1 Symétries

L'espace est rapporté à un repère $(Oxyz)$.

1) On considère quatre charges ponctuelles positives q placées sur les axes Ox et Oy, aux points $A(a,0)$, $B(-a,0)$, $C(0,a)$ et $D(0,-a)$. Le champ électrostatique par ces quatre charges en un point M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) s'écrit à priori :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_x(x,y,z)\,\overrightarrow{e_x} + E_y(x,y,z)\,\overrightarrow{e_y} + E_z(x,y,z)\,\overrightarrow{e_z}$$

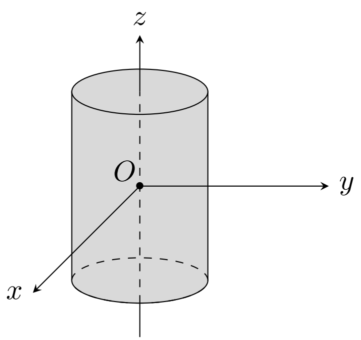
Montrer qu si $M \in Oz$ alors $\overrightarrow{E}(M) = E(z)\,\overrightarrow{e_z}$. Montrer que $E(z)$ est impaire.

2) Montrer que si $M \in (Oxy)$ alors $E_z = 0$

3) Justifier par une étude des symétries que $\overrightarrow{E}(O) = \vec{0}$.

2 Symétries

Une distribution de charge statique est caractérisée par une densité volumique de charges ρ uniforme en tout point du volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon R (cf schéma ci-dessous) et nulle partout ailleurs.



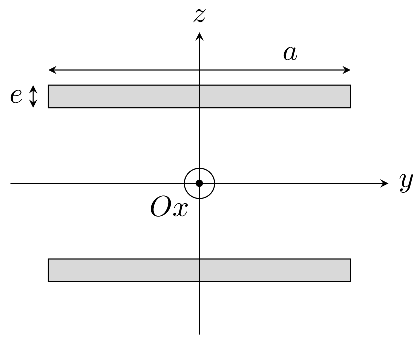
Un point M sera repéré par ses coordonnées cylindriques (r,θ,z). à priori, on écrit le champ électrostatique en M de la façon suivante :

$$\overrightarrow{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\,\overrightarrow{e_r} + E_\theta(r,\theta,z)\,\overrightarrow{e_\theta} + E_z(r,\theta,z)\,\overrightarrow{e_z}$$

1. Montrer que $E_\theta = 0$.
2. Montrer qu'aucune des composantes de $\overrightarrow{E}$ qui restent non nulles ne dépend de l'angle θ.
3. Montrer que, r étant fixé, E_r est une fonction impaire de z tandis que E_r est une fonction paire de z.
4. Montrer que si $M \in Oz$ alors $\overrightarrow{E}(M) = \vec{0}$

3 Symétries

Soient deux plaques carrées identiques, d'arête a et d'épasseur e, parallèles (l'une en face de l'autre) et disposées symétriquement par rapport au plan (Oxy) sont chargées uniformément dans leurs volumes respectifs avec des densités ρ_0 (plaque du dessous) et $-\rho_0$ (plaque du dessus).



1) À l'aide d'une étude des symétries, donner l'allure (direction et coordonnées dont il dépend) du champ électrostatique :

a) En tout point M de l'axe Oz.

b) En tout point M du plan (Oxy).

2) Soit $M(x, y, z)$ un point quelconque. Montrer que la composante $E_z(x, y, z)$ est une fonction paire de z et que les composantes $E_x(x, y, z)$ et $E_y(x, y, z)$ sont des fonctions impaires de z.

3) Montrer de même que $E_x(x, y, z)$ est une fonction impaire de x.

4 Champ créé par un fil

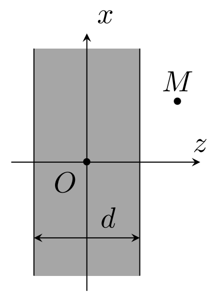
À l'aide du théorème de Gauss calculer le champ électrostatique créé en tout point M de l'espace par un fil rectiligne portant une densité linéique de charge λ uniforme. En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$ en convenant que $V = 0$ à la distance $r = R$ du fil.

5 Champ créé par une sphère

Une sphère de centre O et de rayon R porte une charge sur sa surface avec une densité surfacique σ uniforme. On pose $r = OM$. Déterminer grâce au théorème de Gauss le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créé par cette distribution en tout point interne ou externe à la sphère. Calculer le potentiel $V(M)$ associé tel que $V = 0$ lorsque $r \longrightarrow +\infty$.

6 Champ électrostatique créé par une tranche

1) Des charges sont uniformément réparties avec une densité volumique de charge $\rho > 0$ constante dans une tranche d'épaisseur d (limitée par les plans $z = -d/2$ et $z = d/2$ et supposée infinie dans les autres directions).



Montrer en utilisant les symétries que le champ électrostatique est nul sur le plan $z = 0$.

