ÉLECTROSTATIQUE

Table des matières

I. Champ électrostatique

1) Domaine de l'électrostatique

L'électrostatique étudie les propriétés électromagnétiques de distributions de charges électriques qui sont *macroscopiquement immobiles dans le repère d'étude* (R). Cela signifie que la densité de courant électrique $\vec{j}(M,t)$ est nulle en tout point $M \in \mathscr{E}$ et à tout instant t :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \vec{j}(M,t) = \overrightarrow{0}}$$

Par la suite on appellera *distribution de charge statique* un couple $(\rho, \overrightarrow{0})$ où ρ est une densité volumique de charges stationnaire définie sur $\mathscr{E}$ telle que $\rho : M \in \mathscr{E} \longmapsto \rho(M)$. Le domaine chargé associé à cette distribution est l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$, défini par :

$$\mathscr{D}_c = \{\, M \in \mathscr{E} \mid \rho(M) \neq 0 \,\}$$

2) Définition d'un champ électrostatique

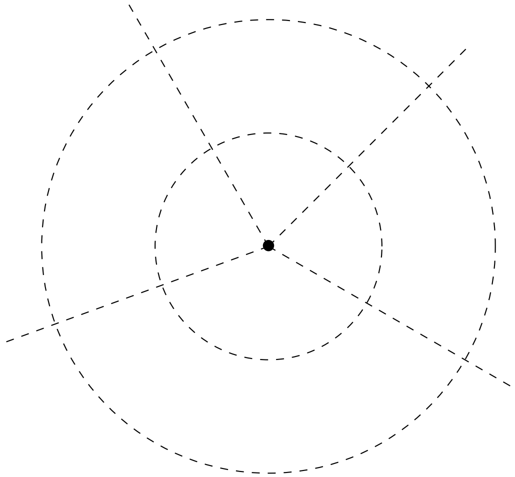
Considérons une distribution de charge statique de domaine chargé $\mathscr{D}_c$ et une charge ponctuelle q_T, appelée **charge ponctuelle test** placée en un point M.

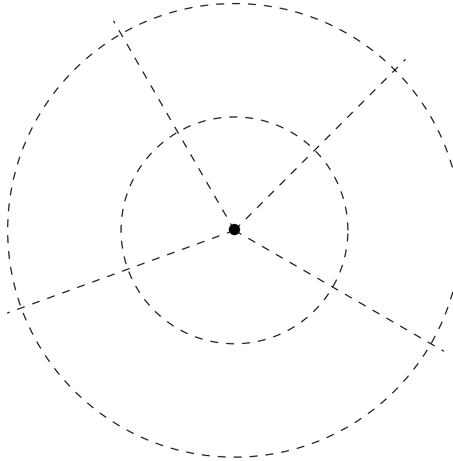
. On constate expérimentalement que $\mathscr{D}_c$ exerce sur q_T une force $\overrightarrow{F_{\text{él}}}$, appelée force électrique, ayant les deux propriétés suivantes :

- .
-

Exemple : champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

.





II. Circulation d'un champ vectoriel

1) Circulation d'un champ vectoriel

Définition (Circulation)

Soit $\vec{a}(M,t)$ un champ vectoriel défini en tout point $M \in \mathscr{E}$ et à chaque instant t. Soit une courbe $\mathscr{C}$ **fixe** dans (R) reliant deux points A et B. On appelle *circulation* de $\vec{a}$ le long de $\mathscr{C}$ l'intégrale curviligne :

$$\Gamma_{\mathscr{C}}(\vec{a}, A \to B, t) = \int_{A,\mathscr{C}}^{B} \vec{a}(M,t).\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}_M$$

Remarques :

- L'intégrale se calcule à t constant. On parle de la circulation à l'instant t.
- Dans le cas d'un champ vectoriel stationnaire $\vec{a}(M)$ la circulation ne dépend plus du temps et on a :

$$\Gamma_{\mathscr{C}}(\vec{a}, A \to B) = \int_{A,\mathscr{C}}^{B} \vec{a}(M).\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}_M$$

Propriété :

$$\boxed{\Gamma_{\mathscr{C}}(\vec{a}, B \to A, t) = -\,\Gamma_{\mathscr{C}}(\vec{a}, A \to B, t)}$$

Cas particulier d'une courbe fermée.

