**ÉQUATIONS DE MAXWELL EN RÉGIME VARIABLE**

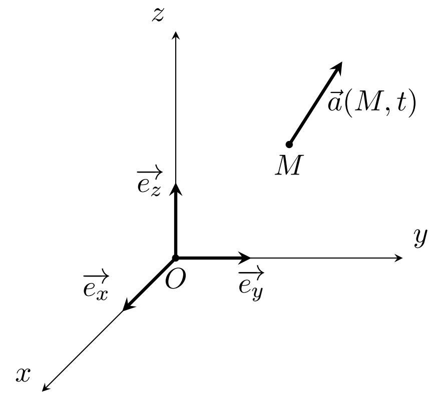
# Table des matières



L'espace, vu comme un ensemble continu de points, sera noté $\mathscr{E}$.

On considère dans ce chapitre un référentiel $(\mathscr{R})$ supposé galiléen, muni d'un repère d'espace $R = (Oxyz)$ de base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ orthonormée directe et d'une horloge $(H)$ permettant de mesurer le temps $t$.

On étudie dans ce chapitre des champs scalaires $f$ et vectoriels $\vec{a}$ qui dépendent à la fois des trois coordonnées d'espace et du temps $t$ ; ces quatre coordonnées spatio-temporelles sont indépendantes les unes des autres.




Selon le système de coordonnées utilisé ces champs s'écriront sous la forme :

1. **Coordonnées cartésiennes** :

$$f(M,t) = f(x,y,z,t)$$
$$\vec{a}(M,t) = a_x(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x} + a_y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y} + a_z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

2. **Coordonnées cylindriques** :

$$f(M,t) = f(r,\theta,z,t)$$
$$\vec{a}(M,t) = a_r(r,\theta,z,t)\,\overrightarrow{e_r} + a_\theta(r,\theta,z,t)\,\overrightarrow{e_\theta} + a_z(r,\theta,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

3. **Coordonnées sphériques** :

$$f(M,t) = f(r,\theta,\varphi,t)$$
$$\vec{a}(M,t) = a_r(r,\theta,\varphi,t)\,\overrightarrow{e_r} + a_\theta(r,\theta,\varphi,t)\,\overrightarrow{e_\theta} + a_\varphi(r,\theta,\varphi,t)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

**Remarque** :

.

Le temps $t$ étant indépendant des coordonnées d'espace, on introduit la dérivée partielle par rapport au temps. Par exemple, dans le système des coordonnées sphériques on aura :

**Identités remarquables** :

# I. Les quatre équations de Maxwell en régime variable

On considère dans ce chapitre une distribution de charge et de courant $(\rho, \vec{j})$ définie en tout point $M \in \mathscr{E}$ et à chaque instant $t$ :

$$\rho : (M,t) \longmapsto \rho(M,t) \quad \text{et} \quad \vec{j} : (M,t) \longmapsto \vec{j}(M,t)$$

Ces deux grandeurs sont liées par l'équation de conservation de la charge électrique :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \ \mathrm{div}\,\vec{j}(M,t) + \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} = 0}$$

On appellera :

- **Domaine chargé** $\mathscr{D}_{\text{charge}}(t)$ à l'instant $t$ l'ensemble des points vérifiant :

$$\mathscr{D}_{\text{charge}}(t) = \{\, M \in \mathscr{E} \mid \rho(M,t) \neq 0 \,\}$$

- **Domaine des courants** $\mathscr{D}_{\text{courant}}(t)$ à l'instant $t$ l'ensemble des points vérifiant :

$$\mathscr{D}_{\text{courant}}(t) = \left\{\, M \in \mathscr{E} \mid \vec{j}(M,t) \neq \vec{0} \,\right\}$$

**Schéma de l'interaction électromagnétique** :

Distribution de charge et de courant $(\rho, \vec{j})$ $\xrightarrow{\text{crée en tout point } M \in \mathscr{E} \text{ et à chaque instant } t}$ $\boxed{\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t)}$

$\downarrow$ se révèlent en agissant sur une charge ponctuelle test $q_T$ placée en $M$

$$\boxed{\overrightarrow{F_{em}} = q_T\,\vec{E}(M,t) + q_T\,\vec{v} \wedge \vec{B}(M,t)}$$

## 1) Équations de Maxwell

*Dans le cas général, les équations de Maxwell sont au nombre de 4. Ce sont les postulats fondamentaux de l'électromagnétisme et elles prennent la forme suivante :*

