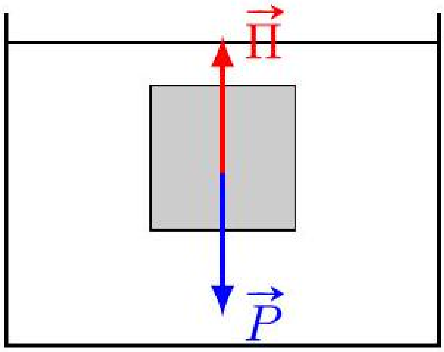
Les bouées houlographes Waverider. Centrale MP 2022

1 La plateforme stabilisatrice

A - Flottabilité

Q1. Faisons un schéma de la situation.



Au moment où le solide est fixe, les frottements sont absents, ainsi les deux seules forces sont la poussée d'Archimède et le poids :

$$\overrightarrow{P} = m\vec{g} = \rho V \vec{g}$$
$$\overrightarrow{\Pi} = -\rho_\ell V \vec{g}$$

La résultante de ces deux forces est :

$$\boxed{\overrightarrow{P} + \overrightarrow{\Pi} = (\rho - \rho_\ell)\, V \vec{g}}$$

Cette force est dirigée vers le bas si $\rho > \rho_\ell$, vers le haut dans le cas inverse. Dans le premier cas, le solide coule, dans le second il remonte à la surface.

B - Horizontalité statique de la plateforme

Q2. Nous prenons en compte le poids et la poussée d'Archimède s'exerçant sur chacun des trois éléments (cf. Figure 1) :

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{\Pi_0} + \overrightarrow{P_0} + \overrightarrow{\Pi_1} + \overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{\Pi_2} + \overrightarrow{P_2}$$

soit :

$$\overrightarrow{R} = -\rho_\ell V_0\, \vec{g} + \rho_0 V_0\, \vec{g} - \rho_\ell V_1\, \vec{g} + \rho_1 V_1\, \vec{g} - \rho_\ell V_2\, \vec{g} + \rho_2 V_2\, \vec{g}$$

Comme on considère $\rho_\ell = \rho_0$:

$$\boxed{\overrightarrow{R} = (\rho_1 - \rho_\ell)\, V_1\, \vec{g} + (\rho_2 - \rho_\ell)\, V_2\, \vec{g}}$$

On exprime maintenant le moment de ces six forces par rapport au point C, ces forces agissant dans chaque cas au centre d'inertie des éléments considérés :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Gamma_C} = & -\rho_\ell V_0\, \overrightarrow{\mathrm{CG_0}} \wedge \vec{g} + \rho_0 V_0\, \overrightarrow{\mathrm{CG_0}} \wedge \vec{g} - \rho_\ell V_1\, \overrightarrow{\mathrm{CG_1}} \wedge \vec{g} + \rho_1 V_1\, \overrightarrow{\mathrm{CG_1}} \wedge \vec{g} \\ & - \rho_\ell V_2\, \overrightarrow{\mathrm{CG_2}} \wedge \vec{g} + \rho_2 V_2\, \overrightarrow{\mathrm{CG_2}} \wedge \vec{g}\end{aligned}$$

De nouveau, en considérant $\rho_\ell = \rho_0$, on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma_C} = (\rho_1 - \rho_\ell)\, V_1\, \overrightarrow{\mathrm{CG_1}} \wedge \vec{g} + (\rho_2 - \rho_\ell)\, V_2\, \overrightarrow{\mathrm{CG_2}} \wedge \vec{g}}$$