Si $\mathscr{C}_F$ est une courbe fermée *il est nécessaire de l'orienter* pour fixer le sens du vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}_M$.

2) Champ vectoriel à circulation conservative

Définition (Champ vectoriel à circulation conservative)

Soit $\vec{a}(M,t)$ un champ vectoriel défini en tout point $M \in \mathscr{E}$ et à chaque instant t. On dit que $\vec{a}$ est à *circulation conservative* si et seulement si, **pour toute courbe fermée orientée $\mathscr{C}_F$ fixe** dans (R) et pour tout t, on a :

$$\Gamma_{\mathscr{C}_F}(\vec{a}, t) = \oint_{\mathscr{C}_F} \vec{a}(M,t).\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}_M = 0$$

Conséquence :

- Si $\vec{a}$ est un champ vectoriel à circulation conservative, alors **pour tout couple de points** A et B et pour tout t on a :

$$\Gamma_{\mathscr{C}}(\vec{a}, A \to B, t) \text{ indépendante de } \mathscr{C}$$

Autrement dit, la circulation de $\vec{a}$ entre deux points quelconques A et B ne dépend pas de la courbe $\mathscr{C}$ qui relie ces deux points (on dit aussi que la circulation ne dépend pas du chemin suivi pour aller de A à B).

- Réciproquement : si pour tout couple de points A et B et pour tout t, la circulation $\Gamma_{\mathscr{C}}(\vec{a}, A \to B, t)$ ne dépend pas de la courbe $\mathscr{C}$ reliant A et B, alors $\vec{a}$ est à circulation conservative.

.

3) Potentiel scalaire associé à un champ vectoriel à circulation conservative

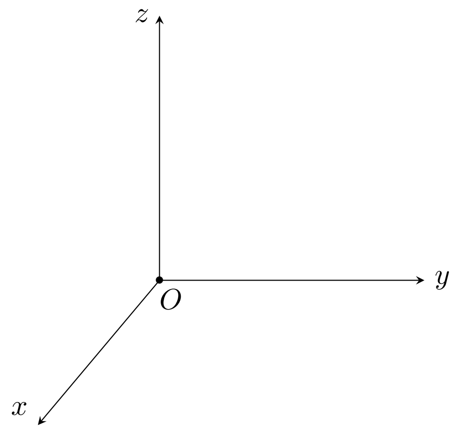
Considérons un champ vectoriel $\vec{a}$ à circulation conservative. On va reprendre la même démarche que pour une force conservative en mécanique à laquelle on a associé une énergie potentielle.

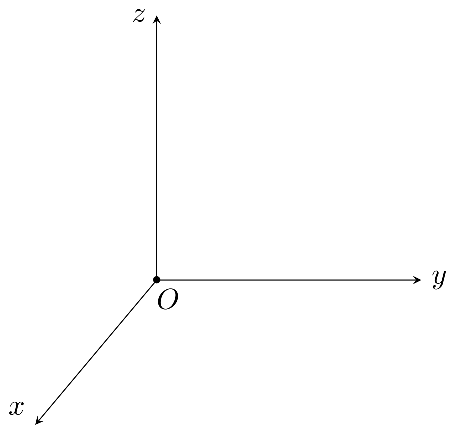
De la même façon, on va voir qu'il est possible d'associer à $\vec{a}$ un champ scalaire $f(M,t)$, appelé *potentiel scalaire associé à $\vec{a}$* et que l'on définit de la façon suivante :

On choisit un point Ω **quelconque mais fixé** et on pose :

$$\boxed{f_\Omega(M,t) = -\Gamma_{\mathscr{C}}(\vec{a}, \Omega \to M, t) = -\int_{A,\mathscr{C}}^{B} \vec{a}(N,t).\overrightarrow{d\ell}_N}$$

où la circulation est calculée le long d'une courbe quelconque $\mathscr{C}$ reliant Ω et M : le résultat ne dépend pas du choix de $\mathscr{C}$. Il ne dépend que de M et du temps t (et bien sûr du choix de Ω).





