Dipôles électrostatiques et magnétostatiques

Dans tout le chapitre on note $(\mathscr{R})$ le référentiel d'étude et on le munit d'un repère d'espace $R = (Oxyz)$ dont la base cartésienne associée $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est orthonormale directe.

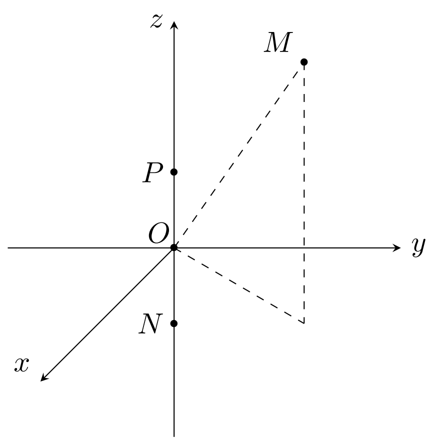
Table des matières

I. Dipôle électrostatique. Champ et potentiel créés

1) Modèle du doublet de charges électriques

Considérons deux charges ponctuelles opposées immobiles par rapport au référentiel $(\mathscr{R})$: une charge $q > 0$ placée en un point P et une charge ponctuelle $-q$ placée en un point N.

On munit le référentiel $(\mathscr{R})$ d'un repère d'espace $R = (Oxyz)$ défini de sorte que O soit le milieu de N et P et que $N \in (Oz)$ et $P \in (Oz)$, selon la figure ci-dessous :



On souhaite calculer le potentiel $V(M)$ et le champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ créés par cette distribution de charge statique en un point M situé à une distance $r = OM$ très grand devant la distance $d = NP$ entre les deux charges.

.

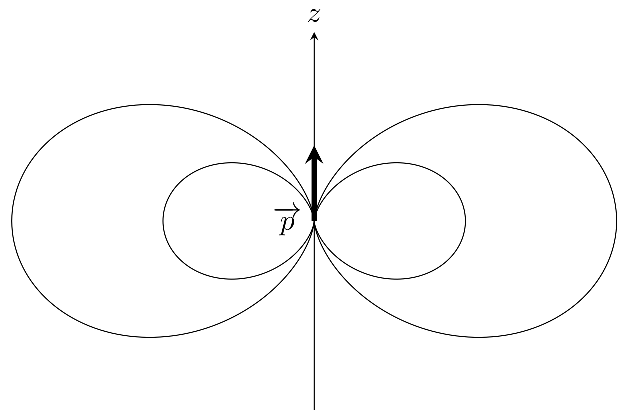


Figure 1 – Allure des lignes de champ électrostatique.

Le champ électrostatique créé par le doublet peut aussi se mettre sous la forme (à condition que $r \gg d$) :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3\,(\overrightarrow{p}\,.\,\overrightarrow{r})\ \overrightarrow{r} - r^2\,\overrightarrow{p}}{r^5}}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Exercice :

Montrer qu'on retrouve bien l'expression précédente dans la base sphérique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ lorsque $\vec{p} = p\,\overrightarrow{e_z}$.

2) Généralisation de la notion de moment dipolaire électrique

Considérons un ensemble de charges électriques ponctuelles q_i placées en des points A_i, $1 \leqslant i \leqslant N$. On suppose que la charge totale est nulle :

$$\boxed{Q_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^{N} q_i = 0}$$

.

3) Définition générale d'un dipôle électrique

On appelle *dipôle électrostatique* toute distribution de charge statique (c'est à dire immobile dans le référentiel d'étude $(\mathscr{R})$), **d'extension finie** et qui, de plus, vérifie :

1.
2.

Le potentiel électrostatique $V(M)$ créé en un point M tel que $r = OM \gg d$ est donné de façon approché :

$$\boxed{V(M) \approx \frac{\vec{p}.\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0\,OM^3} = \frac{\vec{p}.\overrightarrow{e_r}}{4\pi\varepsilon_0\,r^2}}$$

Le champ électrostatique créé est donné de façon approchée par :

$$\boxed{\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3\,(\overrightarrow{p}\,.\,\overrightarrow{r})\,\overrightarrow{r} - r^2\,\overrightarrow{p}}{r^5}}$$

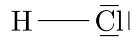
4) Intérêt en physique atomique

Une molécule (ou un simple atome) peut posséder un moment dipolaire électrique lorsque les barycentres des charges négative et positive sont différents : $N \neq P$. Cela peut arriver de deux façons :

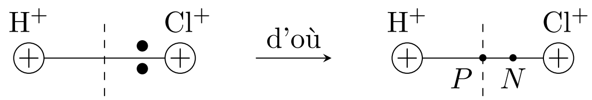
1. De façon *intrinsèque* (c'est à dire indépendamment de toute intervention externe) :

Cela arrive lorsque les éléments qui constituent la molécule possèdent des *électronégativités très différentes*. On parle de **moment dipolaire électrique permanent**.

