

1 Ressources minières de la Sibérie. CCINP MP 2022

A - Le diamant

- Q1.** a) Le potentiel chimique d'une espèce chimique B_k est défini à partir de l'enthalpie libre G par :

$$\mu(B_k) = \left(\frac{\partial G}{\partial n_k} \right)_{T,P,n_{\ell \neq k}}$$

D'après le cours la variété allotropique la plus stable de carbone à 298 K et sous 1 bar est la forme graphite :

- b) On exprime la différentielle de l'enthalpie libre du corps pur monophasé :

$$dG = -S dT + V dP + \mu dn = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T,n} dP + \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,n} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right)_{T,P} dn$$

Par identification, on obtient :

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T,n}$$

D'autre part, par l'identité d'Euler pour les grandeurs exensives, $G = n\mu$ et $V = nV_{\text{mol}}$. On en déduit que

$$V_{\text{mol}} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_T$$

- c) Le volume molaire s'exprime en fonction de la masse molaire M et la masse volumique ρ :

$$V_{\text{mol}} = \frac{M}{\rho}$$

Le volume molaire est constant, car la masse volumique est invariable. On se place à $T = 298$ K, et on primitive par rapport à la pression :

$$\mu = V_{\text{mol}} P + f(T)$$

Comme $\mu^\circ = V_{\text{mol}} P^\circ + f(T)$ on en déduit :

$$\mu(T, P) = \mu^\circ(T) + V_{\text{mol}}(P - P^\circ) = \mu^\circ(T) + \frac{M}{\rho} (P - P^\circ)$$

Les deux variétés allotropiques seront en équilibre à $T = 298$ K lorsque leurs potentiels chimiques seront égaux (on utilise un indice 1 pour le graphite et 2 pour le diamant) :

$$\mu_1^\circ(T) + \frac{M(C)}{\rho_1} (P - P^\circ) = \mu_2^\circ(T) + \frac{M(C)}{\rho_2} (P - P^\circ)$$

soit

$$P = P^\circ + \frac{\mu_2^\circ - \mu_1^\circ}{M(C) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right)}$$

AN : $P = 1,4$ GPa

- d) Ces conditions ne peuvent être atteintes que pour de très grandes profondeurs, ou bien dans des conditions réalisées à la suite d'un impact de météorites (mais également dans l'industrie du diamant de synthèse).

B - Le nickel

Q2. La masse molaire atomique du nickel vaut :

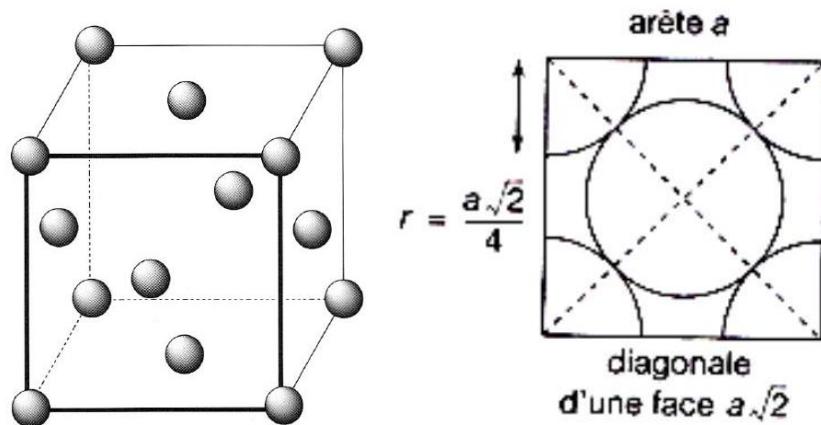
$$M = \sum_i x_i M_i$$

où x_i est le pourcentage molaire de l'isotope i et M_i sa masse molaire. On obtient numériquement :

$$M = 0,6808 \times 58 + 0,2622 \times 60 + 0,0114 \times 61 + 0,0363 \times 62 + (1 - 0,6808 - 0,2622 - 0,0114 - 0,0363) \times 64$$

$$\text{AN : } M = 58,76 \text{ g.mol}^{-1}$$

Q3. a) On représente la maille cfc (vue éclatée, puis vue d'une face avec contact entre atomes) :



La population d'une maille vaut :

$$N = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$$

On détermine le paramètre de maille a à partir de la masse volumique :

$$\rho = \frac{NM(\text{Ni})}{\mathcal{N}_A a^3}, \text{ soit } a = \sqrt[3]{\frac{NM(\text{Ni})}{\mathcal{N}_A \rho}}$$