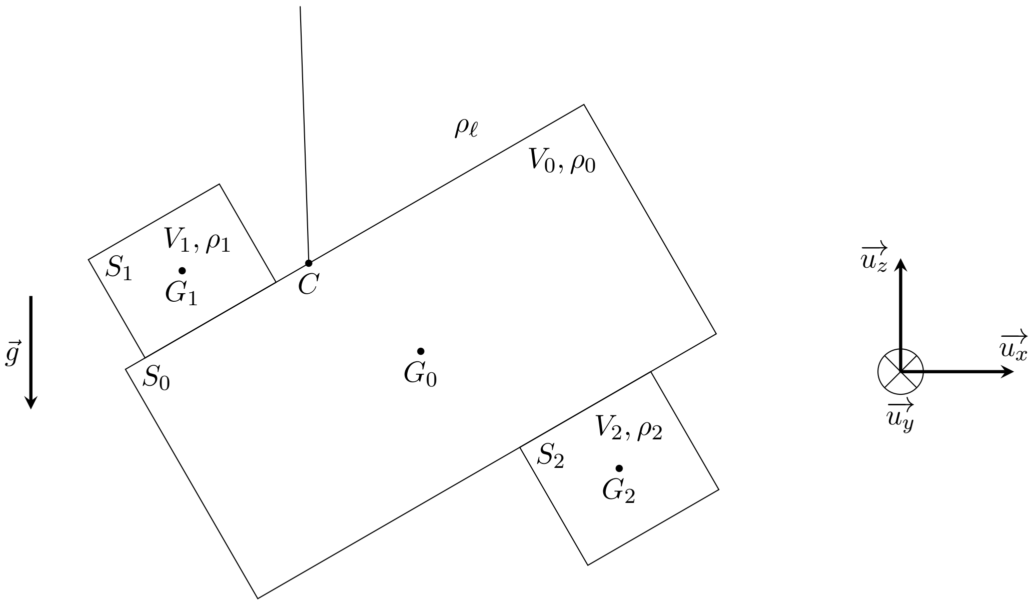


Figure 1 –

Q3. Le système S_1 a une masse volumique ρ_1 inférieure à celle du liquide, il donne donc une propension au système tout entier à flotter. Inversement pour le système S_2 qui donne une propension au système tout entier à couler. Ces effets se compensent si la résultante des forces agissant sur le système est nulle. Soit :

$$\boxed{(\rho_1 - \rho_\ell)\, V_1 = (\rho_\ell - \rho_2)\, V_2}$$

Q4. Notons $\overrightarrow{T_C}$ la tension exercée par le fil en C : son moment en C est nul puisque C est le point d'application de cette force. Le moment en C, $\overrightarrow{M_{C,\text{ext}}}$, des forces s'exerçant sur l'ensemble Σ se réduit donc à celui des forces de pression et de pesanteur, déjà calculé à la question Q2. Compte-tenu de la question Q3. On obtient :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{M_{C,\text{ext}}} = \overrightarrow{\Gamma_C} &= (\rho_1 - \rho_\ell)\, V_1\, \overrightarrow{CG_1} \wedge \vec{g} + (\rho_2 - \rho_\ell)\, V_2\, \overrightarrow{CG_2} \wedge \vec{g} \\ &= (\rho_\ell - \rho_2)\, V_2\, \overrightarrow{CG_1} \wedge \vec{g} + (\rho_2 - \rho_\ell)\, V_2\, \overrightarrow{CG_2} \wedge \vec{g} \\ &= (\rho_2 - \rho_\ell)\, V_2 \left(\overrightarrow{CG_2} - \overrightarrow{CG_1}\right) \wedge \vec{g} \\ &= (\rho_2 - \rho_\ell)\, V_2\, \overrightarrow{G_1G_2} \wedge \vec{g}\end{aligned}$$

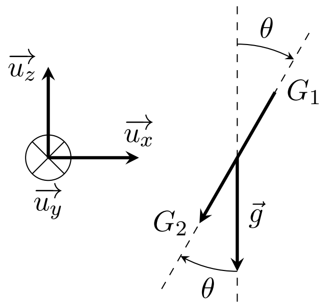
On identifie donc

$$\boxed{\mathrm{M}_m = (\rho_2 - \rho_\ell)\, V_2 > 0}$$

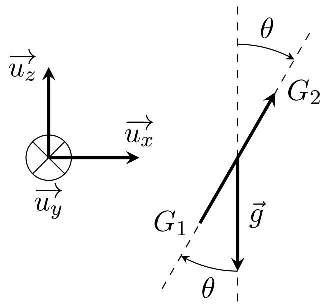
puisque $\rho_2 > \rho_\ell = \rho_0$.

Q5. À l'équilibre mécanique, le théorème du moment cinétique indique que le moment en C des forces extérieures est nul. Ainsi $\overrightarrow{G_1G_2}$ et $\vec{g}$ sont **colinéaires**.

Pour étudier la stabilité de l'équilibre, sans utiliser l'énergie potentielle, on peut regarder l'influence d'un petit décalage d'un angle θ très petit et regarder l'équation différentielle vérifiée par θ. En notant J le moment d'inertie du solide (Σ) par rapport à l'axe Cy et $L = G_1G_2$ (constant), on obtient :



1er cas



2ème cas

FIGURE 2 –

1er cas : $\overrightarrow{G_1G_2}$ vers le bas.

