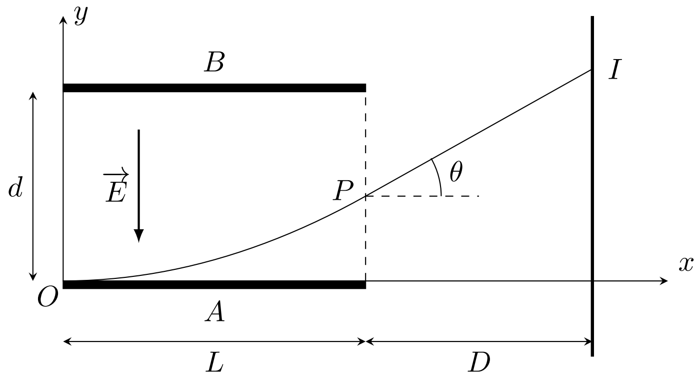
****

MOUVEMENTS DANS $\overrightarrow{E}$ ET $\overrightarrow{B}$

1 Déflexion électrostatique

Soit un électron de charge $-e$ et de masse m traversant l'espace entre les armatures A et B d'un condensateur plan. Cet électron pénètre en O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$.

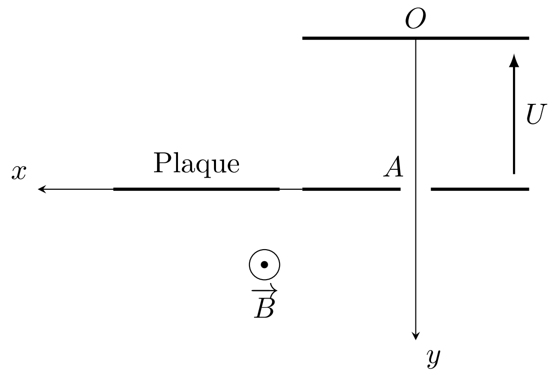


Il existe une différence de potentiel $V_B - V_A = U > 0$ entre les armatures métalliques de longueur L et distantes de d. On admet que cela crée un champ électrostatique uniforme et égal à : $\overrightarrow{E} = -\dfrac{U}{d}\,\overrightarrow{u_y}$ dans l'espace entre les armatures et nul ailleurs.

1. Déterminer l'équation $y = f(x)$ de la trajectoire de l'électron entre les deux armatures (pour $0 \leqslant x \leqslant L$). En déduire les coordonnées du point P en sortie des armatures.
2. Calculer $\tan(\theta)$ où θ est l'angle que forme la trajectoire avec l'axe Ox au point P. Quelles sont les coordonnées du point d'impact I sur l'écran fluorescent ?

2 Spectrographe de masse

1. Une particule de masse m et de charge $q > 0$ est accélérée par un champ électrique $\overrightarrow{E} = E\,\overrightarrow{u_y}$ régnant entre les deux armatures d'un condensateur plan. Cette particule est initialement introduite en O avec une vitesse nulle. La tension entre les deux armatures du condensateur étant $U > 0$, déterminer sa vitesse v_A lorsqu'elle arrive en A. On exprimera v_A en fonction de q, m et de U.



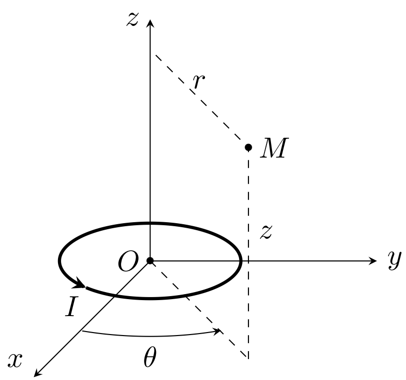
2. Cette particule pénètre en A dans une région où règne un champ magnétique $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{u_z}$ uniforme et permanent ($\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ dans cette région).
   a) Montrer que la norme de la vitesse de la particule est conservée.
   b) Calculer le rayon R de la trajectoire et en déduire l'abscisse x_I du point d'impact sur une plaque réceptrice située dans le plan $y = 0$ (voir figure).
   c) Quel est l'intérêt de ce dispositif ? Application numérique : $B = 0{,}10$ T ; $U = 10$ kV, $m = 1{,}67.10^{-27}$ kg (masse d'un nucléon). Quelle est la distance séparant les deux isotopes du potassium $^{39}K^+$ et $^{41}K^+$ sur la plaque ?