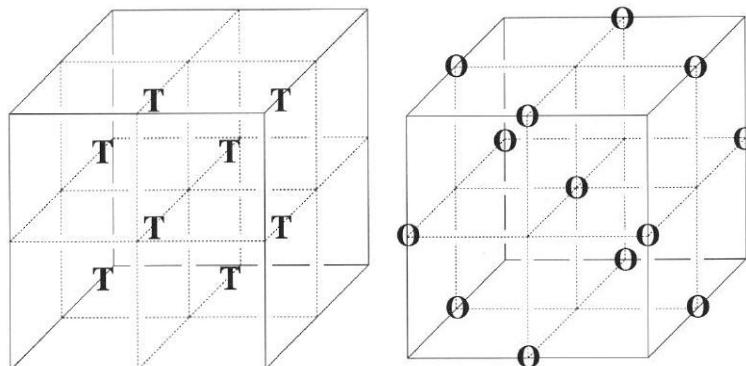
$$\text{AN : } a = 353 \text{ pm}$$

On en déduit le rayon atomique à l'aide de la condition de contact :

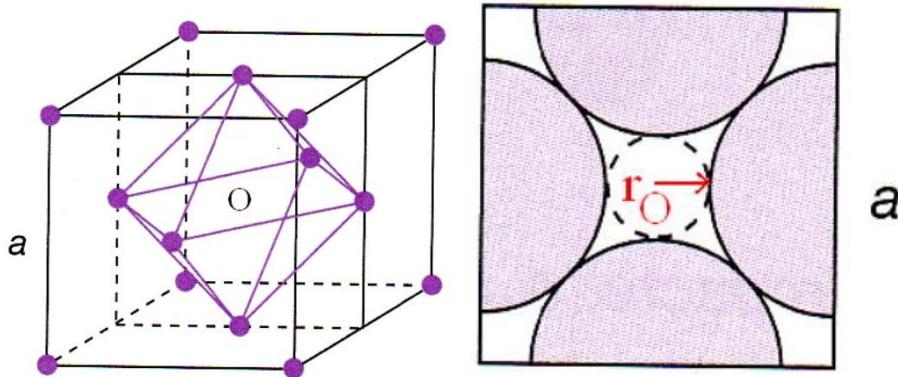
$$R(\text{Ni}) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{AN : } R(\text{Ni}) = 125 \text{ pm}$$

b) On représente les positions des sites tétraédriques et octaédriques :



On cherche la dimension d'un site octaédrique :



On obtient :

$$2r_O + 2R(\text{Ni}) = a \quad \text{soit} \quad r_O = \frac{a}{2} - R(\text{Ni})$$

AN : $r_O = 52 \text{ pm}$

Les atomes de fer sont plus gros que les sites octaédriques et tétraédriques, on en déduit qu'on ne peut pas former d'alliage d'insertion. Il s'agit donc d'alliages de substitution.

Q4. a) L'enthalpie libre standard de réaction s'écrit :

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ \quad \text{soit} \quad \alpha = \Delta_r H^\circ \text{ et } \beta = -\Delta_r S^\circ$$

On utilise la loi de Hess pour trouver $\Delta_r H^\circ$ en sachant que $\Delta_f H^\circ (\text{Ni}_{(s)}) = 0$:

$$\boxed{\alpha = \Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ (\text{Ni(CO)}_{4(\ell)}) - 4 \Delta_f H^\circ (\text{CO}_{(g)}) = -188 \text{ kJ.mol}^{-1}}$$

On utilise ensuite la définition de l'entropie standard de la réaction :

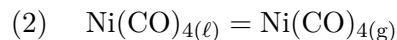
$$\Delta_r S^\circ = S_m^\circ (\text{Ni(CO)}_{4(\ell)}) - S_m^\circ (\text{Ni}_{(s)}) - 4 S_m^\circ (\text{CO}_{(g)}) = -502 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

d'où $\boxed{\beta = -502 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}}$

b) Pour un équation-bilan de changement d'état :

$$\boxed{\Delta_{\text{vap}} S^\circ = \frac{\Delta_{\text{vap}} H^\circ}{T_{\text{vap}}} = 95 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}}$$

c) On se place à la température T_{vap} où coexistent les trois équilibres suivants :



On remarque que $(3) = (1) + (2)$ et donc :

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_r H_1^\circ + \Delta_{\text{vap}} H^\circ = -158 \text{ kJ.mol}^{-1}$$

et

$$\Delta_r S^\circ = \Delta_r S_1^\circ + \Delta_{\text{vap}} S^\circ = -407 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

Ces valeurs sont calculées à T_{vap} mais elles sont valables pour $T > T_{\text{vap}}$ puisque dans l'approximation d'Ellingham, $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r G^\circ$ ne dépendent pas de la température. Comme $\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$, on en déduit que :

$$\alpha' = \Delta_r H^\circ = -158 \text{ kJ.mol}^{-1} < 0$$

la réaction est exothermique dans le sens direct $\xrightarrow{1}$ et

$$\beta' = -\Delta_r S^\circ = 407 \text{ J.K}^{-1} > 0$$

Le désordre diminue dans le sens direct puisqu'il y a moins de moles de gaz.