### a) Équation de Maxwell - Gauss : MG

En électrostatique on avait : $\mathrm{div}\,\vec{E}(M) = \rho(M)/\varepsilon_0$ en tout point $M$. Cette équation est aussi valable en régime variable quelconque :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \mathrm{div}\,\vec{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}}$$

**Forme intégrale** :

## b) Équation de Maxwell - Thomson : MT

Dans le cadre des champs magnétiques stationnaires on avait : $\text{div}\,\overrightarrow{B}(M) = 0$ en tout point $M$. Cette équation est aussi valable en régime variable quelconque :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \text{div}\,\overrightarrow{B}(M,t) = 0}$$

Le champ magnétique *est à flux conservatif.*

**Forme intégrale** :

## c) Équation de Maxwell-Faraday : MF

En électrostatique on avait $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}(M) = \vec{0}$ en tout point $M \in \mathscr{E}$. Cette équation n'est pas valable en régime variable et on doit la modifier en :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \ \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}(M,t)}$$

**Forme intégrale** :

### d) Équation de Maxwell-Ampère : MA

.

En régime stationnaire on avait $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}(M) = \mu_0\,\vec{j}(M)$. Cependant, cette équation ne peut pas être étendue au régime variable car *elle n'est pas compatible avec l'équation de conservation de la charge électrique.*

En effet :

**Remarques :**

Afin de la rendre compatible avec C.C., Maxwell a transformé cette équation en :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \ \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0\,\left\{\vec{j}(M,t) + \varepsilon_0\,\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}(M,t)\right\}}$$

**Forme intégrale** :

## 2) Compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge

*L'équation de conservation de la charge électrique peut se déduire des équations de Maxwell. On a :*

## 3) Cas particulier du régime stationnaire

## 4) Symétries

Les symétries sont de même nature que dans le cas des régimes stationnaires étudiés dans les chapitres précédents, sauf qu'il faut maintenant tenir compte **à la fois** des plans de symétrie ou d'antisymétrie de la densité volumique de charge $\rho$ et de la densité volumique de courants $\vec{j}$ ainsi que de leurs invariances.

**Principe de symétrie**

1. Tout plan de **symétrie** de $\rho$ et de $\vec{j}$ est un plan de **symétrie** de $\overrightarrow{E}$ et un plan **d'antisymétrie** de $\overrightarrow{B}$.
2. Tout plan de **d'anti-symétrie** de $\rho$ et de $\vec{j}$ est un plan **d'anti-symétrie** de $\overrightarrow{E}$ et un plan **de symétrie** de $\overrightarrow{B}$.
3. Si $\rho$ et $\vec{j}$ sont invariants par une translation (le long de $Oz$ par exemple) alors $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont invariants par la même translation.
4. Si $\rho$ et $\vec{j}$ sont invariants par une rotation autour d'un axe $\Delta$ alors $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont invariants par la même rotation.

## 5) Théorème de superposition

Soient $(\rho_1, \vec{j}_1)$ et $(\rho_2, \vec{j}_2)$ deux distributions de charge et de courant, définies en tout point $M \in \mathscr{E}$ et à chaque instant $t$. On appelle **distribution superposée** la distribution $(\rho, \vec{j})$ telle que :

$$\boxed{\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 \quad \text{et} \quad \vec{j} = \alpha_1\vec{j}_1 + \alpha_2\vec{j}_2}$$

La linéarité des équations de Maxwell entraîne le théorème ci-dessous :

**Théorème de superposition**

Si $(\rho_1, \vec{j}_1)$ crée un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{B_1})$ et si $(\rho_2, \vec{j}_2)$ crée un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{B_2})$, alors la distribution superposée créé un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ vérifiant :

$$\overrightarrow{E} = \alpha_1\overrightarrow{E_1} + \alpha_2\overrightarrow{E_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B} = \alpha_1\overrightarrow{B_1} + \alpha_2\overrightarrow{B_2}$$

### 6) Transformation galiléenne du champ électromagnétique

### 7) Les potentiels élctromagnétiques

## II. Existence des ondes électromagnétiques

*Les équations de Maxwell (1864) prédisent l'existence d'ondes électromagnétiques qui se propagent dans le vide à la vitesse de la lumière $c = 3 \times 10^8\ m.s^{-1}$. Cette existence ne fut constatée expérimentalement que 23 ans plus tard, en 1887 par Heinrich Herz.*

### 1) Le phénomène ondulatoire

### 2) Onde sur une corde vibrante

### 3) Ondes électromagnétiques dans le vide

# III. Équations de Maxwell dans la zone ARQS

## 1) Définition de la zone ARQS

## 2) Équations de Maxwell dans la zone ARQS