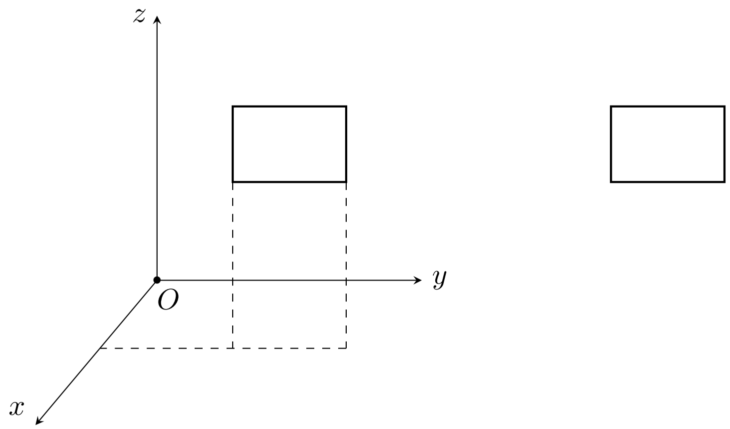
On remarque que :

$$\boxed{\forall\, t,\ \ f_\Omega(\Omega,t) = 0}$$

On dit que f_Ω est le potentiel scalaire associé à $\vec{a}$ *avec origine en* Ω.

Propriétés :

.



Réciproquement, soit $\vec{a}$ un champ vectoriel pouvant s'écrire sous la forme $\vec{a}(M,t) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, f(M,t)$ en tout point $M \in \mathscr{E}$ et à chaque instant t, $f(M,t)$ étant un champ scalaire. Alors pour toute courbe fermée orientée $\mathscr{C}_F$ on a :

En conclusion on retiendra que :

4) Rotationnel d'un champ vectoriel

Introduction du rotationnel

On considère un champ vectoriel $\vec{a}(M,t)$ à circulation conservative et on étudie la situation suivante :

Définition (Rotationnel en coordonnées cartésiennes)

Soit $\vec{a}(M,t)$ un champ vectoriel **à circulation conservative ou non** dont l'expression en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\vec{a}(M,t) = a_x(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x} + a_y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y} + a_z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

Le *rotationnel* de $\vec{a}$, noté $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$ est un champ vectoriel défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Remarques :

Théorème

Si $\vec{a}$ est un champ vectoriel à circulation conservative, alors $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}(M,t) = \vec{0}$ en tout point $M \in \mathscr{E}$ et pour tout t.

5) Théorème de Stokes

Le lien entre la circulation d'un champ vectoriel $\vec{a}$ et son rotationnel est donné par le théorème de Stokes. La situation géométrique est la suivante :

Théorème de Stokes

Soit $\vec{a}$ un champ vectoriel **à circulation conservative ou non**, $\mathscr{C}_F$ une courbe fermée orientée et S une surface **quelconque** s'appuyant sur $\mathscr{C}_F$, orientée par la règle de la main droite. Alors :

$$\Gamma_{\mathscr{C}_F}(\vec{a},t) = \Phi\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}/S\right)$$

c'est à dire, de façon plus explicite :

$$\oint_{\mathscr{C}_F} \vec{a}(M,t).\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}_M = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}(N,t).\overrightarrow{\mathrm{d}S}_N$$

Remarque :

Dans le théorème de Stokes la surface S est **absolument quelconque** pourvu qu'elle s'appuie sur $\mathscr{C}_F$. Un point remarquable à noter est donc que si S_1 et S_2 sont deux surfaces qui s'appuient sur la même courbe fermée $\mathscr{C}_F$, alors :

$$\boxed{\Gamma_{\mathscr{C}_F}(\vec{a},t) = \Phi\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}/S_1\right) = \Phi\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}/S_2\right)}$$

Dans la pratique on a souvent des *courbes fermées planes* et on applique le théorème de Stokes de la façon suivante :

6) Caractérisation d'un champ à circulation conservative

III. Équations de Maxwell de l'électrostatique

Les équations de Maxwell sont les postulats de l'électromagnétisme. Elles ont été énoncées pour la première fois par James Maxwell en 1864 pour synthétiser (résumer) ***tous les résultats théoriques et expérimentaux de l'électromagnétisme*** *accumulés de façon disparate par les physiciens depuis le XVIII*$^{\text{ème}}$ *siècle. Il y a quatre équations de Maxwell et le point remarquable est qu'elles sont suffisantes pour retrouver* ***toutes*** *les lois de l'électromagnétisme.*

On en donne ici la version dans le cadre de l'électrostatique : seules deux équations suffisent pour le moment ; les deux autres équations seront données plus tard, lors de l'étude des champs magnétiques.

