}_g)$ et le théorème du moment cinétique page 12 peut donc s'appliquer :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_A}(\mathscr{S}/R_g)}{\mathrm{d}t}\right)_{R_g} = \overrightarrow{M_{A,\text{ext}}}$$

En multipliant scalairement par $\vec{u}$ fixe dans (R_g) on obtient :

$$\vec{u}.\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_A}(\mathscr{S}/R_g)}{\mathrm{d}t}\right)_{R_g} = \left(\frac{\mathrm{d}(\vec{u}.\overrightarrow{L_A}(\mathscr{S}/R_g))}{\mathrm{d}t}\right)_{R_g} = \vec{u}.\overrightarrow{M_{A,\text{ext}}}$$

Or d'après l'équation (24) :

$$\vec{u}.\overrightarrow{L_A}(\mathscr{S}/R_g) = J_\Delta\,\vec{u}.\vec{\omega} = J_\Delta\omega$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{J_\Delta\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \vec{u}.\overrightarrow{M_{A,\text{ext}}}} \qquad (26)$$

C'est le *théorème scalaire* du moment cinétique. Le terme $\vec{u}.\overrightarrow{M_{A,\text{ext}}}$ est la projection du moment résultant en A des forces extérieures sur l'axe de rotation.

Cette **projection est indépendante du choix du point** $A\in\Delta$ puisque d'après le théorème du transport du moment, si B est un autre point de Δ alors :

$$\overrightarrow{M_{B,\text{ext}}} = \overrightarrow{M_{A,\text{ext}}} + \overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{R}_{\text{ext}}$$

avec $\overrightarrow{BA}$ colinéaire à $\vec{u}$, ce qui conduit à :

$$\vec{u}.\overrightarrow{M_{B,\text{ext}}} = \vec{u}.\overrightarrow{M_{A,\text{ext}}}$$

Par la suite on pose :

$$\boxed{\forall\,A\in\Delta,\ \ M_{\Delta,\text{ext}} \overset{\text{déf}}{=} \vec{u}.\overrightarrow{M_{A,\text{ext}}}} \qquad (27)$$

et le théorème scalaire du moment cinétique s'écrit alors :

$$\boxed{J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = M_{\Delta,\mathrm{ext}}} \tag{28}$$

6) Théorème de la puissance cinétique

a) Puissance d'un ensemble de forces

Dans le référentiel $(\mathscr{R})$ de repère (R), la puissance d'une force $\overrightarrow{F}$ qui s'exerce sur un point matériel M s'écrit :

$$\mathscr{P}(\overrightarrow{F}) \stackrel{\text{déf}}{=} \overrightarrow{F}.\vec{v}(M/R)$$

On va étendre cette définition à un ensemble de forces qui agit sur un solide. Il faut distinguer les trois types de forces : discrètes, volumiques et surfaciques.

- **Forces discrètes**

  On a un ensemble $\left(P_k, \overrightarrow{F_k}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant K$, avec des vecteurs forces $\overrightarrow{F_k}$ qui agissent sur les points d'application P_k du solide. Par définition, la puissance de ces forces est la somme :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\mathrm{disc}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{F_k}.\vec{v}(P_k/R)} \tag{29}$$

- **Forces volumiques**

  Sur chaque point M du volume du solide s'exerce la force élémentaire $\overrightarrow{\delta F}(M) = \overrightarrow{f_V}(M)\,\mathrm{d}V_M$. La puissance de ces forces est par définition l'intégrale sur le volume V du solide :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\mathrm{vol}} \stackrel{\text{déf}}{=} \iiint_V \overrightarrow{f_V}(M).\vec{v}(M/R)\,\mathrm{d}V_M} \tag{30}$$

Cas particulier : le poids

Un cas particulier fréquent est celui du poids lorsque le champ de pesanteur $\vec{g}$ est **uniforme**. Comme $\overrightarrow{f_V}(M) = \rho(M)\,\vec{g}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\mathrm{poids}} &= \iiint_V \rho(M)\vec{g}.\vec{v}(M/R)\,\mathrm{d}V_M \\
&= \left(\iiint_V \rho(M)\vec{v}(M/R)\,\mathrm{d}V_M\right).\vec{g} \\
&= m\,\vec{v}(G/R).\vec{g} = m\vec{g}.\vec{v}(G/R)
\end{aligned}$$

d'après la propriété fondamentale du centre d'inertie G, page 4. Ici, m est la masse totale du solide.