- d) On calcule les constantes d'équilibre à l'aide de la relation :

$$K^\circ(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ(T)}{RT}\right) \quad \text{soit} \quad K^\circ(T) = \exp\left(-\frac{\alpha' + \beta'T}{RT}\right)$$

AN : $K^\circ(50^\circ\text{C}) = 1,97 \times 10^4$ et $K^\circ(220^\circ\text{C}) = 3,00 \times 10^{-5}$

La réaction est très avancée dans le sens direct à 50°C ce qui justifie le choix de la température dans le premier réacteur. En revanche elle est très limitée dans le sens direct à 220°C . La constante d'équilibre de la réaction inverse vaut $1/K^\circ = 3,34 \times 10^4$, ce qui fait que c'est la réaction inverse qui est favorisée, d'où le choix de la température dans le second réacteur.

- e) Comme $\Delta_r H^\circ < 0$, la loi de Van't Hoff indique qu'une élévation de température diminue la constante d'équilibre et déplace donc celui-ci dans le sens indirect $\xleftarrow{2}$. On a donc pas intérêt à augmenter T dans le réacteur 1 mais c'est indiqué dans le réacteur 2

Si on augmente la pression de manière isotherme, d'après la loi de Le Châtelier, on déplace l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz, dans le sens direct $\xrightarrow{1}$. On a donc intérêt à travailler à haute pression dans le premier réacteur et à basse pression dans le second.

- f) La réaction étant exothermique, les fours s'échaufferaient si on n'utilisait pas d'eau de refroidissement. Il est important de rester à une température proche de T_{vap} pour avoir une réaction déplacée dans le sens direct.

Pour maintenir le réacteur isotherme, l'eau doit évacuer une quantité de chaleur égale à celle produite par la transformation d'une tonne de minerai de carbonyle :

$$Q = -n \Delta_r H^\circ \quad \text{soit} \quad Q = -\frac{m}{M(\text{Ni})} \Delta_r H^\circ$$

AN : $Q = 2,7 \times 10^9 \text{ J}$

- g) On applique la loi d'action des masses à l'équilibre chimique :

$$K^\circ = \frac{x_{\text{Ni}(\text{CO})_4}}{x_{\text{CO}}^4} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^3$$

en sachant que $x_{\text{CO}} = 1 - x_{\text{Ni}(\text{CO})_4}$. On obtient en notant $x = x_{\text{Ni}(\text{CO})_4}$:

$$K^\circ = \frac{x}{(1-x)^4} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^3$$

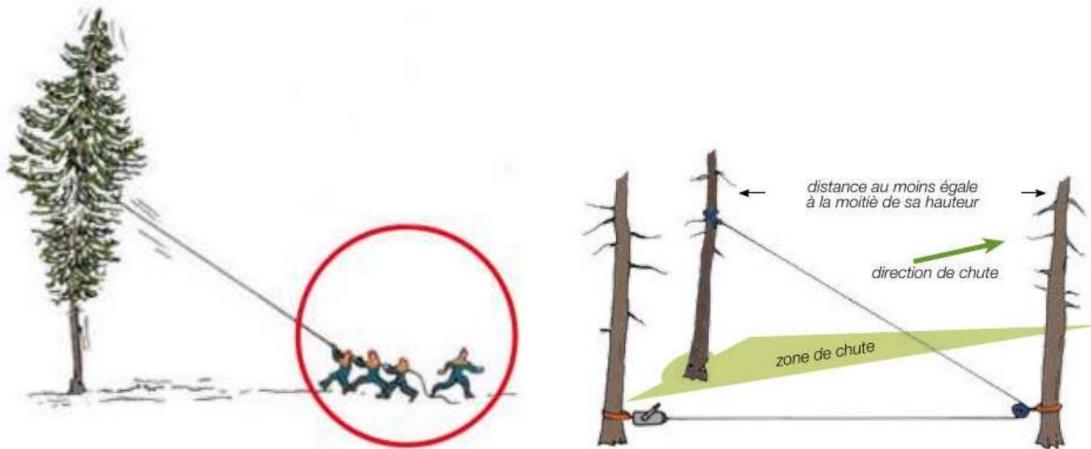
On calcule numériquement le quotient réactionnel avec $x = 0,66$: $Q_{r,\text{eq}} = 6,2 \times 10^{-3}$. On obtient un très bon accord avec la valeur de $K^\circ (160^\circ\text{C}) = 6,3 \times 10^{-3}$, ce qui valide $x = 0,66$ à l'équilibre.