1) Énoncé

Considérons une distribution de charge statique $(\rho, \overrightarrow{0})$, caractérisée par une densité volumique de charges *stationnaire* ρ définie en tout point $M \in \mathscr{E}$. Soit $\mathscr{D}_c$ le domaine chargé associé.

Si $\overrightarrow{E}$ est le champ électrostatique créé par cette distribution, alors on a **pour tout point** $M \in \mathscr{E}$:

$$\boxed{\operatorname{div} \overrightarrow{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{E}(M) = \vec{0}}$$

2) Conséquence de l'équation de Maxwell-Faraday. Potentiel électrostatique

a) Le champ électrostatique est à circulation conservative

b) Potentiel électrostatique V

.

c) Interprétation physique de V

Soit q_T une **charge ponctuelle** placée dans le champ électrostatique créé par une distribution de charge statique :

3) Équation de Poisson

4) Théorème de Gauss

5) Théorème de superposition

Soient $(\rho_1, \overrightarrow{0})$ une distribution de charge statique créant un champ électrostatique $\overrightarrow{E_1}$ et $(\rho_2, \overrightarrow{0})$ une distribution de charges statique créant un champ électrostatique $\overrightarrow{E_2}$

On appelle *distribution de charge statique superposée* la distribution $(\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2, \overrightarrow{0})$ où α_1 et α_2 sont deux nombres réels.

Théorème de superposition

La distribution superposée crée le champ électrostatique $\overrightarrow{E} = \alpha_1 \overrightarrow{E_1} + \alpha_2 \overrightarrow{E_2}$ auquel on peut associer le potentiel électrostatique $V = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2$

La démonstration de ce théorème repose sur la linéarité des opérateurs div, $\overrightarrow{\text{rot}}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}$ et sur le théorème ci-dessous (qu'on admettra) :

Théorème

Si un champ vectoriel $\vec{a}(M,t)$ possède une divergence et un rotationnel nuls pour tout $M \in \mathscr{E}$ et pour tout t, alors ce champ vectoriel est nul en tout point $M \in \mathscr{E}$ et à chaque instant t :

$$\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \text{div}\,\vec{a}(M,t) = 0 \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{a}(M,t) = \overrightarrow{0}$$
$$\Longrightarrow \forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \vec{a}(M,t) = \overrightarrow{0}$$

IV. Symétries du champ électrostatique

1) Introduction aux symétries

Les définitions qui suivent sont valables pour pour tout type de champs scalaires ou vectoriels, stationnaires ou non. On les utilisera couramment en électromagnétisme. On suppose que les champs scalaires et vectoriels sont définis en tout point de l'espace $M \in \mathscr{E}$.

a) Plans de symétrie et d'antisymétrie

Définition 1

On dit qu'un champ scalaire $f(M,t)$ admet :

1. un plan de symétrie noté Π_{sym} si et seulement si :
$$\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ f(M',t) = f(M,t)$$
où M' est le point symétrique de M par rapport au plan Π_{sym}.
2. un plan de d'anti-symétrie noté Π_{antisym} si et seulement si :
$$\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ f(M',t) = -\, f(M,t)$$
où M' est le point symétrique de M par rapport au plan Π_{antisym}.