$\overrightarrow{G_1G_2} = -\,L\,(\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z})$. On a donc :

$$\overrightarrow{M_{C,\text{ext}}} = M_m g L\,(\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z}) \wedge \overrightarrow{u_z} = -\,M_m g L \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

Le théorème scalaire du moment cinétique conduit à :

$$J\ddot{\theta} = \overrightarrow{M_{C,\text{ext}}}.\overrightarrow{u_y} \implies J\ddot{\theta} + M_m g L \sin\theta = 0$$

Dans la limite des petits angles on obtient :

$$\ddot{\theta} + \frac{M_m g L}{J}\,\theta = 0$$

ce qui est l'équation d'un oscillateur harmonique. Les solutions sont donc sinusoïdales et le solide oscille sans fin (en l'absence de frottements) autour de sa position d'équilibre. Celle-ce est donc **stable**.

2ème cas : $\overrightarrow{G_1G_2}$ vers le haut.

$\overrightarrow{G_1G_2} = L\,(\sin\theta\,\overrightarrow{u_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{u_z})$. On a donc :

$$\overrightarrow{M_{C,\text{ext}}} = M_m g L \sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

et le théorème scalaire du moment cinétique conduit à :

$$J\ddot{\theta} - M_m g L \sin\theta = 0$$

Dans la limite des petits angles on obtient :

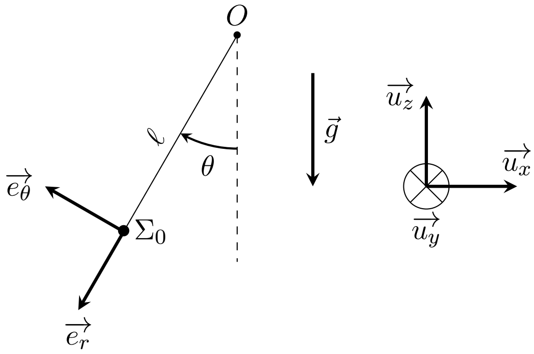
$$\ddot{\theta} - \frac{M_m g L}{J}\,\theta = 0$$

Dans ce cas les solutions sont exponentielles et le solide va s'éloigner de sa position d'équilibre sans y revenir. Cette position d'équilibre est donc **instable**.

$$\boxed{\text{En conclusion, l'équilibre est stable si } \overrightarrow{\mathrm{G_1G_2}} \text{ est orienté vers le bas.}}$$

Q6. La vis $\mathcal{V}$ a pour but de déplacer le centre d'inertie des parties lourdes G_2 pour assurer ainsi l'horizontalité de la plateforme.

C - Oscillations du pendule et longueur effective



Q7. On applique le théorème du moment cinétique en O (point fixe de $\mathcal{R}_T$) à Σ_0. On peut utiliser la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ comme base de travail et remarquer que $-\overrightarrow{u_z} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{e_r} - \sin(\theta)\,\overrightarrow{e_\theta}$.

Sur la plateforme s'exercent la poussée d'Archimède, le poids et la tension du fil. Les moments en O de ces forces sont :

$$\overrightarrow{M_O}\left(\overrightarrow{\Pi}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \rho_\ell V_0 g\,\overrightarrow{u_z} = \rho_\ell V_0 g \ell\,\sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{M_O}\left(\overrightarrow{P}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \rho_0 V_0 g\,(-\overrightarrow{u_z}) = -\rho_0 V_0 g \ell\,\sin\theta\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{M_O}\left(\overrightarrow{T}\right) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T} = \vec{0}$$

D'après l'énoncé, le moment cinétique en O s'écrit $\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m_{\text{eff}}\vec{v} = m_{\text{eff}}\ell\,\overrightarrow{e_r} \wedge \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} = m_{\text{eff}}\,\ell^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_y}$. En projection sur $\overrightarrow{u_y}$ cela donne :

$$m_{\text{eff}}\ell\,\ddot{\theta} = \rho_\ell V_0 g\sin\theta - \rho_0 V_0 g\,\sin\theta$$

d'où :

$$\ddot{\theta} + \frac{(\rho_0 - \rho_\ell)\,V_0 g}{m_{\text{eff}}\ell}\sin\theta = 0$$