On constate que la proportion de tétracarbonyle formé (66%) reste intéressante et l'intérêt est d'augmenter la vitesse de réaction (favorable pour la cinétique). La température de 160°C associée à une haute pression est un choix industriel judicieux pour extraire les impuretés du mineraï.

2 Chutes d'arbres. Mines Ponts PC 2019

A Chute d'un arbre mort

Les bûcherons utilisent des câbles pour tirer sur des arbres, et s'assurer qu'ils tombent du bon côté. Mais les bûcherons font preuve de bon sens. Les deux images ci-dessous, extraites d'un manuel de bûcheronnage, indique la situation dans laquelle les bûcherons ne doivent jamais se trouver, ainsi qu'une façon correcte d'agir pour faire tomber un arbre.



Les bûcherons ne se mettent jamais dans la zone de chute prévue. Ils utilisent une poulie accrochée à un autre arbre, et ils placent un treuil loin de la zone de chute prévue. Les bûcherons peuvent alors travailler en sécurité.

- Q1.** Le câble étant sans masse, la force exercée par celui-ci sur le bûcheron vaut $-\vec{F}$. À l'équilibre, la somme des forces qui s'exercent sur B est nulle :

$$-mg\hat{u}_z - \vec{F} + \vec{R}_2 = \vec{0}$$

En projection sur les deux axes :

$$\begin{cases} N_2 &= mg - F \sin \alpha \\ T_2 &= F \cos \alpha \end{cases}$$

D'après les lois de Coulomb, l'équilibre du bûcheron ne peut persister que si :

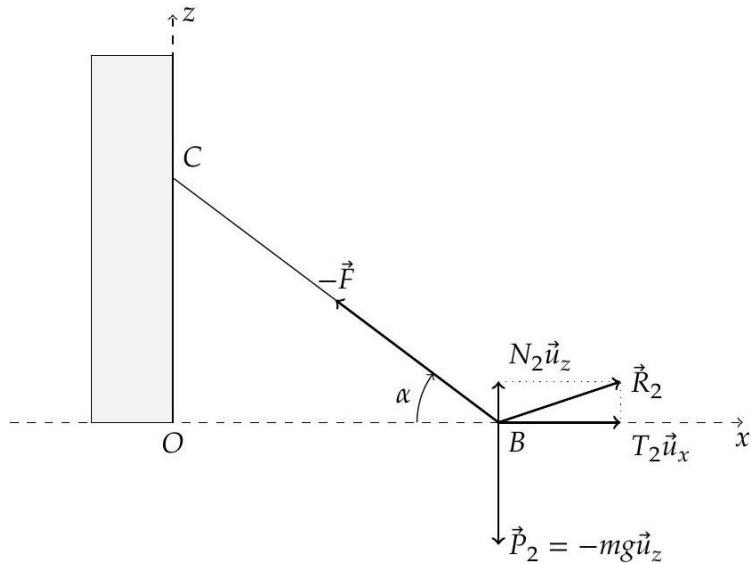
$$\frac{|T_2|}{|N_2|} < f \quad \text{d'où} \quad F \cos \alpha < f |mg - F \sin \alpha| = f (mg - F \sin \alpha)$$

puisque $mg > F$. On obtient donc :

$$F < \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha} = F_{\max}$$

d'où

$$F_{\max} = \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$



Q2. À l'équilibre, la somme des forces qui s'exercent sur l'arbre est nulle :

$$-Mg \hat{u}_z + \vec{F} + \vec{R}_1 = \vec{0}$$

En projection sur les deux axes :

$$\begin{cases} N_1 &= Mg + F \sin \alpha \\ T_1 &= -F \cos \alpha \end{cases}$$

L'équilibre de l'arbre ne peut persister que si :

$$\frac{|T_1|}{|N_1|} < f \quad \text{donc} \quad \frac{F \cos \alpha}{Mg + F \sin \alpha} < f$$