Définition 2

On dit qu'un champ vectoriel $\vec{a}(M,t)$ admet :

1. un plan de symétrie noté Π_{sym} si et seulement si :
$$\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \vec{a}(M',t) = \operatorname{sym}\vec{a}(M,t)$$
où M' est le point symétrique de M par rapport au plan Π_{sym} et où $\operatorname{sym}\vec{a}$ est le vecteur symétrique du vecteur $\vec{a}$ par rapport au plan Π_{sym}.
2. un plan de d'anti-symétrie noté Π_{antisym} si et seulement si :
$$\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \vec{a}(M',t) = -\operatorname{sym}\vec{a}(M,t)$$
où M' est le point symétrique de M par rapport au plan Π_{antisym} et où $\operatorname{sym}\vec{a}$ est le vecteur symétrique du vecteur $\vec{a}$ par rapport au plan Π_{antisym}.

Cas particulier très courant :

b) Invariance par translation

Définition

Le point M étant repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z), on dit qu'un :

- champ scalaire $f(M,t) = f(x,y,z,t)$ est *invariant par translation le long de l'axe Ox* si et seulement si f ne dépend pas de la coordonnée x.
- champ vectoriel $\vec{a}(M,t) = \vec{a}(x,y,z,t)$ est invariant par translation le long de l'axe Ox si et seulement si $\vec{a}$ ne dépend pas de la coordonnée x.

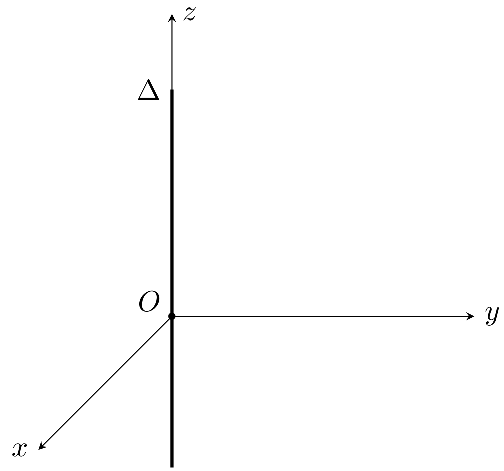
Exemple :

Un champ des températures invariant par translation le long de Ox : $T(M,t) = T(y,z,t)$ mais ne dépend pas de x.

Remarques :

c) Invariance par rotation autour d'un axe

Soit Δ un axe. On décide de le prendre comme axe Oz des coordonnées et on repère les points $M \in \mathscr{E}$ par leurs coordonnées cylindriques (r, θ, z).



On exprime ensuite f et $\vec{a}$ dans le système des coordonnées cylindriques :

$$f(M,t) = f(r,\theta,z,t)$$

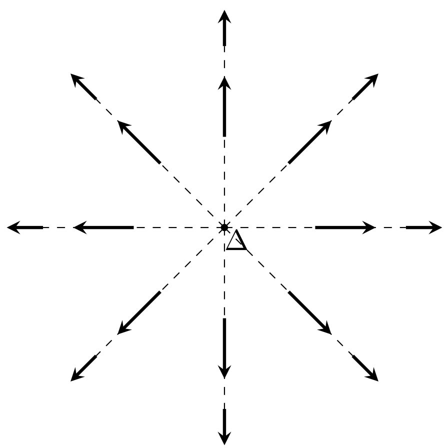
et

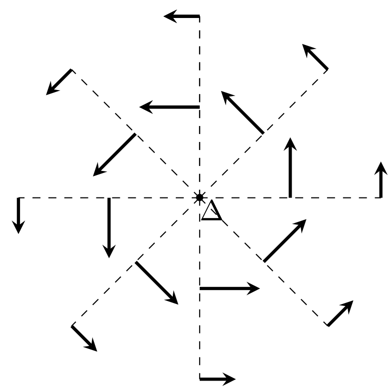
$$\vec{a}(M,t) = a_r(r,\theta,z,t)\,\overrightarrow{e_r} + a_\theta(r,\theta,z,t)\,\overrightarrow{e_\theta} + a_z(r,\theta,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

Définition. Invariance par rotation.

On dit que :

- le champ scalaire $f(M,t) = f(r,\theta,z,t)$ est *invariant par rotation autour de l'axe* $\Delta = Oz$ si et seulement si f ne dépend pas de l'angle θ.
- le champ vectoriel $\vec{a}(M,t)$ est invariant par rotation autour de l'axe $\Delta = Oz$ si et seulement si **aucune de ses composantes cylindriques** a_r, a_θ et a_z ne dépend de l'angle θ.