Dans l'approximation des petits angles $\sin\theta \approx \theta$ ainsi :

$$\ddot{\theta} + \frac{(\rho_0 - \rho_\ell)\,V_0 g}{m_{\text{eff}}\ell}\,\theta = 0$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique. On identifie :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{(\rho_0 - \rho_\ell)\,V_0 g}{m_{\text{eff}}\ell}} = \sqrt{\frac{g}{\ell_{\text{eff}}}}}$$

et donc :

$$\boxed{\ell_{\text{eff}} = \ell\,\frac{m_{\text{eff}}}{(\rho_0 - \rho_\ell)\,V_0} = \ell\,\frac{m_{\text{eff}}}{m_{\text{app}}}}$$

Q8. Par hypothèse $m_{\text{eff}} = \rho_0 V_0 + 20\,\rho_\ell V_0$ et $\rho_\ell = 0{,}99\,\rho_0$. Ainsi $m_{\text{eff}} = \rho_0 V_0 + 19{,}8\,\rho_0 V_0 = 20{,}8\,\rho_0 V_0$ et donc $\ell_{\text{eff}} = \ell\frac{20{,}8\rho_0 V_0}{0{,}01\,\rho_0 V_0} = 2080\ell$.

On en déduit que :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2080}}\sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{d'où} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{2080}\,\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

soit :

$$\boxed{T_0 = \sqrt{2080}\,T_{0,\text{vide}} \approx 45{,}6 \times T_{0,\text{vide}}}$$

Q9. Un pendule de 400 mètres dans le vide oscille à :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} = 40 \text{ s}}$$

Ce qui est conforme à la brochure commerciale. Enfin :

$$\boxed{\ell = \frac{\ell_{\text{eff}}}{2080} = 19{,}2 \text{ cm}}$$

D - Effet stabilisateur

Q10. Nous devons prendre en compte la force d'inertie d'entraînement :

$$\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{a_e} = -\rho_0 V_0\, a(t)\overrightarrow{u_x}$$

Remarque :

Il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis puisque $\mathcal{R}_S$ est en tanslation par rapport à $\mathcal{R}_T$ supposé galiléen.

Cette force d'inertie d'entraînement permet aussi de définir le poids effectif $\overrightarrow{P}_{\text{eff}}$ qui intervient dans l'expression de la poussée d'Archimède.

Q11. On prend en compte la force d'inertie d'entraînement. On étudie le mouvement de Σ_0 dans le référentiel non-galiléen $\mathcal{R}_S$. Par ailleurs, nous utilisons le principe fondamental de la dynamique (noté PFD par la suite) projeté dans la base polaire $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$. Faisons un bilan des forces :

- la poussée d'Archimède :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Pi} &= -\rho_\ell V_0\,(\vec{g} - \overrightarrow{a_e}) \\ &= \rho_\ell V_0\,\left(g\,\overrightarrow{u_z} + a(t)\,\overrightarrow{u_x}\right)\end{aligned}$$

  avec $\overrightarrow{u_x} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} - \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{u_z} = -\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$:

$$\overrightarrow{\Pi} = \rho_\ell V_0\,\{\,(-a(t)\sin\theta - g\cos\theta)\,\overrightarrow{e_r} + (-a(t)\cos\theta + g\sin\theta)\overrightarrow{e_\theta}\,\}$$

- le poids :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P} &= m\vec{g} = -\,\rho_0 V_0 g\,\overrightarrow{u_z} \\ &= \rho_0 V_0 g\,\left(\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)\end{aligned}$$

- la force d'inertie d'entraînement :

$$\overrightarrow{f_{ie}} = -\rho_0 V_0 a(t)\,\overrightarrow{u_x} = \rho_0 V_0 a(t)\,\left(\sin\theta\,\overrightarrow{e_r} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)$$

- La force de frottement visqueux :

$$\overrightarrow{F_v} = -\,\beta\vec{v} = -\beta\ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

- La tension du fil :

$$\overrightarrow{T} = -\,T\,\overrightarrow{e_r}$$

Le mouvement étant circulaire, le PFD s'écrit :

$$-m_{\text{eff}}\,\ell\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r}+m_{\text{eff}}\,\ell\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}=\sum\vec{F}$$

Projeté sur $\overrightarrow{e_\theta}$, on obtient :

$$m_{\text{eff}}\ell\,\ddot{\theta}=-\rho_\ell V_0 a(t)\cos\theta+\rho_\ell V_0 g\,\sin\theta-\rho_0 V_0 g\,\sin\theta+\rho_0 V_0 a(t)\cos\theta-\beta\ell\dot{\theta}$$