Exemple 1 : HCl $\quad \chi(\text{Cl}) > \chi(\text{H})$



On considère que le noyau, les électrons de cœur et les doublets non liant appartiennent en propre à chaque atome ; en effet, ils sont très localisés autour du centre de l'atome. D'où le modèle :



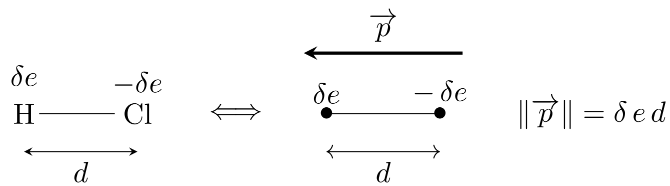
On aura donc $\overrightarrow{p} = 2e\,\overrightarrow{NP}$. L'existence de ce moment dipolaire est permanent.

Unité adaptée pour p : dans le système S.I. $[p] = $ C.m mais c'est une unité trop grande en physique atomique. On préfère utiliser le Debye, de symbole D :

$$\boxed{1\,\text{D} = \frac{1}{3}.10^{-29}\,\text{C.m}}$$

Pour HCl on a : $\|\overrightarrow{p}\| = 1{,}08$ D

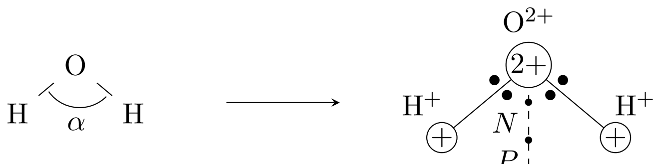
Cependant, les chimistes préfèrent utiliser un modèle différent, appelé modèle du doublet. L'atome le plus électronégatif est doté d'une chage électrique $-\delta \times e$ et l'autre atome (moins électronégatif) est doté d'une charge $+\delta \times e$. On a donc :



où d est la longueur de la liaison. Le nombre δ (sans dimension) est lié à l'électronégativité dans l'échelle de Pauling, selon la relation :

$$\delta = 1 - \exp\left[-\frac{(\,\chi(\mathrm{H}) - \chi(\mathrm{Cl})\,)^2}{4}\right]$$

Exemple 2 : H_2O $\quad \chi(\mathrm{O}) > \chi(\mathrm{H})$



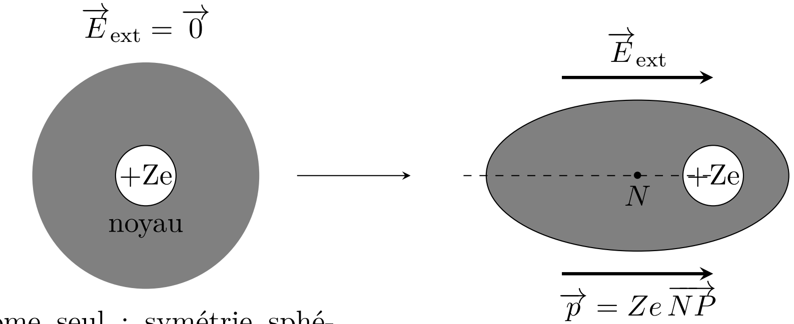
$\alpha = 105°$

$$\overrightarrow{p} = 4e\,\overrightarrow{NP} \qquad \|\overrightarrow{p}\| = 1{,}85\,\mathrm{D}$$

2. Le moment dipolaire n'existe pas naturellement mais il est créé par une *cause externe* (en pratique un champ électrique appliqué) : on parle de **dipôle induit**.

Exemple : atome

Si on applique un champ électrique extérieur $\overrightarrow{E}_{\mathrm{ext}}$



Atome seul : symétrie sphérique : $N = P$ donc $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{p}$ est appelé *moment dipolaire induit* par le champ électrique extérieur appliqué. Dans le cas où $\overrightarrow{E}_{\mathrm{ext}}$ n'est pas trop important, on a une relation linéaire :

$$\boxed{\overrightarrow{p} = \alpha\,\varepsilon_0\,\overrightarrow{E}_{\mathrm{ext}}}$$

où le coefficient $\alpha > 0$ est appelé *polarisabilité de l'atome*.

II. Action d'un champ électrostatique extérieur sur un dipôle électrostatique

Dans cette partie, un dipôle électrique est plongé dans le champ électrostatique $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$ créé par d'autres charges que celle du dipôle. On parle de champ électrostatique d'origine extérieure au dipôle.

