

Les bouées houlographes Waverider

Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de Waverider. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle. Le fonctionnement du Waverider repose sur une ingénieuse combinaison de principes physiques que ce problème aborde au travers de modèles simples.

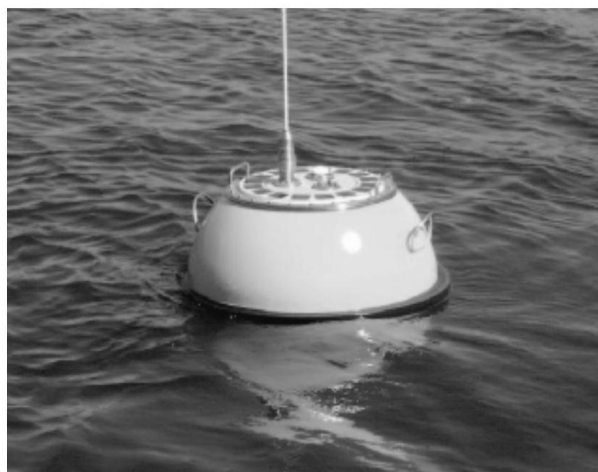


FIGURE 1 – Photographies d'une bouée houlographe Waverider

Donnée numérique

Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

1 La plateforme stabilisatrice

Le Waverider est muni d'un accéléromètre uniaxe qui mesure la projection de l'accélération \vec{a}_W de la bouée sur une direction particulière \vec{u}_z . Cette direction est liée à l'accéléromètre : si celui-ci se réoriente dans l'espace, le vecteur \vec{u}_z se modifie généralement et l'accéléromètre mesure la projection de \vec{a}_W sur une nouvelle direction.

Cependant, afin d'accéder à la hauteur des vagues, ce sont les accélérations verticales qu'il convient de mesurer et il est donc impératif que la direction sensible de l'accéléromètre, définie par le vecteur \vec{u}_z , demeure en permanence colinéaire à l'accélération de la pesanteur \vec{g} .

Il s'agit d'une véritable gageure, car l'accéléromètre est embarqué dans une bouée sujette à des mouvements complexes provoqués par les vagues. Pour maintenir fixe l'orientation de l'accéléromètre malgré ces mouvements perturbateurs, celui-ci est placé sur une plateforme stabilisatrice pendulaire. Ce dispositif, protégé par des brevets, est au cœur de la technologie Waverider.

La figure 2 montre une photographie et donne une description sommaire de la plateforme stabilisatrice.

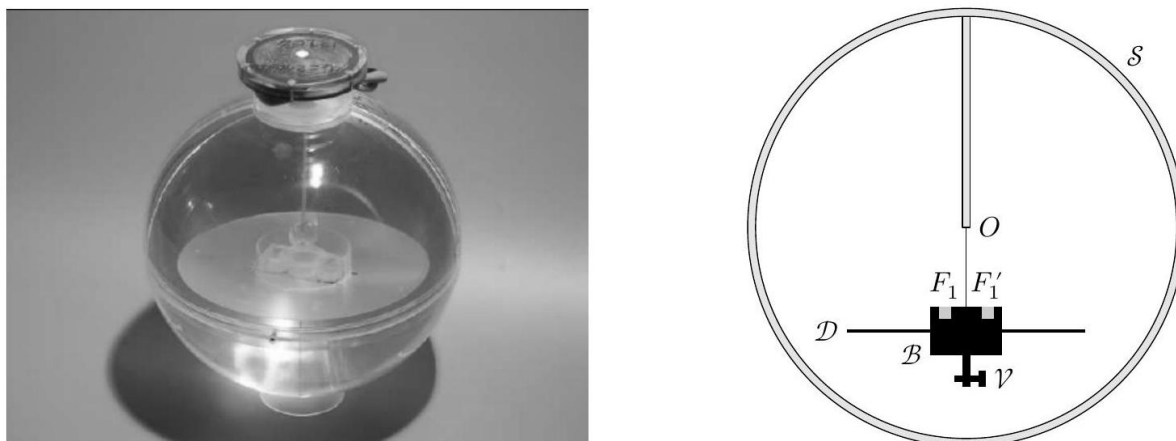


FIGURE 2 – Plateforme stabilisatrice

La plateforme stabilisatrice est enfermée dans une sphère transparente \mathcal{S} (figure 2), elle-même placée dans la bouée. Attention à ne pas confondre la sphère \mathcal{S} et la coque de la bouée qui est, elle aussi, grossièrement sphérique.