Dans l'approximation des petits angles, en se limitant au premier ordre $\cos\theta\approx 1$ et $\sin\theta\approx\theta$ il vient :

$$m_{\text{eff}}\ell\,\ddot{\theta}+\beta\ell\,\dot{\theta}+(\rho_0-\rho_\ell)\,V_0 g\,\theta=(\rho_0-\rho_\ell)\,V_0\,a(t)$$

d'où :

$$\ddot{\theta}+\frac{\beta}{m_{\text{eff}}}\,\dot{\theta}+\frac{(\rho_0-\rho_\ell)\,V_0 g}{m_{\text{eff}}\ell}\theta=\frac{(\rho_0-\rho_\ell)\,V_0}{m_{\text{eff}}\ell}\,a(t)$$

On retrouve $\ell_{\text{eff}}\ =\ell\,\frac{m_{\text{eff}}}{(\rho_0-\rho_\ell)V_0}$:

$$\ddot{\theta}+\frac{\beta}{m_{\text{eff}}}\dot{\theta}+\frac{g}{\ell_{\text{eff}}}\,\theta=\frac{a(t)}{\ell_{\text{eff}}}$$

Avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{g/\ell_{\text{eff}}}}$ et $\boxed{Q=m_{\text{eff}}\,\omega_0/\beta}$:

$$\ddot{\theta}+\frac{\omega_0}{Q}\,\dot{\theta}+\omega_0^2\,\theta=\frac{a(t)}{\ell_{\text{eff}}}$$

Q12. L'excitation étant sinusoïdale, on recherche une solution particulière sinusoïdale à la même pulsation ω. Pour ce faire, nous introduisons les signaux complexes $\underline{a}(t)$ et $\underline{\theta}(t)$. Il vient :

$$-\omega^2\underline{\theta}_m\,e^{j\omega t}+j\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{\theta}_m\,e^{j\omega t}+\omega_0^2\underline{\theta}_m\,e^{j\omega t}=\frac{a_0\,e^{j\omega t}}{\ell_{\text{eff}}}$$

d'où :

$$\boxed{\underline{\theta}_m=\frac{a_0/\ell_{\text{eff}}}{\omega_0^2-\omega^2+j\omega\frac{\omega_0}{Q}}}$$

Q13. Pour $\omega=0$:

$$\theta_0=\frac{a_0}{\ell_{\text{eff}}\omega_0^2}$$

On écrit :

$$\underline{\theta}_m=\frac{\frac{a_0}{\ell_{\text{eff}}\,\omega_0^2}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}=\frac{\theta_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$$

Ainsi :

$$\boxed{\underline{H}=\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}}$$

C'est la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre.

Q14. Si le pendule oscillait dans l'air :

- $\beta=0$ (pas de frottement visqueux) si bien que $\frac{\omega}{\omega_0 Q}=0$;
- $\ell_{\text{eff}}=\ell$ car $m_{\text{eff}}=\rho_0 V_0$ et $(\rho_0-\rho_\ell)\,V_0 g=\rho_0 V_0 g$.

Ainsi $\omega_0^2 = g/\ell$ d'où :

$$\boxed{\underline{H}_1 = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{(g/\ell)}}}$$

Q15. Sans liquide, On lit sur le graphique une pulsation propre d'environ 1,2 Hz. On observe à cette fréquence une résonance très forte (un gain de 40 dB indiquant une multiplication par 100 par rapport à la valeur à très basse fréquence θ_0) : c'est logique car nous voyons que $|\underline{H}_1| \to +\infty$ quand $\omega \to g/\ell$.

En présence du liquide, la fréquence de coupure est d'environ 0,025 Hz (soit une division de la fréquence de coupure d'un facteur 50, conforme à la réponse Q8). À la coupure, $G = -20$ dB indiquant :

$$|\underline{H}| = \left|\frac{\omega_0 Q}{\omega_0}\right| = Q = \frac{1}{10}$$

et donc l'importance de l'amortissement visqueux. Aux fréquences usuelles de la houle, le gain est au moins inférieur à -20 dB atténuant donc les oscillations par rapport à la valeur très basse fréquence θ_0. Cela montre l'utilité de la plateforme stabilisatrice.