On suppose que les charges qui créent $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$ forment une distribution de charges statique $(\rho_{\text{ext}}, \vec{0})$ où ρ_{ext} est la densité volumique stationnaire de charges associée.

Pour les calculs qui vont suivre on supposera que le dipôle est consitué de N charges ponctuelles q_i placées en des points A_i, $1 \leqslant i \leqslant N$ mais les résultats qu'on va obtenir seront valables pour n'importe quel type de dipôle.

On désignera par G le centre de masse du dipôle (ou centre d'inertie). Dans le cas de N charges ponctuelles de masses m_i, $1 \leqslant i \leqslant N$, il s'agit de l'unique point vérifiant :

$$\overrightarrow{OG} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OA_i}\right) / \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)$$

Le dipôle est caractérisé par son moment dipolaire électrique $\vec{p}$ qu'on dessinera en plaçant l'origine du vecteur en G.

1) Résultante et moment résultant

a) Définition

Pour simplifier on va considérer que le dipôle électrostatique est un ensemble de N charges ponctuelles q_i placées en des points A_i, $1 \leqslant i \leqslant N$. On considère l'ensemble des forces électrique qui agissent sur les charges électriques qui forment le dipôle :

$$\mathcal{F} = \left\{ \left(A_i, \overrightarrow{F}_{\text{él},i}\right), 1 \leqslant i \leqslant N \right\}$$

On peut définir :

- La **résultante** de ces forces :

$$\boxed{\overrightarrow{R}_{\text{él}} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F}_{\text{él},i} = \sum_{i=1}^{N} q_i \overrightarrow{E}_{\text{ext}}(A_i)}$$

- Le **moment résultant** en G de ces forces :

$$\boxed{\overrightarrow{M}_{G,\text{él}} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GA_i} \wedge \overrightarrow{F}_{\text{él},i} = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{GA_i} \wedge q_i \overrightarrow{E}_{\text{ext}}(A_i)}$$

b) Cas particulier où le champ électrostatique est uniforme

Plaçons-nous dans le cas où $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$ est **uniforme**. Dans ce cas le calcul de la résultante et du moment résultant devient très simple :

.

.

c) Cas général

On ne suppose plus que $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$ est uniforme (mais il reste toujours stationnaire car il s'agit d'un champ électrostatique). *Dans le cas très courant où la taille d du dipôle est très petite devant la distance caractéristique de variation de $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$ on fait des approximations* :

2) Énergie potentielle

L'énergie potentielle d'un dipôle placé dans un champ électrique $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$ est la somme des énergies potentielles des charges ponctuelles qui le constituent. Comme $\overrightarrow{E}_{\text{ext}}$ est stationnaire, il dérive d'un potentiel électrostatique V_{ext} tel que $\overrightarrow{E}_{\text{ext}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V_{\text{ext}}$. On a donc :

3) Lien entre force et énergie potentielle

III. Dipôle magnétique

.

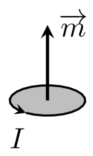
1) Définition

Définition. Dipôle magnétique

On appelle **dipôle magnétique** toute distribution de courants stationnaire de taille finie d et qui possède un moment magnétique $\overrightarrow{m} \neq \overrightarrow{0}$;

Exemples :

1. Spire de courant parcourue par un courant constant d'intensité I.



2. Moment magnétique atomique

3. Champ magnétique terrestre.

Les expériences montrent que, en première approximation, le champ magnétique terrestre a une *structure dipolaire magnétique*. Tout se passe comme s'il existait un dipôle magnétique de moment $\overrightarrow{m}$ placé au centre de la Terre. Ce dipôle est probablement généré par les mouvements des ions et des électrons constituant le plasma (matière en fusion) du noyau terrestre.

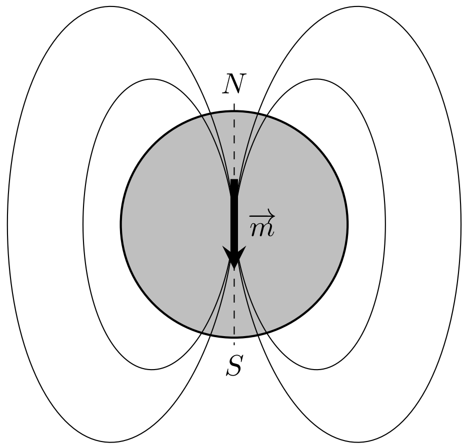


FIGURE 2 – Structure dipolaire du champ magnétique terrestre. Le moment magnétique terrestre est environ $m \approx 8\times 10^{22}$ A.m^2.