****

CALCULS DE $\overrightarrow{B}$

3 Symétries

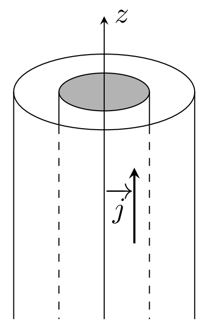
Une spire circulaire de centre O et de rayon R est parcourue par un courant constant d'intensité I.



1. Montrer que si $M \in Oz$ alors $\overrightarrow{B}(M) = B(z)\,\overrightarrow{e_z}$, z étant l'abscisse de M sur Oz. Montrer que $B(z)$ est une fonction impaire de z.
2. Montrer qu'en un point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z), $\overrightarrow{B}(M) = B_r(r,z)\,\overrightarrow{e_r} + B_z(r,z)\,\overrightarrow{e_z}$. Montrer que $B_r(r,z)$ est une fonction impaire de z tandis que $B_z(r,z)$ est une fonction paire de z.

4 Champ magnétique d'un câble coaxial

Un câble coaxial infini est constitué par un conducteur cylindrique plein de rayon R_1, entouré par un second conducteur cylindrique d'épaisseur très petite (on la supposera quasi-nulle) et de rayon $R_2 > R_1$. Les deux cylindres sont coaxiaux. Un courant d'intensité I circule dans le conducteur intérieur et revient dans l'autre sens par le conducteur extérieur.



On supposera que le vecteur densité volumique de courant est uniforme dans le volume du cylindre intérieur de rayon R_1.

Déterminer le champ magnétique produit par ce câble en tout point de l'espace.

5 Champ magnétique créé par un tore

On considère un tore de section carrée, d'axe Oz, l'origine O étant placée de telle façon que le tore se trouve dans l'espace comprise entre les côtes $z = -a/2$ et $z = +a/2$. On bobine uniformément sur ce tore, de façon jointive, N spires de fil électrique traversé par un courant d'intensité I.

1) Déterminer la direction du champ magnétique en un point M quelconque et sa dépendance vis à vis des coordonnées d'espace. On notera (r, θ, z) les coordonnées cylindriques de M.

2) Déterminer à l'aide du théorème d'Ampère, l'expression de $\overrightarrow{B}(M)$ en tout point de l'espace.

6 Champ magnétique créé par un solénoïde infini

On peut modéliser un solénoïde par une nappe de courant cylindrique de rayon R et d'épaisseur e. En tout point M de coordonnées cylindriques (r, θ, z), le vecteur densité volumique de courant s'écrit : $\overrightarrow{j}(M) = j(r)\,\overrightarrow{u_\theta}$ avec :

$$j(r) = \begin{cases} j \text{ constante} & \text{si } r \in [R, R+e] \\ 0 & \text{partout ailleurs} \end{cases}$$

On suppose que le solénoïde est de longueur infinie.

1) Déterminer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M)$ produit en tout point de l'espace en résolvant l'équation de Maxwell-Ampère. On admettra que $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$ pour $r > R + e$ et on prendra l'expression du rotationnel dans le formulaire.

2) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème d'Ampère.

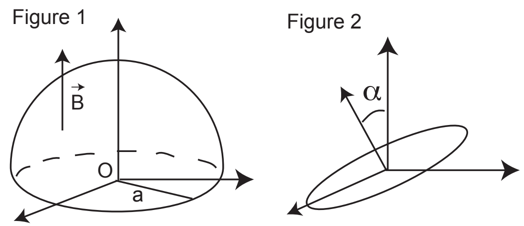
3) On étudie maintenant le modèle où $e \to 0$ et $j \to +\infty$ de sorte que le produit $j \times e$, qui sera noté j_S, reste constant et fini.

a) Déduire des questions précédentes l'expression de $\overrightarrow{B}(M)$ en tout point M pour ce modèle en fonction de μ_0 et j_S. Est-ce cohérent avec la relation de passage pour $\overrightarrow{B}$?

b) Comment relier ce résultat au champ magnétique créé par un solénoïde infini composé de n spires par mètre, chacune parcourue par un courant d'intensité I ?