2) Symétries du champ électrostatique

On se base sur le principe de Curie :

Principe de Curie :

Lorsque certaines causes produisent certains effets, alors les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Pour notre cas :

Cause	Effet produit

On en déduit :

symétries de $\overrightarrow{E}$

Soit une distribution de charge statique $(\rho, \vec{0})$ caractérisée par une densité volumique de charge $\rho(M)$. Alors :

1. Tout plan de symétrie (resp. plan d'antisymétrie) de ρ (cause) est un plan de symétrie (resp. plan d'antisymétrie) de la force électrique $\overrightarrow{F_{\text{él}}}(M)$ exercée sur une charge ponctuelle test q_T (effet produit) et donc du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M) = \overrightarrow{F_{\text{él}}}(M)/q_T$ créé.
2. Si ρ est invariante par translation (le long de Oz par exemple), alors $\overrightarrow{F_{\text{él}}}(M)$ donc $\overrightarrow{E}(M)$ est invariant par translation.
3. Si ρ est invariante par rotation autour d'un axe $\Delta = Oz$ alors $\overrightarrow{F_{\text{él}}}(M)$ donc $\overrightarrow{E}(M)$ est aussi invariant par rotation autour de Δ.

V. Calculs classiques de champ et potentiels électrostatiques

Il est possible de calculer des champ et potentiel électrostatique plus intéressants que ceux créés par des charges ponctuelles qui étaient notre seul exemple jusqu'à présent. La seul contrainte est qu'il y ait beaucoup de symétries.

À faire sur feuille.

1) Champ créé par une boule uniformément chargée

2) Champ créé par un cylindre infini uniformément chargé

3) Champ créé par un plan infini uniformément chargé

4) Relation de passage

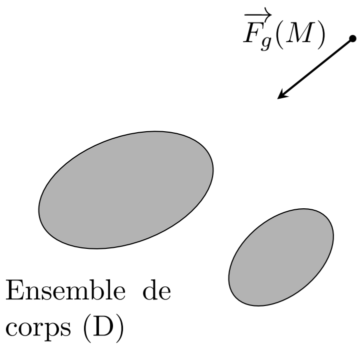
5) Application au condensateur plan

VI. Théorie du champ gravitationnel

1) Définition : champ de gravitation

La théorie du champ électrostatique et du potentiel électrostatique est complètement transposable au champ de gravitation.

Un ensemble de corps (D) exerce sur une masse ponctuelle m (masse de dimension suffisamment petite pour être assimilée à un point) placée en un point M une force gravitationnelle attractive $\overrightarrow{F_g}(M)$.



On constate de façon expérimentale que $\overrightarrow{F_g}(M)$ est proportionnelle à la masse m qui est placée en M, ce qui amène à écrire :

$$\boxed{\overrightarrow{F_g}(M) = m\,\overrightarrow{\mathcal{G}}(M)}$$

Ce champ vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M)$ est par définition le *champ de gravitation* créé au point M par l'ensemble des corps (D).

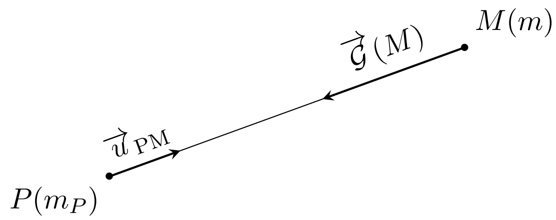
La dimension d'un champ de gravitation est donc : $[\mathcal{G}]$ = N.kg^{-1} = m.s^{-2}.

Exemple : Champ de gravitation créé par une masse ponctuelle

Dans le cas particulier où l'ensemble des corps (D) est réduit à une seule masse ponctuelle m_P placée en un point P, la force gravitationnelle est donnée par la *loi de Newton*, analogue à la loi de Coulomb de l'électrostatique :

$$\boxed{\overrightarrow{F_g}(M) = -\,G\,\frac{m\,m_P}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}\,\overrightarrow{u}_{PM}}$$

où G est la constante de gravitation.



