

CORRIGÉ du DM n°8

1 Chimie

On considère l'équilibre suivant : $\text{PCl}_{5(g)} = \text{PCl}_{3(g)} + \text{Cl}_{2(g)}$.

1. a) *Influence d'une élévation de température*

On calcule $\Delta_r H^\circ$ à l'aide de la loi de Hess :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^\circ &= \Delta_f H^\circ(\text{Cl}_{2(g)}) + \Delta_f H^\circ(\text{PCl}_{3(g)}) - \Delta_f H^\circ(\text{PCl}_{5(g)}) \\ &= -287,0 + 374,9 = 87,9 \text{ kJ.mol}^{-1} > 0\end{aligned}$$

En vertu de la loi de Van't Hoff, comme $\Delta_r H^\circ > 0$, une augmentation de température déplace l'équilibre dans le sens direct $\longrightarrow$.

- b) *Influence d'une augmentation isotherme de pression*

On utilise la **loi de modération de Le Châtelier** : une augmentation de pression déplace l'équilibre dans le sens d'une diminution du nombre de moles de gaz.

Ici, il s'agit donc du sens indirect $\longleftarrow$.

- c) *Influence d'une introduction isotherme et isobare d'un constituant*

On commence par écrire le quotient réactionnel dans un état d'équilibre noté E_1 , à la température T_1 et sous la pression totale P_1 . Il vient :

$$Q_{r1} = \frac{x(\text{Cl}_2)x(\text{PCl}_3)}{x(\text{PCl}_5)} \frac{P_1}{P^\circ} = \frac{n(\text{Cl}_2)n(\text{PCl}_3)}{n(\text{PCl}_5)n_g} \frac{P_1}{P^\circ}$$

α) On ajoute n moles de Cl_2 . On a donc : $n(\text{Cl}_2) \longmapsto n(\text{Cl}_2) + n$ et $n_g \longmapsto n_g + n$. On étudie l'évolution de Q_{r1} en fonction de n :

$$\frac{\partial \ln(Q_{r1})}{\partial n} = \frac{1}{n(\text{Cl}_2) + n} - \frac{1}{n_g + n} > 0$$

On en déduit que Q_{r1} augmente avec n . L'équilibre est donc déplacé dans le sens indirect $\longleftarrow$.

β) et γ) On ajoute n moles $\text{PCl}_{5(g)}$ ou bien n moles d'un gaz inactif. Dans les deux cas, on voit que Q_{r1} diminue, ce qui fait que l'équilibre se déplace dans le sens direct $\longrightarrow$.

2. *Déterminer la constante d'équilibre à 500 K.*

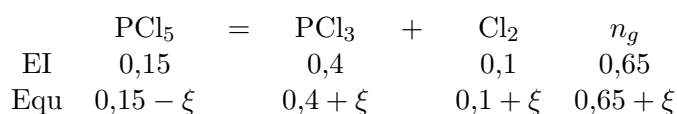
$$\Delta_r S^\circ = S_m^\circ(\text{Cl}_2) + S_m^\circ(\text{PCl}_3) - S_m^\circ(\text{PCl}_5) = 170,2 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}.$$

On en déduit : $\Delta_r G^\circ(500 \text{ K}) = 87\,500 - 500 \times 170,2 = 2400 \text{ J.mol}^{-1}$. Ensuite :

$$K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = 0,56$$

3. *Sous une pression constante $P = 3,0 \text{ bar}$ et à 500 K , on introduit $1,0 \text{ mol}$ de PCl_5 . Déterminer la composition du système à l'équilibre.*

Bilan de matière :



- a) Le quotient réactionnel initial s'écrit (les quantités de matière étant prises à l'état initial) :

$$Q_{r,I} = \frac{n_{\text{Cl}_2} n_{\text{PCl}_3}}{n_{\text{PCl}_5} n_g} \frac{P}{P^\circ} = 1,23 > K^\circ$$

La réaction évolue donc dans le sens indirect $\leftarrow$.

- b) La LAM conduit à :

$$K^\circ = \frac{(0,4 + \xi)(0,1 + \xi)}{(0,15 - \xi)(0,65 + \xi)} \frac{P}{P^\circ}$$

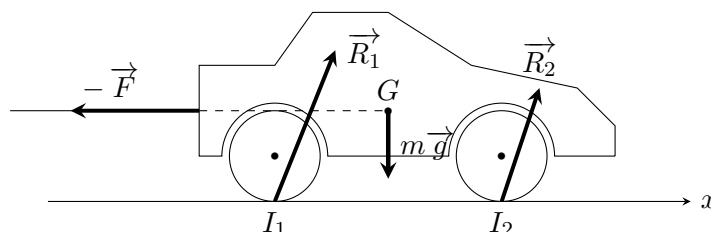
La résolution **au solveur** donne :

$$\xi = 4,0 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

2 À propos de mécanique dans le film "Fast and furious". CCINP MP 2021

Course-poursuite dans les rues de Rio : une opération savamment préparée ?