2) Champ magnétostatique créé à grande distance du dipôle

Soit d la taille du dipôle magnétostatique. En un point M situé à un grande distance r du dipôle, c'est à dire tel que $r \gg d$, on montre que le champ magnétostatique $\overrightarrow{B}(M)$ créé a la même expression mathématique que le champ électrostatique $\overrightarrow{E}$ créé par un dipôle électrostatique.

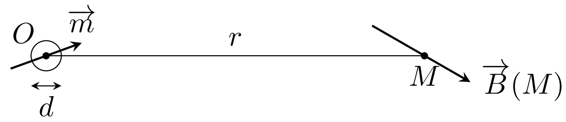


FIGURE 3 –

Le dipôle magnétostatique est placé autour du point O. On pose $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}$ et $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$. On a alors :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\left(\overrightarrow{m}.\overrightarrow{r}\right)\overrightarrow{r} - r^2\,\overrightarrow{m}}{r^5}}$$

Analogies :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} &\longleftrightarrow \frac{\mu_0}{4\pi} \\ \overrightarrow{p} &\longleftrightarrow \overrightarrow{m} \\ \overrightarrow{E} &\longleftrightarrow \overrightarrow{B} \end{aligned}$$

Cas particulier où $\overrightarrow{m} = m\,\overrightarrow{e_z}$:

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m}{r^3}\left(2\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)}$$

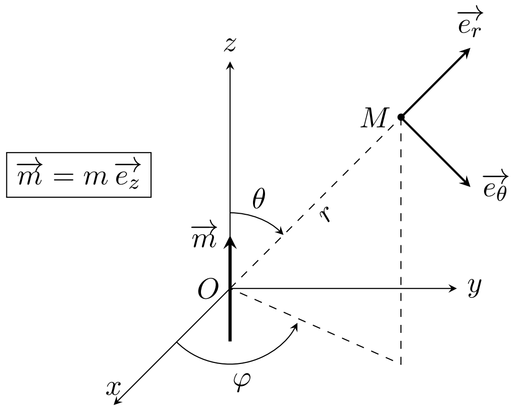


FIGURE 4 –

3) Action d'un champ magnétostatique extérieur sur un dipôle magnétique

Supposons maintenant qu'un dipôle magnétostatique de moment $\overrightarrow{m}$ soit placé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$, dit "extérieur", c'est à dire créé par d'autres sources que le dipôle.

a) Champ extérieur uniforme

Dans le cas où le dipôle est une petite spire de courant, les actions exercées par $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$ sur le dipôle sont les forces de Laplace et on sait d'après le cours de magnétostatique qu'elles forment *un couple* :

$$\boxed{\text{Résultante : } \overrightarrow{F_L} = \vec{0} \;\; ; \;\; \text{Moment : } \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}}$$

où le moment résultant est *indépendant du point par rapport auquel on le calcule.*

On admettra que ce résultat ne dépend pas de la nature du dipôle magnétique (petite spire, atome, aimant, ...)

Les actions magnétiques exercées par un champ magnétostatique extérieur $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$ uniforme sur un dipôle magnétostatique quelconque forment un *couple* ($\overrightarrow{F_m} = \vec{0}$) dont le moment résultant est donné par :

$$\overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}$$

b) Champ magnétostatique extérieur non uniforme

Dans le cas où la taille L du dipôle magnétostatique est très petite devant la distance caractéristique de variation de $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$ on peut se contenter d'un développement limité de $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$ à l'ordre 1 au voisinage du centre d'inertie G du dipôle.

On trouve que les actions magnétiques exercées par $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$ ont la même expression que pour le dipôle électrostatique, c'est à dire :

$$\boxed{\overrightarrow{F_m} = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\overrightarrow{m}.\overrightarrow{B}_{\text{ext}}\right)(G) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\Gamma_G} = \overrightarrow{m} \wedge \overrightarrow{B}_{\text{ext}}(G)}$$

On montre aussi que les forces magnétiques exercées sur le dipôle sont conservatives. On peut leur associer l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_P^{(\text{magn})} = -\,\overrightarrow{m}.\overrightarrow{B}_{\text{ext}}(G)}$$

appelée *énergie potentielle magnétique du dipôle* :

La résultante des forces magnétiques exercées par $\overrightarrow{B}_{\text{ext}}$ sur le dipôle magnétique peut aussi être calculée grâce à la formule :

$$\boxed{\overrightarrow{F_m} = -\,\overrightarrow{\text{grad}}\,E_P^{(\text{magn})}(G)}$$

où il faut considérer que le vecteur $\overrightarrow{m}$ est constant quand on dérive $E_P^{(\text{magn})}$.

Remarque :

Lorsque l'on dit qu'on place un dipôle magnétique en un point M, cela signifie que son centre d'inertie G est en M.