On a donc :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{G}}(M) = -\,G\frac{m_P}{\|\overrightarrow{PM}\|^2}\,\overrightarrow{u}_{PM} = -\,Gm_P\,\frac{\overrightarrow{PM}}{\|\overrightarrow{PM}\|^3}}$$

Ainsi, on passe du champ de gravitation au champ électrostatique par les changements suivants :

Électrostatique	**Gravitation**
Charge ponctuelle q_p	Masse ponctuelle m_P
Champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$	Champ de gravitation $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M)$
$\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$-\,G$

Tableau 1

Numériquement :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \text{ uSI} ; \varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12} \text{ F.m}^{-1} ;$$
$$G = 6{,}67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-1}$$

2) Équations locales du champ de gravitation

On commence par définir une distribution de masses caractérisée par une masse volumique μ (analogue de la charge volumique). On définit le domaine de masses $\mathscr{D}_m = \{ M \in \mathscr{E} \mid \mu(M) \neq 0 \}$.

Les équations locales vérifiées par le champ de gravitation sont analogues à celles de l'électrostatique. Pour tout $M \in \mathscr{E}$:

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\, \overrightarrow{\mathscr{G}}(M) = \overrightarrow{0} \quad \text{et} \quad \text{div}\, \overrightarrow{\mathscr{G}}(M) = -\,4\pi\, G\, \mu(M)}$$

$\overrightarrow{\mathscr{G}}(M)$ est à circulation conservative. Il existe donc un potentiel gravitationnel (non unique, défini à une constante près) $\Phi_g(M)$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{G}}(M) = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\, \Phi_g}$$

La dimension de Φ_g est celle de $[\mathcal{G}]\times$ m $=$ N.kg^{-1}.m $=$ m^2.s^{-2}.

En général, on prend $\Phi_g = 0$ à l'infini lorsque la distribution de masse $\mathscr{D}_\text{m}$ est d'extension finie.

$\Phi_g(M)$ est aussi continu vis à vis des coordonnées d'espace (car il est dérivable).

Tout comme pour le potentiel électrostatique, le potentiel gravitationnel est lié à l'énergie potentielle d'une masse ponctuelle m placée dans le champ de gravitation $\overrightarrow{\mathscr{G}}$:

$$\boxed{E_P^{\text{gravit}}(M) = m\, \Phi_g(M)}$$

Ainsi, le potentiel gravitationnel peut être défini comme étant l'énergie potentielle de gravitation d'une masse ponctuelle $m = 1$ kg plongée dans un champ de gravitation $\overrightarrow{\mathscr{G}}$.

Les expressions de $\Phi_g(M)$ peuvent se déduire de celles du potentiel électrostatique $V(M)$ au moyen des transformations du tableau 1.

Exemple : masse ponctuelle m_P placée en P :

$$\boxed{\Phi_g(M) = -\,G \frac{m_P}{\|\overrightarrow{PM}\|}}$$

3) Équation de Poisson pour Φ_g

De $\text{div}\, \overrightarrow{\mathscr{G}}(M) = -\,4\pi\, G\, \mu(M)$ et $\overrightarrow{\mathscr{G}}(M) = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\, \Phi_g(M)$, on déduit que le potentiel gravitationnel vérifie une équation de Poisson :

$$\boxed{\Delta\Phi_g(M) = 4\pi\, G\, \mu(M)}$$

4) Théorème de Gauss gravitationnel

On le déduit de $\text{div}\, \overrightarrow{\mathscr{G}}(M) = -\,4\pi\, G\, \mu(M)$ en utilisant le théorème d'Ostrogradski. On aboutit à :

$$\boxed{\text{Pour toute surface fermée } S_F, \ \ \Phi_{\text{sortant}}(\overrightarrow{\mathscr{G}}/S_F) = -\,4\pi\, G\, M_{\text{int}}}$$

où M_{int} est la masse intérieure à S_F.

Le flux du champ gravitationnel sorant d'une surface fermée quelconque est égal à $-\,4\pi\, G$ fois la masse intérieure à cette surface.

Enfin, le champ de gravitation possède les mêmes types symétries et d'invariances que le champ électrostatique.