- 1) On a le schéma ci-dessous :



La voiture est soumise :

- aux réactions de la route $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ respectivement appliquées en I_1 et en I_2 ;
- à son poids $m\vec{g}$ appliqué en G ;
- à la force exercée par le filin. Comme celui-ci est sans masse, cette force est $-\vec{F}$, opposé de la force exercée par le filin sur le conteneur.

Remarque : les actions exercées par le moteur sur la roue avant sont des forces internes au système {voiture}.

- 2) Le filin étant tendu, le conteneur possède la même vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_x$ constante que la voiture (le conteneur étant en translation, tous les points de celui-ci ont la même vitesse $\vec{V}$). Le théorème du centre d'inertie (TCI) appliqué dans le référentiel terrestre supposé galiléen conduit à :

$$m_0 \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right)_{R_T} = \vec{0} = m_0 \vec{g} + \vec{R}_0 + \vec{F} = m_0 \vec{g} - T_0 \vec{e}_x + N_0 \vec{e}_z + \vec{F}$$

En projection sur $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ on obtient :

$$N_0 = m_0 g \quad \text{et} \quad F = T_0$$

Or, comme le conteneur glisse sur la route, la loi de Coulomb s'applique et la réaction tangentielle est opposée à la vitesse de glissement, donc $T_0 > 0$. De plus, $T_0 = f_0 N_0 = f_0 m_0 g$. On a donc :

$$\boxed{\vec{F} = f_0 m_0 g \vec{e}_x}$$

- 3) a) La vitesse du système { carrosserie + moteur + conducteur } étant constante dans le référentiel terrestre, l'énergie cinétique E_c reste constante.

Les forces extérieures sont les réactions de la route $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ de puissances nulles d'après l'énoncé, le poids $m\vec{g}$ de puissance nulle car orthogonal à $\vec{V}$ et la force $-\vec{F}$ de puissance $-\vec{F} \cdot \vec{V}$. On a donc :

$$\left(\frac{dE_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}_T} = 0 = P_m - \vec{F} \cdot \vec{V}$$

d'où :

$$\boxed{P_m = \vec{F} \cdot \vec{V}}$$

- b) On a donc :

$$\boxed{P_m = f_0 m_0 g V \stackrel{AN}{=} 0,4 \times 4500 \times 10 \times 190\,000/3600 = 950 \text{ kW}}$$

ce qui représente environ 1300 ch.

- 4) a) Si S est un solide en rotation autour d'un axe Δ fixe dans un référentiel galiléen muni d'un repère R , que O est un point de Δ et que $\vec{u}$ est le vecteur unitaire directeur de Δ , alors :

- Si $\vec{L}_O(S/R)$ est le moment cinétique de S par rapport à O , sa projection sur l'axe de rotation Δ s'écrit :

$$L_\Delta = \vec{L}_O(S/R) \cdot \vec{u} = J_\Delta \omega$$

où J_Δ est le moment d'inertie de S par rapport à Δ et ω la vitesse angulaire de rotation de S autour de Δ .

- Si $\vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}})$ est le moment par rapport à O des forces exercées par l'extérieur sur S , sa projection sur Δ s'écrit :

$$M_\Delta = \vec{M}_O(\vec{F}_{\text{ext}}) \cdot \vec{u}$$

- Le théorème scalaire du moment cinétique s'écrit alors :

$$\boxed{J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = M_\Delta}$$

- b) • Pour la roue arrière :

La réaction du sol $\vec{R}_1$, le poids de la roue qui s'applique en O_1 (centre de la roue), les actions de la liaison pivot dont le moment est nul si cette liaison est parfaite.

- Pour la roue avant :

La réaction du sol $\vec{R}_2$, le poids de la roue qui s'applique en O_2 (centre de la roue), les actions de la liaison pivot dont le moment est nul si cette liaison est parfaite et le moment des actions du moteur $\vec{\Gamma} = \Gamma_m \vec{e}_y$.

- c) On applique le TMC à chaque roue dans le référentiel de la carrosserie, galiléen puisqu'en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel terrestre galiléen.