Si $a_0 = 1$ m.s^{-2} à très basse fréquence, l'inclinaison θ_0 est :

$$\theta_0 = \frac{a_0}{\ell_{\text{eff}}\omega_0^2} = \frac{a_0}{g} = 0{,}1 \text{ rad}$$

Pour les fréquences considérées, le gain max est -20 dB soit un angle $\theta_0/10$: l'amplitude maximale est 0,01 rad = 0,6°.

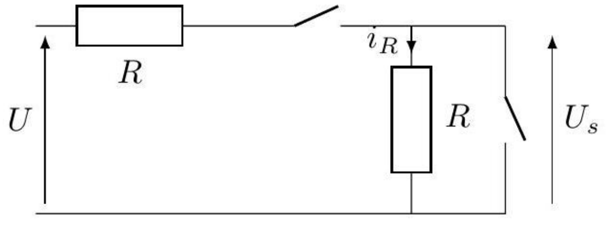
2 Traitement du signal

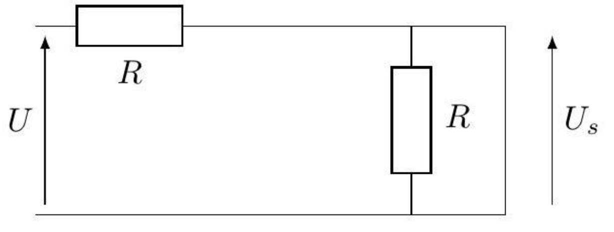
Q16. Il faut un filtre passe-bas qui se charge d'éliminer les signaux de fréquence supérieure à 1 Hz. Or, à basse fréquence, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et à haute fréquence, il se comporte comme un fil. On voit donc déjà que le filtre B ne peut pas convenir

Considérons le filtre A :

Basses fréquences : le courant est nul dans les deux branches ouvertes, le courant i_R est donc également nul d'après la loi des nœuds. Ainsi $U_s = Ri_R = 0$.

Hautes fréquences : la tension aux bornes d'un fil est nul ainsi $U_s = 0$.





Le filtre A présente un comportement de filtre passe-bande qui ne convient pas puisqu'il élimine aussi le signal utile.

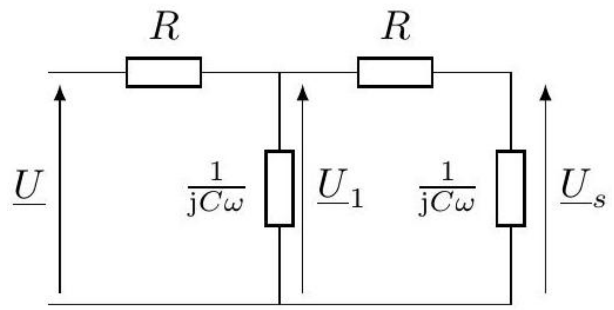
Considérons le filtre **C** :

Basses fréquences : le courant est nul dans les deux branches contenant le condensateurs. Le courant dans les deux résistances l'est donc également d'après la loi de nœuds. D'après la loi des mailles, $U_s + 0 + 0 = U$. Ainsi $U_s = U$.

Hautes fréquences : la tension aux bornes d'un fil est nul ainsi $U_s = 0$.

Le filtre C présente un comportement passe-bas. **C'est le filtre C qui est adapté**.

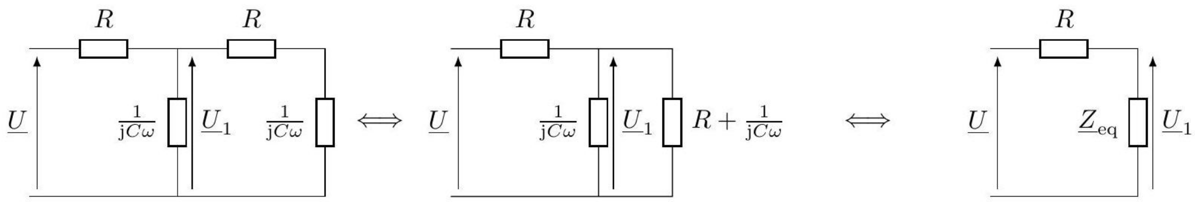
Q17. On refait le circuit en remplaçant les tensions par leurs amplitudes complexes et les composants par leurs impédances :



Commençons par déterminer la relation entre $\underline{U}_1$ et $\underline{U}_S$:

$$\underline{U}_S = \frac{1/(jC\omega)}{1/(jC\omega) + R}\underline{U}_1 = \frac{1}{1 + jRC\omega}\underline{U}_1$$