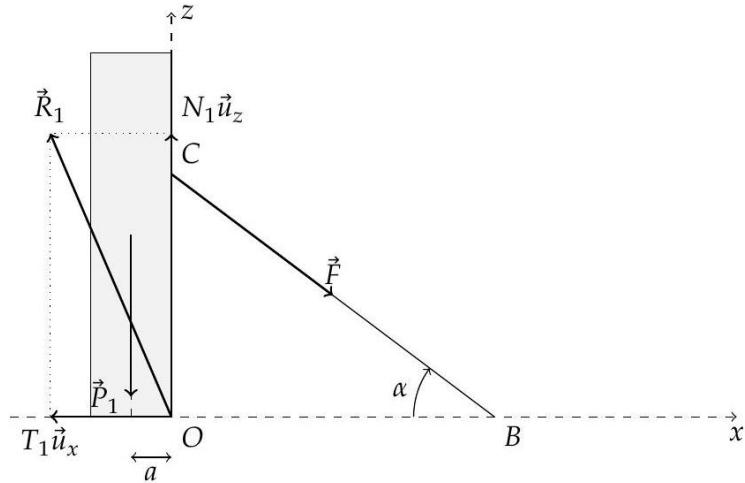
ce qui conduit à :

$$F (\cos \alpha - f \sin \alpha) < f Mg$$

et comme $\tan \alpha < \frac{1}{f}$ on en déduit que $0 < \cos \alpha - f \sin \alpha$, ce qui entraîne que :

$$F < \frac{f Mg}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = F'_{\max}$$

Comme $M > m$ et $\cos \alpha - f \sin \alpha < \cos \alpha + f \sin \alpha$, on en déduit que $F_{\max} < F'_{\max}$. Pour $F \leq F_{\max}$, l'arbre ne glisse pas.



Q3. Le poids de l'arbre est une force $M\vec{g}$ qui s'applique au centre de masse G de l'arbre :

$$\overrightarrow{M_O}(\text{poids}) = \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{g} = \left(-a \hat{u}_x + \frac{H}{2} \hat{u}_z \right) \wedge (-Mg) \hat{u}_z = -Mga \hat{u}_y$$

et donc :

$$\boxed{\Gamma_g = \hat{u}_y \cdot \overrightarrow{M_O}(\text{poids}) = -Mga}$$

Q4. Le moment en O de la réaction du sol est nul. La rotation de l'arbre commence si $\Gamma_B + \Gamma_g > 0$. Donc si $\Gamma_B > Mga$. La valeur minimale de Γ_B est donc Mga .

Q5. Le moment en O de la forces \vec{F} est :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F} = \ell \sin \alpha \hat{u}_z \wedge F (\cos \alpha \hat{u}_x - \sin \alpha \hat{u}_z) = F \ell \cos \alpha \sin \alpha \hat{u}_y$$

d'où

$$\boxed{\Gamma_B = F \ell \cos \alpha \sin \alpha = \frac{1}{2} F \ell \sin(2\alpha)}$$

Le moment Γ_B est maximal si $\boxed{\alpha = \alpha_m = \frac{\pi}{4}}$.

Q6. Dans la situation étudiée :

$$\begin{cases} \Gamma_B &= F \ell \cos \alpha \sin \alpha \\ F &= \frac{fmg}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \Gamma_B = \frac{\ell fmg \cos \alpha \sin \alpha}{\cos \alpha + f \sin \alpha}$$

On a donc

$$\Gamma_B = \frac{m g \ell}{\frac{1}{f \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}} = \frac{m g \ell}{\Phi(\alpha)} \quad \text{avec} \quad \Phi(\alpha) = \frac{1}{f \sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}$$

Si α_m désigne la valeur de α pour laquelle Γ_B est maximale, α_m est la valeur de α qui rend Φ minimale. Or :

$$\frac{d\Phi}{d\alpha} = -\frac{\cos \alpha}{f \sin^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

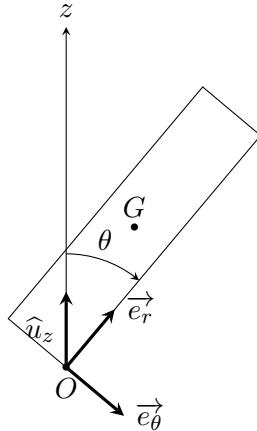
Cette dérivée s'annule si $\frac{\cos \alpha}{f \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$, donc si $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{f}}$. L'angle optimial est $\alpha_m = \arctan \frac{1}{\sqrt[3]{f}}$.

Si $f = 1$, l'angle optimal est $\alpha_m = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

Q7. La tension du câble est $F = 707$ N. La longueur de la corde est $\ell = 14$ m.

Le bûcheron est dans une situation dangereuse : il est à 10 m d'un arbre de 20 m de haut qui va tomber. Il est temps pour lui de faire une figure représentant la situation en faisant apparaître les différents paramètres, d'exprimer l'énergie potentielle de pesanteur E_p de l'arbre en fonction de M , g , H , a et θ . Il peut ainsi déterminer l'angle critique θ_s . Dès que l'arbre passe par l'angle critique θ_s , il peut lâcher le câble et courir très vite !