L'accéléromètre (non représenté) est solidaire d'un bloc en plastique \mathcal{B} prolongé vers le bas par une tige du même matériau, elle-même traversée par une vis en métal \mathcal{V} que l'on peut enfoncer plus ou moins pour la déplacer de droite à gauche. Dans sa partie supérieure, le bloc est évidé sur deux régions F_1 et F'_1 et les cavités sont comblées avec un matériau moins dense.

L'ensemble est fixé sur un disque \mathcal{D} constituant la plateforme proprement dite, puis suspendu par un fil très fin au centre O de la sphère \mathcal{S} , lui-même lié rigidement à la paroi sphérique par une tige. La sphère est enfin remplie d'un liquide judicieusement choisi.

A - Flottabilité

Le principe d'Archimède, dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T supposé galiléen, peut s'exprimer ainsi.

Soit un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur. Un corps immergé dans ce fluide subit de sa part des forces de pression dont la somme est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé (poussée d'Archimède). Cette poussée s'applique au centre de masse du fluide déplacé.

- Q1.** On considère un solide homogène de masse volumique ρ et de volume V entièrement immergé dans un liquide de masse volumique ρ_ℓ en équilibre dans le champ de pesanteur. Par une analyse des forces qu'il subit, discuter la propension de ce solide à remonter vers la surface pour y flotter ou, au contraire, à couler vers le fond.

Dans le cas où on se place dans un référentiel \mathcal{R} en translation rectiligne accélérée d'accélération \vec{a}_e par rapport à \mathcal{R}_T , on définit le *poids effectif* d'un objet de masse m par $\vec{P}_{\text{eff}} = m(\vec{g} - \vec{a}_e)$.

Dans le cas d'un fluide en équilibre dans \mathcal{R} , le principe d'Archimède doit être modifié en remplaçant "... poids du fluide déplacé..." par "... poids effectif du fluide déplacé ..."

B - Horizontalité statique de la plateforme

Les éléments F_1, F'_1 et \mathcal{V} ont pour rôle d'assurer l'horizontalité statique de la plateforme. Pour comprendre le principe du dispositif, on considère un système modèle Σ constitué de trois parties (figure 3) :

- un solide homogène S_0 de volume V_0 , de centre de masse G_0 , formé d'un matériau de masse volumique ρ_0 , modélisant le bloc en plastique et le disque \mathcal{D} ;
- un solide homogène S_1 de volume V_1 , de centre de masse G_1 et de masse volumique $\rho_1 < \rho_0$, modélisant F_1 et F'_1 ;
- un solide homogène S_2 de volume V_2 , de centre de masse G_2 et de masse volumique $\rho_2 > \rho_0$, modélisant la vis \mathcal{V} et les parties métalliques de l'accéléromètre.