- **Roue arrière** : l'axe de rotation est $\Delta_1 = O_1 \vec{e}_y$. La vitesse angulaire ω_1 étant constante on a :

$$J_{\Delta_1} \frac{d\omega_1}{dt} = 0 = M_{\Delta_1}(\vec{R}_1) + \underbrace{M_{\Delta_1}(\text{poids})}_{=0} + \underbrace{M_{\Delta_1}(\text{pivot})}_{=0} = -\frac{d}{2} T_1$$

d'où : $\boxed{T_1 = 0}$

- **Roue avant** : l'axe de rotation est $\Delta_2 = O_2 \vec{e}_y$. La vitesse angulaire ω_2 étant constante il vient :

$$J_{\Delta_2} \frac{d\omega_2}{dt} = 0 = M_{\Delta_2}(\vec{R}_2) + \underbrace{M_{\Delta_2}(\text{poids})}_{=0} + \underbrace{M_{\Delta_2}(\text{pivot})}_{=0} + M_{\Delta_2}(\text{moteur}) = -\frac{d}{2} T_2 + \Gamma_m$$

d'où $\boxed{\Gamma_m = T_2 \frac{d}{2}}$.

- 5) a) On applique le théorème du centre d'inertie (TCI) à la voiture dans le référentiel terrestre, en projection sur $\vec{e}_x$. L'accélération de G étant nulle, on obtient :

$$0 = -F + T_1 + T_2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{F = T_2}$$

- b) On en déduit :

$$\boxed{\Gamma_m = F \frac{d}{2} = f_0 m_0 g \frac{d}{2} \vec{e}_x}$$

A.N. $\Gamma_m = 4500 \text{ N.m}$ (couple moteur).

- 6) a) Parce qu'il s'agit d'une force intérieure au système {voiture}. Or le TMC ne fait intervenir que les forces exercées par l'extérieur sur le système étudié.
- b) Si on applique le TCI à la voiture dans le référentiel terrestre et qu'on projette sur $\vec{e}_z$, on obtient l'équation :

$$N_1 + N_2 = mg$$

On a donc deux équations à deux inconnues N_1 et N_2 qu'on peut facilement résoudre pour obtenir :

$$\boxed{N_1 = \frac{mg}{2} + \frac{T_2 h}{2b} = \frac{mg}{2} + \frac{f_0 m_0 g h}{2b}}$$

et

$$\boxed{N_2 = \frac{mg}{2} - \frac{T_2 h}{2b} = \frac{mg}{2} - \frac{f_0 m_0 g h}{2b}}$$

- 7) a) Puisque $T_1 = 0$, la loi de Coulomb est toujours vérifiée pour la roue arrière : elle ne glissera donc jamais. En revant la roue avant ne glisse pas tant que :

$$|T_2| = f_0 m_0 g < f_s \left(\frac{mg}{2} - \frac{f_0 m_0 g h}{2b} \right)$$

b) On isole m_0 pour trouver :

$$m_0 f_0 g \left(1 + f_s \frac{h}{2b} \right) < f_s \frac{mg}{2}$$

d'où le résultat :

$$m_0 < m \frac{f_s}{2f_0 \left(1 + f_s \frac{h}{2b} \right)} = m_{0,\max}$$

c) A.N. : $m_{0,\max} = 3,2 \cdot 10^3 \text{ kg} = 3,2 \text{ tonnes}$. Cette masse semble être un bon ordre de grandeur pour un conteneur (qui doit sûrement contenir beaucoup de lingots d'or). On peut donc concevoir que la voiture ne glisse pas.

8) a) On échange alors les rôles des roues avant et arrière. Le TMC scalaire appliqué à chacune des roues conduit à :

$$\Gamma_m = T_1 \frac{d}{2} \quad \text{et} \quad T_2 = 0$$

Le TCI appliqué à la voiture conduit alors à : $T_1 = F = f_0 m_0 g$.

b) Dans ce cas, c'est la roue avant qui ne glissera jamais alors que la roue arrière risque de dérapage. Il n'y a pas de dérapage tant que :

$$|T_1| = f_0 m_0 g < f_s \left(\frac{mg}{2} + \frac{f_0 m_0 g h}{2b} \right)$$

c) La résolution de l'inégalité précédente conduit alors à :

$$m_0 < m \frac{f_s}{2f_0 \left(1 - f_s \frac{h}{2b} \right)} = m'_{0,\max}$$

d) A.N. : $m'_{0,\max} = 4,6 \cdot 10^3 \text{ kg} = 4,6 \text{ tonnes}$. Ceci améliore donc les choses du moins au niveau de l'absence de glissement (mais pas au niveau de la puissance nécessaire).