Q8. L'énergie potentielle de pesanteur de l'arbre est $E_p = Mgz_G$. Or (cf figure ci-dessous) :



$$z_G = \overrightarrow{OG} \cdot \hat{u}_z = \left(\frac{H}{2} \vec{e}_r - a \vec{e}_\theta \right) \cdot \hat{u}_z = \frac{H}{2} \cos(\theta) + a \sin(\theta)$$

et donc

$$E_p = Mg \left(\frac{H}{2} \cos(\theta) + a \sin(\theta) \right)$$

L'énergie potentielle passe par un maximum pour $\frac{dE_p}{d\theta} = 0$, ce qui conduit à $-\frac{H}{2} \sin(\theta) + a \cos(\theta) = 0$ et donc $\tan(\theta) = \frac{2a}{H}$ soit :

$$\theta = \theta_s = \arctan \left(\frac{2a}{H} \right)$$

Lorsque θ est supérieur à cette valeur, l'arbre tombe sur le bûcheron.

B Chute d'un arbre vivant

Q9. Un vent violent a une vitesse de l'ordre de 100 km/h ce qui fait $U \simeq 30$ m/s.

Q10. La force élémentaire $\delta \vec{F}_v$ qui s'exerce sur la tranche comprise entre z et $z + dz$ s'applique en M de coordonnées $(-2a, 0, z)$. Son moment élémentaire en O s'écrit :

$$\overrightarrow{\delta M_O} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\delta F} = (-2a \hat{u}_x + z \hat{u}_z) \wedge 2aC_x \rho_a U^2 dz \hat{u}_x = 2aC_x \rho_a U^2 z dz \hat{u}_y$$

Le moment résultant en O est la somme de ces moments élémentaires :

$$\overrightarrow{M_{O,v}} = \int_0^H 2aC_x \rho_a U^2 z dz \hat{u}_y = aC_x \rho_a U^2 H^2 \hat{u}_y$$

et donc :

$$\Gamma_v = \overrightarrow{M_{O,v}} \cdot \hat{u}_y = aC_x \rho_a U^2 H^2$$

Q11. On considère la formule : $\Gamma_r(\theta) = \Gamma_0 \left(\beta + 4 \frac{\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right)$. Alors $\begin{cases} \Gamma_r(0^+) = \beta \Gamma_0 \\ \Gamma_r(\theta_c) = \Gamma_0(\beta - 1) \end{cases}$

Or $\Gamma_r(0^+) = \Gamma_0$, donc $\beta = 1$. Dans ce cas $\Gamma_r(\theta_c) = 0$. On constate sur la courbe que le couple s'annule pour $\theta = 10^\circ$, donc $\theta_c = 10^\circ$

Avec $\Gamma_r(\theta) = \Gamma_0 \left(1 + 4 \frac{\theta}{\theta_c} - 5 \frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right)$ on obtient :

$$\frac{d\Gamma_r}{d\theta} = \Gamma_0 \left(\frac{4}{\theta_c} - \frac{10\theta}{\theta_c^2} \right)$$

Cette dérivée s'annule si $\theta = \frac{2}{5}\theta_c$. D'où $\boxed{\theta_m = \frac{2}{5}\theta_c = 4^\circ}$. De plus $\Gamma_m = \Gamma_r(\theta_m) = \Gamma_0 \left(1 + 4 \frac{2}{5} - 5 \frac{4}{25} \right)$, donc $\Gamma_m = \frac{9}{5}\Gamma_0$.

Finalement :

$$\boxed{\theta_m = \frac{2}{5}\theta_c \text{ et } \Gamma_m = \frac{9}{5}\Gamma_0}$$

Les données "expérimentales" permettent d'estimer $\theta_m = 4^\circ$ ce qui correspond à la valeur précédente et $\Gamma_m \simeq 1,7\Gamma_0$, ce qui diffère de 5% de la valeur précise.