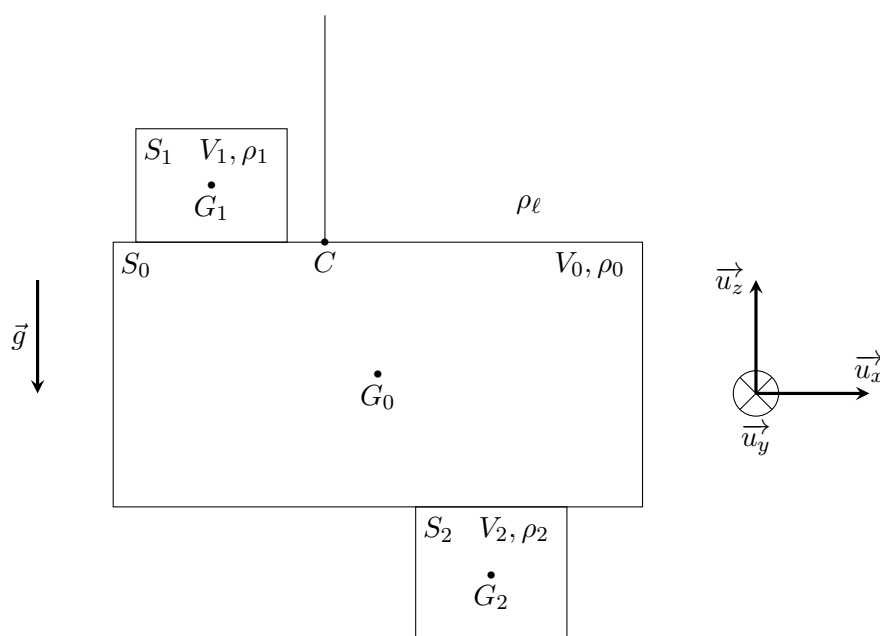


FIGURE 3 – Modélisation de la plateforme par un système Σ en trois parties

L'ensemble est suspendu par un fil fixé en C et immergé dans le liquide, choisi de telle manière que sa masse volumique ρ_ℓ soit proche de ρ_0 . Dans cette sous-partie seulement, nous prendrons $\rho_\ell = \rho_0$ pour simplifier, bien qu'un léger écart existe entre ces deux valeurs.

On se limite à une description bidimensionnelle dans le plan de la figure 3 et on envisage une possible inclinaison du système Σ par rotation autour de l'axe (C, \vec{u}_y) , le fil restant toujours vertical (il ne touche le solide S_0 qu'en C).

On note $\vec{\Pi}_0$ (respectivement $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_2$) la poussée d'Archimède appliquée en G_0 (respectivement G_1 et G_2) que subirait le solide immergé S_0 (respectivement S_1 et S_2) en l'absence des deux autres solides (le liquide l'entourant donc totalement).

On admet que la poussée d'Archimède due au liquide sur le système Σ peut être remplacée par les trois forces $\vec{\Pi}_0$, $\vec{\Pi}_1$ et $\vec{\Pi}_2$.

Q2. Exprimer la résultante \vec{R} et le moment $\vec{\Gamma}_C$ en C des forces de pression et de pesanteur que Σ subit en fonction des grandeurs judicieuses parmi $\rho_\ell, \rho_1, \rho_2, V_0, V_1, V_2, \vec{CG}_0, \vec{CG}_1, \vec{CG}_2$ et \vec{g} .

- Q3.** Les sous-systèmes S_1 et S_2 procurent respectivement à Σ une propension à flotter ou à couler. À quelle condition ces effets antagonistes se compensent-ils ? Exprimer la réponse sous la forme d'une relation entre ρ_ℓ , ρ_1 , ρ_2 , V_1 et V_2 .
- Q4.** La relation précédente est supposée satisfaite. Montrer que le moment en C des forces s'exerçant sur l'ensemble Σ s'exprime sous la forme

$$\vec{\Gamma}_C = M_m \vec{G_1 G_2} \wedge \vec{g}$$

et donner l'expression de M_m en fonction de ρ_ℓ , ρ_2 et V_2 .

- Q5.** Dédurre de la relation précédente l'orientation prise par le vecteur $\vec{G_1 G_2}$ à l'équilibre stable de Σ . Vérifier la cohérence de la stabilité de l'équilibre à l'aide d'un ou de plusieurs dessins pertinents.
- Q6.** En revenant au système réel de la figure 2, expliquer le rôle de la vis \mathcal{V} .