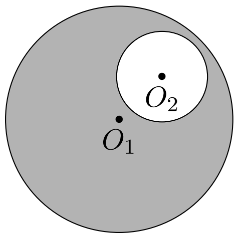
2) Préciser la direction et le sens du champ électrostatique en un point $M(x, y, z)$ tel que $z \neq 0$.

3) Déterminer le champ électrostatique en un point $M(x, y, z)$ à la distance $z > 0$ du centre de la tranche à l'aide du théorème de Gauss. Que peut-on dire du champ en son symétrique M' de cote $-z$?

4) Reprendre ce calcul en utilisant une équation locale de l'électrostatique.

7 Champ électrostatique dans une cavité

On considère une boule uniformément chargée de densité volumique de charge ρ, de centre O_1 et de rayon R_1, dans laquelle existe une cavité creuse de centre O_2 et de rayon R_2 telle que représentée sur la figure ci-dessous.



1) À l'aide du théorème de superposition montrer que le champ électrostatique dans la cavité est uniforme et donner son expression en fonction de ρ, ε_0 et du vecteur $\overrightarrow{O_1O_2}$.

2) Tracer les lignes du champ électrostatique dans la cavité.

8 Densité non uniforme

Un cylindre infini de rayon R possède une charge volumique $\rho(P)$ non uniforme mais à symétrie cylindrique. En tout point P de la distribution, de coordonnées (r_P, θ_P, z_P), on a :

$$\forall\, r_P \in [0, R],\ \ \rho(P) = \rho_0 \exp\left(-\frac{r_p}{R}\right)$$

À l'aide du théorème de Gauss, déterminer le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ à la distance r de l'axe Oz en distinguant les cas $r < R$ et $r > R$.

9 Distribution de charges entre deux sphères concentriques

On donne en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}(a(r)\,\overrightarrow{e_r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,a(r)\right)$$

On considère une charge totale q négative répartie dans le volume situé entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2. On appelle $\rho(r)$ la densité volumique de charges entre R_1 et R_2, supposée à symétrie sphérique. Le champ électrostatique se met sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(M) = k\,(r - R_1)\,\overrightarrow{e_r} \quad \text{pour} \quad R_1 \leqslant r \leqslant R_2$$

avec k constante.

1) Déterminer la densité volumique de charge $\rho(r)$ en fonction de k, r, R_1 et ε_0.

2) Déterminer k en fonction de q, ε_0, R_1 et R_2.

3) Déterminer le champ électrostatique en tout point de l'espace.

4) En déduire le potentiel électrostatique en tout point de l'espace. On posera $V(R_1) = 0$.

10 Calcul de densités de charges

On donne en coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}(a(r)\,\overrightarrow{e_r}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,a(r)\right)$$

Un champ électrostatique à symétrique sphérique $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\,\overrightarrow{e_r}$ a pour expression (r étant la distance au point O) :

$$E(r) = E_0 \text{ constante si } r < a \quad \text{et} \quad E(r) = 0 \text{ si } r > a$$

Ce champ est créé en partie par une distribution volumique de charges de densité ρ.

1) Déterminer ρ en tout point de l'espace.

2) Montrer qu'il existe nécessairement une densité surfacique de charge σ sur une surface à préciser et donner son expression.

11 Plasma

On donne en coordonnées sphériques : $\Delta\, a(r) = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}a(r)}{\mathrm{d}r}\right)$

On étudie un milieu électriquement neutre, constitué de cations portant une charge électrique e et d'électrons libres de charge $-e$, porté à une température T (plasma ; en général T est de l'ordre de plusieurs milliers de K). On place une petite boule (supposée ponctuelle) de charge électrique q dans ce plasma, en un point O considéré comme l'origine des coordonnées. Celle-ci modifie la répartition des ions et des électrons. Les densités particulaires (nombre de particules par unité de volume) à la distance r de O sont alors données par :

$$n_{\text{ions}} = n_0 \exp\left(-\frac{eV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad n_{\text{e}} = n_0 \exp\left(+\frac{eV(r)}{k_B T}\right)$$

où n_0 est une constante. Les expressions précédentes constituent la loi de Boltzmann, k_B étant la constante de Boltzmann et T la température du plasma. $V(r)$ est le potentiel électrostatique qui existe à la distance r de O (avec la convention $V = 0$ à l'infini).

1) Exprimer la densité volumique de charges $\rho(r)$ qui existe à la distance r de O en fonction de e, n_{ions} et n_e. En donner une expression approchée lorsque $eV(r) \ll k_B T$.

2) À l'aide d'une équation locale de l'électrostatique, établir une équation différentielle vérifiée par $V(r)$.

3) En posant $F(r) = rV(r)$, trouver l'équation différentielle satisfaite par F. En donner la solution générale et montrer que l'on peut introduire une longueur caractéristique L_D, appelée *longueur de Debye*, qui caractérise l'évolution spatiale de $V(r)$.

4) Déterminer les deux constantes intervenant dans la solution générale $V(r)$ et donner l'expression de ce potentiel en fonction de q, ε_0, r et L_D.