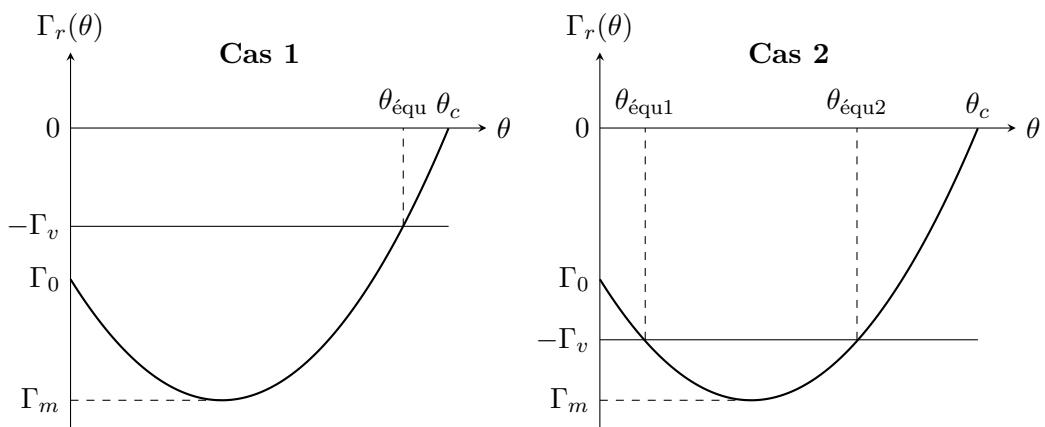
Q12. D'après le théorème scalaire du moment cinétique, si J est le moment d'inertie de l'arbre par rapport à l'axe Oy , alors :

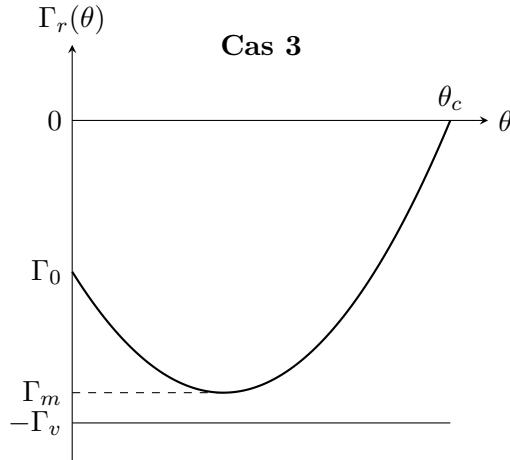
$$J\ddot{\theta} = \Gamma_r(\theta) + \Gamma_v$$

Les positions d'équilibre correspondent à $\forall t, \ddot{\theta} = 0$ et sont donc les racines de l'équation $\Gamma_r(\theta) + \Gamma_v = 0$.

Comme $\Gamma_r(0) = 0$, $\theta = 0$ ne peut être une position d'équilibre que si $\Gamma_v = 0$ (pas de vent). Si on écarte légèrement l'arbre de cette position d'équilibre en faisant $\theta = \varepsilon > 0$, comme $\Gamma_r(\varepsilon) < 0$, le moment aura tendance à ramener l'arbre vers sa position d'équilibre $\theta = 0$: celle-ci est donc **stable**. Bien sûr, pour que cela fonctionne il ne faut pas un seul souffle de vent !

On étudie maintenant des positions d'équilibre possibles telles que $\theta_{\text{équ}} \neq 0$. Graphiquement, cela correspond aux abscisses des points situés à l'intersection de la courbe $\Gamma_r(\theta)$ et de la droite horizontale $-\Gamma_v < 0$. Plusieurs cas se présentent :





- **Cas 1** $\Gamma_0 < -\Gamma_v < 0$: 1 seule position d'équilibre.

Cela correspond à $\Gamma_v < -\Gamma_0 = |\Gamma_0|$ donc $p < 1$

- **Cas 2** $\Gamma_m < -\Gamma_v < \Gamma_0$: 2 positions d'équilibre

On rencontre cela lorsque $\Gamma_v > -\Gamma_0 = |\Gamma_0|$ et $\Gamma_v < -\Gamma_m = |\Gamma_m| = 1,7|\Gamma_0|$. Finalement, ce cas est réalisé lorsque $1 < p < 1,7$

- **Cas 3** $-\Gamma_v < \Gamma_m$: aucune position d'équilibre

Dans ce cas $\Gamma_v > -\Gamma_m = |\Gamma_m| = 1,7|\Gamma_0|$ donc $p > 1,7$

Étude de la stabilité

En l'absence d'énergie potentielle on peut étudier la stabilité d'une position d'équilibre en regardant l'équation différentielle des petits mouvements au voisinage de cette position d'équilibre. On pose : $\varepsilon = \theta - \theta_{\text{équ}}$ et on fait un développement limité de $\Gamma_r(\theta) + \Gamma_v$ au voisinage de $\theta_{\text{équ}}$.

$$\Gamma_r(\theta) + \Gamma_v = \underbrace{\Gamma_r(\theta_{\text{équ}}) + \Gamma_v}_{=0} + \frac{d\Gamma_r}{d\theta}(\theta_{\text{équ}})(\theta - \theta_{\text{équ}}) + \dots$$

Le TMC conduit à :

$$\ddot{\varepsilon} - \frac{1}{J} \frac{d\Gamma_r}{d\theta}(\theta_{\text{équ}}) \varepsilon = 0$$

Une position d'équilibre stable conduit à une équation d'oscillateur harmonique. Comme $J > 0$, cela implique que :

$\text{Equ Stable} \iff \frac{d\Gamma_r}{d\theta}(\theta_{\text{équ}}) < 0$

En conclusion :

Dans le cas 1, $\theta_{\text{équ}}$ est instable. Dans le cas 2, $\theta_{\text{équ}1}$ est stable mais $\theta_{\text{équ}2}$ est instable.