C - Oscillations du pendule et longueur effective

Dans cette sous-partie, on suppose la sphère \mathcal{S} et le point O fixes dans \mathcal{R}_T et on étudie un mouvement pendulaire de la plateforme \mathcal{D} dans le cadre d'un modèle simplifié :

- La plateforme et ses accessoires sont remplacés par un solide Σ_0 quasi ponctuel de volume V_0 et de masse volumique ρ_0 immergé dans le liquide de masse volumique $\rho_\ell < \rho_0$, suspendu en O par un fil souple de longueur ℓ et de direction indiquée par un angle θ (figure 4).
- On utilise encore le principe d'Archimède pour exprimer la résultante des forces du liquide sur le solide Σ_0 , malgré les mouvements de ceux-ci (on néglige donc notamment dans cette sous-partie toute force de frottement due au liquide sur le solide).
- On augmente l'inertie du solide Σ_0 pour tenir compte du fait qu'il entraîne dans son déplacement du liquide qui se trouve autour de lui : pour ce faire, on affecte à Σ_0 une « masse effective » m_{eff} *uniquement pour le calcul de ses éléments cinétiques (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique)*. Cette masse effective est supposée constante et est bien supérieure à la masse réelle de la plateforme et de ses accessoires.

Attention : la «masse effective» n'intervient pas dans l'expression du poids de Σ_0 qui ne dépend que de sa masse réelle $\rho_0 V_0$.

- Q7.** Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ dans l'approximation des petits angles. Identifier une pulsation propre ω_0 de la forme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_{\text{eff}}}}$$

et donner l'expression de ℓ_{eff} en fonction de ℓ , m_{eff} et de la masse apparente $m_{\text{app}} = (\rho_0 - \rho_\ell) V_0$.

- Q8.** L'auteur du brevet original estime que le volume de fluide entraîné par le pendule est égal à $20V_0$ de sorte que $m_{\text{eff}} = \rho_0 V_0 + 20\rho_\ell V_0$. La masse volumique du liquide est de 1% inférieure à ρ_0 . Sous ces hypothèses, comparer la période propre T_0 du pendule à celle $T_{0,\text{vide}}$ que l'on observerait en l'absence de liquide.
- Q9.** Dans les brochures commerciales Datawell, on peut lire la phrase suivante : "La période propre d'oscillations de la plateforme est de l'ordre de 40 s, ce qui correspondrait à un pendule de 400 m". Cette affirmation vous paraît-elle cohérente ? Peut-on estimer la longueur réelle ℓ ?

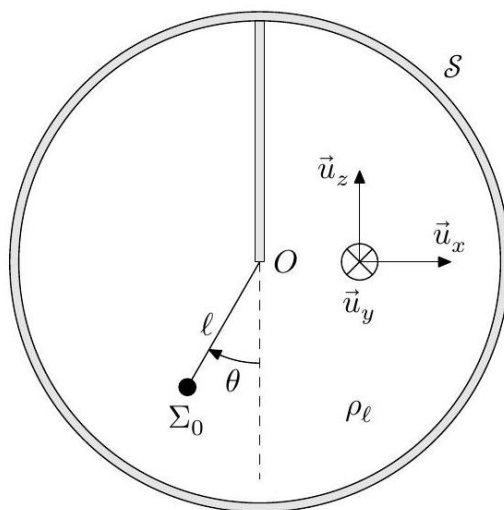


FIGURE 4 – Modélisation de la plateforme en pendule simple (d'après l'orientation du vecteur \vec{u}_y , l'angle θ représenté sur cette figure est positif)

D - Effet stabilisateur

On rappelle que la sphère de la figure 2 est embarquée dans une bouée. Sous l'effet de la houle, son centre O subit, en plus des accélérations verticales à mesurer, des accélérations horizontales perturbatrices.