Théorème

Lorsque le champ de pesanteur est *uniforme*, la puissance des forces du poids agissant sur un solide (et plus généralement sur un système matériel continu $(\mathscr{S}_c)$) est celle d'une force discrète $m\vec{g}$ (m étant la masse totale du solide) qui s'exerce sur le centre d'inertie G du solide :

$$\mathscr{P}_{\mathrm{poids}} = m\vec{g}.\vec{v}(G/R)$$

- **Forces surfaciques**

  Sur chaque point N de la surface du solide s'exerce la force élémentaire $\overrightarrow{\delta F}(N) = \overrightarrow{f_S}(N)\,\mathrm{d}S_N$. La puissance de ces forces est par définition l'intégrale sur la surface Σ du solide :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\mathrm{surf}} \stackrel{\text{déf}}{=} \iint_\Sigma \overrightarrow{f_S}(N).\vec{v}(N/R)\,\mathrm{d}S_N} \tag{31}$$

La *puissance totale* des forces extérieures qui agissent sur un solide est la somme des trois puissances précédentes :

$$\boxed{\mathscr{P}_{\mathrm{tot,ext}} = \mathscr{P}_{\mathrm{disc}} + \mathscr{P}_{\mathrm{vol}} + \mathscr{P}_{\mathrm{surf}}} \tag{32}$$

b) Expression de la puissance pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Un théorème important permet de calculer la puissance d'un ensemble de forces sans passer par les équations (29), (30) ou (31). Il est valable pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ.

Théorème

Lorsqu'un solide (S) est en rotation autour d'un axe Δ alors la puissance d'un ensemble de forces dont le moment résultant en $A \in \Delta$ est $\overrightarrow{M_A}$ est donnée par :

$$\mathscr{P} = \overrightarrow{\omega}.\overrightarrow{M_A} = \omega M_\Delta$$

où $M_\Delta = \vec{u}.\overrightarrow{M_A}$ est la projection de $\overrightarrow{M_A}$ sur $\vec{u}$.

Démo :

On peut le démontrer pour un ensemble discret de forces $\mathcal{F} = \left\{ \left(P_k, \overrightarrow{F_k}\right), 1 \leqslant k \leqslant K \right\}$, sachant que la démonstration est identique pour des forces volumiques ou bien surfaciques.

A étant un point de l'axe Δ, on a :

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}_{\text{disc}} &= \sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{F_k}.\vec{v}(P_k/R) = \sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{F_k}.\left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{K} \left(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{AP_k}\right).\overrightarrow{F_k} = \sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{\omega}.\left(\overrightarrow{AP_k} \wedge \overrightarrow{F_k}\right) \\
&= \overrightarrow{\omega}.\left(\sum_{k=1}^{K} \overrightarrow{AP_k} \wedge \overrightarrow{F_k}\right) = \overrightarrow{\omega}.\overrightarrow{M_A}^{(\text{disc})}
\end{aligned}$$

où on a utilisé la formule du produit mixte.

□

c) Théorème de la puissance cinétique

Si (S) est un solide en rotation autour de l'axe fixe Δ, alors on a le théorème de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_c(S/R_g)}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}_{\text{tot,ext}}} \tag{33}$$

En effet, on a dans ce cas $E_c(S/R_g) = \frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$, ce qui entraîne :

$$\frac{\mathrm{d}E_c(S/R_g)}{\mathrm{d}t} = \omega\, J_\Delta \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \omega M_{\Delta,\text{ext}} = \mathscr{P}_{\text{tot,ext}}$$

en utilisant le théorème scalaire du moment cinétique.

□