Cependant une rafale peut faire basculer l'arbre. D'autre part, le comportement des racines varie sûrement avec le temps.

Q13. Le théorème scalaire du moment cinétique s'écrit :

$$J\ddot{\theta} = \Gamma_r(\theta) + \Gamma_v = \Gamma_0 \left(1 + 4\frac{\theta}{\theta_c} - 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2} \right) - p\Gamma_0$$

d'où en multipliant par $\dot{\theta}$ et en posant $u = \theta/\theta_c$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{J\dot{\theta}^2}{2} \right) &= \Gamma_0 \theta_c (1 + 4u - 5u^2) \frac{du}{dt} - p\Gamma_0 \theta_c \frac{du}{dt} \\ &= \Gamma_0 \theta_c \frac{d}{dt} \left(u + 2u^2 - \frac{5}{3}u^3 - pu \right) \end{aligned}$$

Sachant que $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, cette équation s'intègre en :

$$\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \Gamma_0 \theta_c \left(u + 2u^2 - \frac{5}{3}u^3 - pu \right) = -\Gamma_0 \theta \left(p - 1 - 2u + \frac{5}{3}u^2 \right)$$

et donc :

$$P(u) = p - 1 - 2u + \frac{5}{3}u^2$$

L'arbre pourra être déraciné si $\dot{\theta}$ ne s'annule jamais dans l'intervalle $0 < \theta \leq \theta_c$, ce qui signifie que le polynôme $P(u)$ ne doit pas s'annuler dans l'intervalle $0 < u \leq 1$.

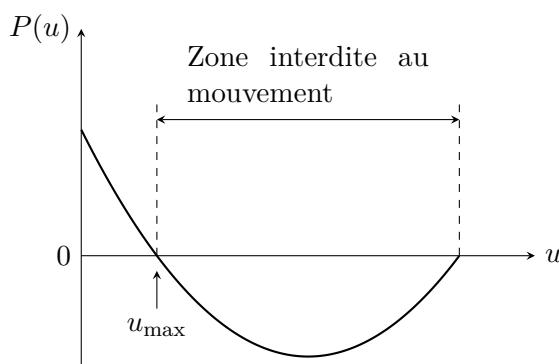
Or $P(u)$ est minimal lorsque $P'(u) = 0$, c'est à dire pour $u = u_m = 3/5$. Pour cette valeur on calcule $P(3/5) = p - 1 - \frac{3}{5}$. Si on veut que $P(u)$ reste strictement positif, il est nécessaire que :

$$p > 1 + \frac{3}{5} = 1,6 \quad \text{d'où} \quad p_c = 1,6$$

Pour cette valeur on a :

$$\Gamma_v = aC_x \rho_a U^2 H^2 = p_c |\Gamma_0| \quad \text{d'où} \quad U = \sqrt{\frac{p_c |\Gamma_0|}{aC_x \rho_a H^2}} = 12,7 \text{ m.s}^{-1} = 46 \text{ km.h}^{-1}$$

Q14. On a dans cette question $p < p_c$: l'arbre ne sera donc pas déraciné. Le graphe de $P(u) = \frac{1}{3} - 2u + \frac{5}{3}u^2$ est donné ci-dessous :



Comme $\dot{\theta}^2 \geq 0$ le mouvement ne peut se faire que dans la zone où $P(u) \geq 0$, ce qui correspond à $0 < u < u_{\max}$ où u_{\max} est la racine de $P(u)$ qui est strictement inférieure à 1.

Le discriminant vaut $\Delta = \frac{16}{9}$. Il y a donc deux racines positives :

$$u_{\pm} = \frac{2 \pm 4/3}{2 \times 5/3} = \frac{6 \pm 4}{10}$$

On a donc $u_{\max} = \frac{1}{5}$, ce qui correspond à $\theta_{\max} = 2^\circ$. Ce sont donc de très petits mouvements. En pratique les mouvements finissent par s'amortir en raison des effets dissipatifs comme les frottements.