Comme dans la sous-partie C, on représente la plateforme par un pendule simple et on étudie ses oscillations, repérées par l'angle θ . On envisage une situation dans laquelle le point de fixation O subit, par rapport au référentiel terrestre \mathcal{R}_T supposé galiléen, une accélération $\vec{a} = a(t) \vec{u}_x$. On raisonne dans le référentiel \mathcal{R}_S d'origine O et dont les axes sont parallèles à ceux de \mathcal{R}_T . La poussée d'Archimède et l'effet de masse effective interviennent comme dans la sous-partie précédente et on prend de surcroît en compte une force de frottement visqueux $\vec{F}_v = -\beta \vec{v}$ sur le solide Σ_0 de vitesse \vec{v} .

- Q10.** En tenant compte de l'accélération d'entraînement \vec{a}_e , donner l'expression de la poussée d'Archimède. Quelle autre force s'exerçant sur le pendule faut-il considérer pour rendre compte du mouvement accéléré de \mathcal{R}_S par rapport à \mathcal{R}_T ? Dans l'expression de cette force, on fera intervenir la masse réelle $\rho_0 V_0$ de Σ_0 et non pas sa masse effective.
- Q11.** Dans l'approximation des petits angles, démontrer que l'équation du mouvement du pendule est dorénavant de la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \frac{a(t)}{\ell_{\text{eff}}}$$

et donner l'expression du facteur de qualité Q en fonction de m_{eff} , β et ω_0 .

On procède à une étude de la réponse harmonique du pendule. L'accélération $a(t)$ est donc de la forme $a(t) = \text{Re}(a_0 e^{j\omega t})$ où a_0 est un nombre réel positif et on pose $\theta = \text{Re}(\underline{\theta}_m e^{j\omega t})$.

- Q12.** Exprimer $\underline{\theta}_m$ en fonction de a_0 , ℓ_{eff} , ω , ω_0 et Q .

On note θ_0 la valeur de $\underline{\theta}_m$ obtenue pour $\omega = 0$ puis on pose $\underline{H}(j\omega) = \underline{\theta}_m / \theta_0$.

- Q13.** Donner l'expression de \underline{H} . À quel type de filtre une telle fonction de transfert est-elle associée?

- Q14.** Quelle expression \underline{H}_1 (en fonction de ω , g et ℓ) la fonction de transfert prendrait-elle si le pendule oscillait dans l'air, le liquide étant absent ? On néglige dans ce cas les effets de viscosité et tout autre phénomène dissipatif.

Le Waverider est conçu pour détecter une houle de fréquence comprise entre 0,03 et 1 Hz. La figure 5 représente la partie gain des diagrammes de Bode correspondant aux fonctions de transfert \underline{H} et \underline{H}_1 .