7 Flux magnétique

1) $\overrightarrow{B}$ est un champ magnétique uniforme, colinéaire à $\overrightarrow{u_z}$. Calculer le flux Φ de $\overrightarrow{B}$ à travers le disque de centre O et de rayon a situé dans le plan (Oxy) (figure 1).



2) Calculer le flux Φ' de $\overrightarrow{B}$ à travers la demi-sphère.

3) Pourquoi sont-ils égaux ?

4) Calculer le flux de $\overrightarrow{B}$ à travers le disque penché (figure 2).

8 Composante radiale de $\vec{B}$

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z). Une distribution de courant (une spire circulaire par exemple) non décrite ici crée un champ magnétique en M de la forme :

$$\overrightarrow{B}(M) = B_r(r,z)\,\overrightarrow{e_r} + B_z(r,z)\,\overrightarrow{e_z}$$

possédant une composante *radiale* B_r et une composante *axiale* (le long de Oz) B_z qui ne dépendent que des cordonnées r et z de M. On s'intéresse au calcul approché de B_r pour des points très voisins de l'axe Oz, c'est à dire lorsque r est proche de zéro.

Dans les deux questions qui suivent, on pose : $B_{\text{axe}}(z) = B_z(r = 0, z)$, valeur de la composante axiale sur l'axe Oz.

1) En écrivant la conservation du flux de $\overrightarrow{B}$ à travers un cylindre d'axe Oz, de rayon r très petit et dont les bases inférieure et supérieure sont situées aux cotes z et $z + \mathrm{d}z$, montrer que, lorsque $\mathrm{d}z \to 0$:

$$B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B_{\text{axe}}}{\mathrm{d}z}(z)$$

2) On reprend l'étude à l'aide des équations locales de la magnétostatique. On prendra les expressions de la divergence et du rotationnel en coordonnées cylindriques dans le formulaire.

On suppose $B_r(r,z)$ et $B_z(r,z)$ de classe C^∞ en r et en z, au voisinage de $r=0$ on se contente d'un dévelopement limité à l'ordre 1 des deux composantes B_r et B_z, de la forme :

$$B_r(r,z) = B_r(0,z) + r\,\frac{\mathrm{d}B_r}{\mathrm{d}r}(0,z) + o(r)$$

et

$$B_z(r,z) = B_{\text{axe}}(z) + r\,\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r}(0,z) + o(r)$$

Pour simplifier les notations on pourra poser $\alpha(z) = \frac{\mathrm{d}B_r}{\mathrm{d}r}(0,z)$ et $\beta(z) = \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}r}(0,z)$.

a) Montrer que l'équation de Maxwell-Thomson implique que $B_r(0,z) = 0$ puis que $\alpha(z) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}B_{\text{axe}}}{\mathrm{d}z}$. Conclure.

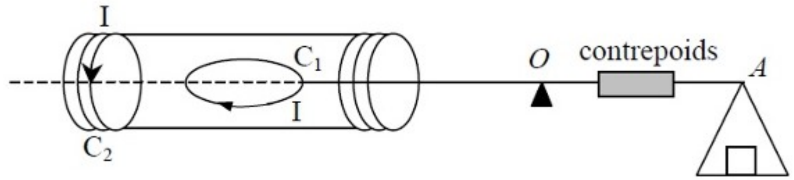
b) On suppose que le point $M(r,\theta,z)$ est situé en dehors de la distribution de courants. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose que $\beta(z) = 0$.

****

FORCES DE LAPLACE

9 Équilibre d'une spire dans un solénoïde

Une spire plate (C_1), d'axe vertical, comprenant N tours de fil, de surface S est fixée à l'extrémité du fléau d'une balance mobile autour de l'axe horizontal passant par O. Cette spire est entièrement plongée à l'intérieur d'un long solénoïde (C_2) (que l'on pourra supposer infini) comportant n spires par mètre.