Il faut ensuite trouver la relation entre $\underline{U}_1$ et $\underline{U}$. Comme C et R ne sont pas parcourues par le même courant, on ne peut pas appliquer directement un pont diviseur de tension. On peut soit appliquer la loi des nœuds à l'aide des potentiels, soit associer les impédances pour se ramener à un circuit plus simple. Prenons la seconde méthode :



$\underline{Z}_{eq}$ et R sont parcourus par le même courant, on peut donc appliquer le pont diviseur de tension :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R}\underline{U} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z}_{eq}}}\underline{U}$$

avec :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = jC\omega + \frac{1}{R + 1/(jC\omega)}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \frac{1}{1+R\left(\mathrm{j}C\omega+\frac{1}{R+1/(\mathrm{j}C\omega)}\right)}\underline{U}\\
&= \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega+\frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}}\underline{U}\\
&= \frac{1+\mathrm{j}RC\omega}{1+2\mathrm{j}RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2+\mathrm{j}RC\omega}\underline{U}\\
\underline{U}_S &= \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{U}_1 = \frac{1}{1+3\mathrm{j}RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2}\underline{U}\end{aligned}$$

On trouve bien :

$$\boxed{\underline{H}_F(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{1+3\mathrm{j}RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2}}$$

Q18. Posons $\omega_0 = 1/(RC)$ Pour éliminer les fréquences au-dessus de 1 Hz , on peut choisir $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 0{,}1$ Hz soit $1/(RC) = 2\pi \times 10^{-1}$ rad.s^{-1}, en choisissant par exemple $C = 1{,}0$ μ F, on doit choisir $R = 1{,}6$ MΩ.

Q19. L'écriture :

$$\underline{U}_S = \frac{1}{1+3\mathrm{j}RC\omega+(\mathrm{j}RC\omega)^2}\,\underline{U}$$

devient dans le domaine temporel, avec $\tau = RC$:

$$u(t) = u_S(t) + 3\tau\frac{\mathrm{d}u_S}{\mathrm{d}t} + \tau^2\frac{\mathrm{d}^2u_S}{\mathrm{d}t^2}$$

Traduisons cette équation différentielle dans le domaine numérique en remplaçant les dérivées par des taux d'accroissement, le pas de temps étant $T_e = 1/F_e$ (période d'échantillonnage)

$$\frac{\mathrm{d}u_S}{\mathrm{d}t} = \frac{U_{S(k+1)}-U_{Sk}}{T_e} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2u_S}{\mathrm{d}t^2} = \frac{U_{S(k+1)}+U_{S(k-1)}-2U_{Sk}}{T_e^2}$$

Ainsi :

$$U_k = U_{Sk} + \frac{3\tau}{T_e}\left(U_{S(k+1)}-U_{Sk}\right) + \frac{\tau^2}{T_e^2}\left(U_{S(k+1)}+U_{S(k-1)}-2U_{Sk}\right)$$

On isole $U_{s(k+1)}$ de façon à mettre en évidence une relation de récurrence :

$$U_{S(k+1)}\left(\frac{\tau^2}{T_e^2}+\frac{3\tau}{T_e}\right) = U_k + U_{Sk}\left(\frac{3\tau}{T_e}+\frac{2\tau^2}{T_e^2}-1\right) + U_{S(k-1)}\left(-\frac{\tau^2}{T_e^2}\right)$$

On note $\alpha = \tau/T_e = \tau f_e$, avec $\tau = \frac{10}{2\pi}$ et $f_e = 10{,}24$ Hz :

$$\begin{aligned}U_{S(k+1)} &= \frac{1}{\alpha^2+3\alpha}\times U_k + \frac{2\alpha^2+3\alpha+1}{\alpha^2+3\alpha}\times U_{Sk} + \frac{-\alpha^2}{\alpha^2+3\alpha}U_{S(k-1)}\\
&= 0{,}00355\ U_k + 2{,}054\ U_{Sk} - 0{,}942\ U_{S(k-1)}\end{aligned}$$

Nous pouvons calculer successivement les U_{Sk} à l'aide de cette relation de récurrence, en initialisant $U_{S0} = U_0$ et $U_{S1} = U_1$.

Q20. Le spectre doit être affiché sur l'intervalle [0 ; 1,28 Hz] pour respecter le critère de Shannon.