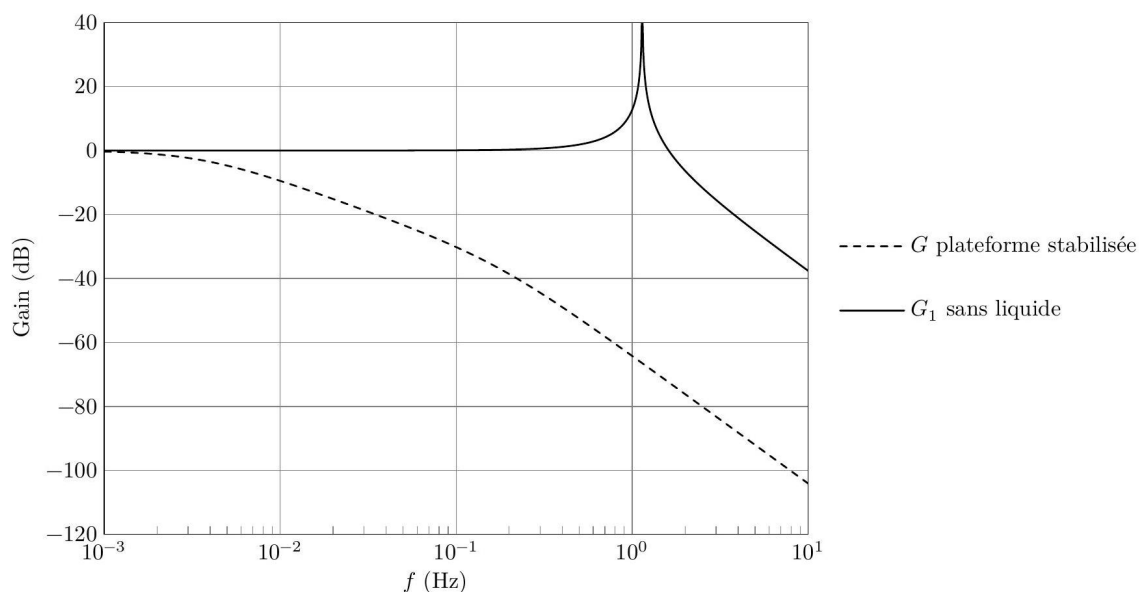


FIGURE 5 – Diagrammes de Bode

- Q15.** Commenter ces courbes. Quelle inclinaison maximale (en degrés) atteint-on si $a_0 = 1 \text{ m.s}^{-2}$?

2 Traitement du signal

L'accéléromètre fournit un signal analogique de tension U , pollué par du bruit dont les composantes spectrales de fréquence supérieure à 1 Hz nuisent aux mesures sans apporter aucune information sur l'état de la mer. On applique donc un filtrage analogique sur cette tension pour obtenir une tension U_s à exploiter.

- Q16.** Parmi les trois types de filtres A, B et C représentés sur la figure 6, lequel convient ? Justifier la réponse.

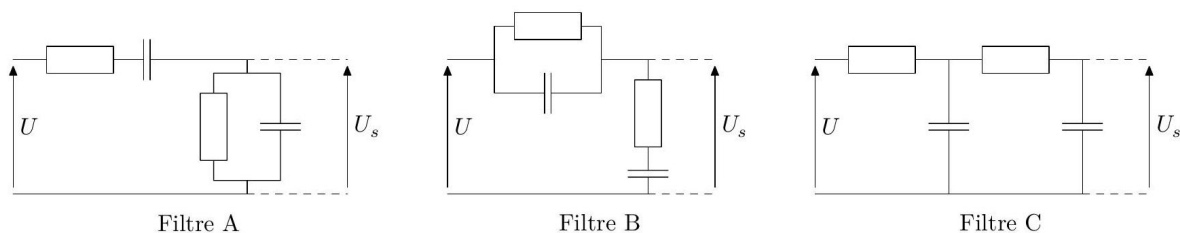


FIGURE 6 – Exemples de filtre analogiques composés de résistors et de condensateurs

- Q17.** Les deux résistors présentent la même résistance R et les deux condensateurs la même capacité C . Donner, en la justifiant, l'expression non simplifiée de la fonction de transfert $\underline{H}_F(j\omega)$ du filtre choisi, en fonction de R, C et $j\omega$.

Dans la suite, on admet que cette fonction se simplifie en

$$\underline{H}_F(j\omega) = \frac{1}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

- Q18.** Quelles valeurs proposez-vous pour R et C ?

Certains modèles de Waverider ne sont pas munis d'un filtre analogique, mais seulement d'un filtre numérique. Le signal U fourni par l'accéléromètre est échantillonné à la fréquence de 10,24 Hz puis traité numériquement pour obtenir un signal filtré U_S . Soit $\{U_k, k \in \mathbb{N}\}$ les valeurs échantillonnées du signal et $\{U_{Sk}, k \in \mathbb{N}\}$ celles que l'on obtient à la sortie du filtre.

- Q19.** Proposer un traitement numérique permettant de passer des $\{U_k\}$ aux $\{U_{Sk}\}$. Vous explicitez les opérations à effectuer et donnez la valeur numérique d'éventuelles constantes.

Après divers traitements, le signal final est échantillonné à la fréquence de 2,56 Hz. Toutes les 200 secondes, 512 échantillons sont envoyés à un microprocesseur qui calcule le spectre des hauteurs de vagues.

- Q20.** Sur quel intervalle de fréquence convient-il d'afficher le spectre obtenu ?

THE END