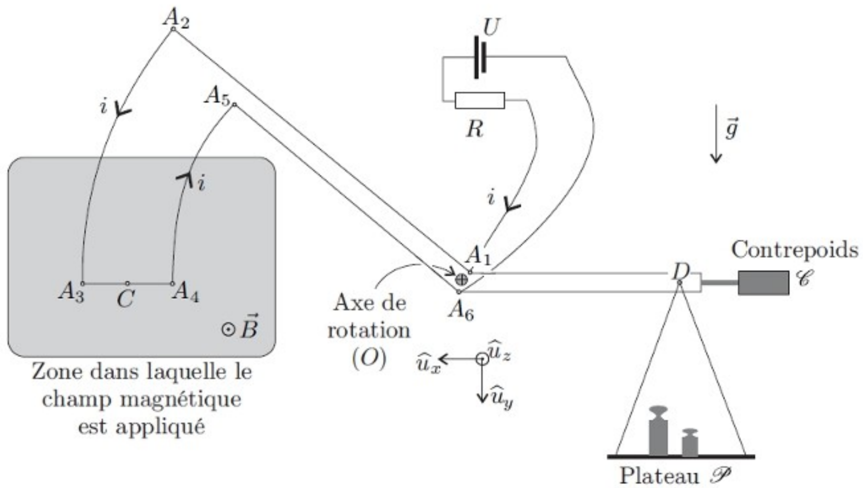


À l'autre extrémité A du fléau est suspendu un plateau ($OA = L$). Lorsqu'aucun courant ne circule, ni dans (C_1) ni dans (C_2), un contrepoids permet de réaliser l'équilibre mécanique de sorte que le fléau soit horizontal. Lorsqu'on fait passer le même courant I dans (C_1) et dans (C_2), on doit placer une masse m sur le plateau pour rétablir l'équilibre.

Calculer I en fonction de m et des données.

10 Balance de Cotton

Une balance de Cotton balance est destinée à la mesure de champ magnétique. Elle a été mise au point par Aimé Cotton en 1900. Elle est constituée de deux fléaux. L'un, à gauche, comprend sur sa périphérie, un conducteur métallique qui sera parcouru par un courant et dont une partie sera placée dans le champ magnétique, uniforme et permanent, à mesurer. Le conducteur sera soumis à des forces de Laplace et la balance penchera du côté de ce fléau. L'autre comporte un plateau sur lequel on peut déposer des masses pour équilibrer la balance et déduire ainsi la norme du champ magnétique. Le schéma de principe de la balance est représenté ci-dessous.



Sur le fléau dessiné à gauche, les conducteurs permettent le passage d'un courant d'intensité i, selon le parcours $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_5 \to A_6$. Les portions de circuit A_2A_3 et A_4A_5 sont des arcs de cercle de même centre O. L'ensemble des deux fléaux constitue un système rigide, mobile sans frottement, autour d'un axe horizontal passant par le point O et noté Oz. On désigne par C le milieu du segment A_3A_4 et D le point de suspension du plateau. On note d_1 la distance OC, d_2 la distance OD et ℓ la longueur du segment A_3A_4.

La procédure de mesure est la suivante :

a. Équilibrage "à vide" : en l'absence de courant i et de masses dans le plateau, le contrepoids C est déplacé de façon à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points C, O et D étant alignés sur l'horizontale.

b. Mesure du champ : on ferme le circuit électrique, ce qui permet au courant d'intensité i de circuler. Le fléau de gauche penche vers le bas ; on ajoute alors des masses dans le plateau jusqu'à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points C, O et D étant alignés sur l'horizontale.

1) Pour un courant $i \neq 0$, montrer que le moment résultant en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.

2) À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace. En déduire la relation liant $B = \|\overrightarrow{B}\|$, la somme m des masses posées sur le plateau, i, ℓ, d_1, d_2 et la norme g du champ de pesanteur.

3) La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0{,}05$ g, déterminer la plus petite valeur de B mesurable pour $i = 10$ A, $g = 10$ m.s^{-2}, $\ell = 5$ cm et $d_1 = d_2 = 10$ cm.