ÉQUATIONS DE MAXWELL EN RÉGIME VARIABLE

Table des matières

I. Les quatre équations de Maxwell en régime variable 3
1) Équations de Maxwell 3
a) Équation de Maxwell - Gauss : MG 3
b) Équation de Maxwell - Thomson : MT 4
c) Équation de Maxwell-Faraday : MF 4
d) Équation de Maxwell-Ampère : MA 5
2) Compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge 6
3) Cas particulier du régime stationnaire 6
4) Symétries 6
5) Théorème de superposition 6

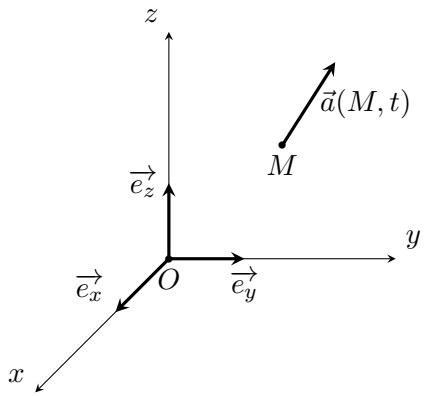
II. Existence des ondes électromagnétiques 7
1) Le phénomène ondulatoire 7
2) Ondes électromagnétiques dans le vide 7
3) Les potentiels électromagnétiques 8

III. Équations de Maxwell dans la zone ARQS 9
1) Définition de la zone ARQS 9
2) Équations de Maxwell dans la zone ARQS 10
a) Équations de Maxwell pour le champ magnétique 10
b) Équations de Maxwell pour le champ électrique 11

L'espace, vu comme un ensemble continu de points, sera noté $\mathscr{E}$.

On considère dans ce chapitre un référentiel $(\mathscr{R})$ supposé galiléen, muni d'un repère d'espace $R = (Oxyz)$ de base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ orthonormée directe et d'une horloge (H) permettant de mesurer le temps t.

On étudie dans ce chapitre des champs scalaires f et vectoriels $\vec{a}$ qui dépendent à la fois des trois coordonnées d'espace et du temps t ; ces quatre coordonnées spatio-temporelles sont indépendantes les unes des autres.



Selon le système de coordonnées utilisé ces champs s'écriront sous la forme :

1. **Coordonnées cartésiennes** :

$$f(M,t) = f(x,y,z,t)$$
$$\vec{a}(M,t) = a_x(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_x} + a_y(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_y} + a_z(x,y,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

2. **Coordonnées cylindriques** :

$$f(M,t) = f(r,\theta,z,t)$$
$$\vec{a}(M,t) = a_r(r,\theta,z,t)\,\overrightarrow{e_r} + a_\theta(r,\theta,z,t)\,\overrightarrow{e_\theta} + a_z(r,\theta,z,t)\,\overrightarrow{e_z}$$

3. **Coordonnées sphériques** :

$$f(M,t) = f(r,\theta,\varphi,t)$$
$$\vec{a}(M,t) = a_r(r,\theta,\varphi,t)\,\overrightarrow{e_r} + a_\theta(r,\theta,\varphi,t)\,\overrightarrow{e_\theta} + a_\varphi(r,\theta,\varphi,t)\,\overrightarrow{e_\varphi}$$

Remarque :

Le temps t étant indépendant des coordonnées d'espace, on introduit la dérivée partielle par rapport au temps. Par exemple, dans le système des coordonnées sphériques on aura :

.

Identités remarquables :

I. Les quatre équations de Maxwell en régime variable

On considère dans ce chapitre une distribution de charge et de courant $(\rho, \vec{j})$ définie en tout point $M \in \mathscr{E}$ et à chaque instant t :

$$\rho : (M,t) \longmapsto \rho(M,t) \quad \text{et} \quad \vec{j} : (M,t) \longmapsto \vec{j}(M,t)$$

Ces deux grandeurs sont liées par l'équation de conservation de la charge électrique :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \ \operatorname{div} \vec{j}(M,t) + \frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} = 0}$$

On appellera :

- **Domaine chargé** $\mathscr{D}_{\text{charge}}(t)$ à l'instant t l'ensemble des points vérifiant :

$$\mathscr{D}_{\text{charge}}(t) = \{\, M \in \mathscr{E} \mid \rho(M,t) \neq 0 \,\}$$

- **Domaine des courants** $\mathscr{D}_{\text{courant}}(t)$ à l'instant t l'ensemble des points vérifiant :

$$\mathscr{D}_{\text{courant}}(t) = \left\{\, M \in \mathscr{E} \mid \vec{j}(M,t) \neq \vec{0} \right\}$$

Schéma de l'interaction électromagnétique :

Distribution de charge et de courant $(\rho, \vec{j})$ —crée en tout point $M \in \mathscr{E}$ et à chaque instant t→ $\boxed{\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t)}$

$\boxed{\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t)}$ —se révèlent en agissant sur une charge ponctuelle test q_T placée en M↓

$$\boxed{\overrightarrow{F_{em}} = q_T\, \overrightarrow{E}(M,t) + q_T\, \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}(M,t)}$$

1) Équations de Maxwell

Dans le cas général, les équations de Maxwell sont au nombre de 4. Ce sont les postulats fondamentaux de l'électromagnétisme et elles prennent la forme suivante :

a) Équation de Maxwell - Gauss : MG

En électrostatique on avait : $\operatorname{div} \overrightarrow{E}(M) = \rho(M)/\varepsilon_0$ en tout point M. Cette équation est aussi valable en régime variable quelconque :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \operatorname{div} \overrightarrow{E}(M,t) = \frac{\rho(M,t)}{\varepsilon_0}}$$

Forme intégrale :

b) Équation de Maxwell - Thomson : MT

Dans le cadre des champs magnétiques stationnaires on avait : $\text{div}\,\overrightarrow{B}(M) = 0$ en tout point M. Cette équation est aussi valable en régime variable quelconque :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \text{div}\,\overrightarrow{B}(M,t) = 0}$$

Le champ magnétique *est à flux conservatif.*

Forme intégrale :

c) Équation de Maxwell-Faraday : MF

En électrostatique on avait $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}(M) = \vec{0}$ en tout point $M \in \mathscr{E}$. Cette équation n'est pas valable en régime variable et on doit la modifier en :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}(M,t)}$$

Forme intégrale :

d) Équation de Maxwell-Ampère : MA

En régime stationnaire on avait $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}(M) = \mu_0\,\vec{j}(M)$. Cependant, cette équation ne peut pas être étendue au régime variable car *elle n'est pas compatible avec l'équation de conservation de la charge électrique.*

En effet :

.

Remarques :

Afin de la rendre compatible avec C.C., Maxwell a transformé cette équation en :

$$\boxed{\forall\, M \in \mathscr{E},\ \forall\, t,\ \ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}(M,t) = \mu_0\ \left\{ \vec{j}(M,t) + \varepsilon_0\,\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M,t) \right\}}$$

Forme intégrale :

2) Compatibilité des équations de Maxwell avec la conservation de la charge

L'équation de conservation de la charge électrique peut se déduire des équations de Maxwell. On a :

3) Cas particulier du régime stationnaire

4) Symétries

Les symétries sont de même nature que dans le cas des régimes stationnaires étudiés dans les chapitres précédents, sauf qu'il faut maintenant tenir compte **à la fois** des plans de symétrie ou d'antisymétrie de la densité volumique de charge ρ et de la densité volumique de courants $\vec{j}$ ainsi que de leurs invariances.

Principe de symétrie

1. Tout plan de **symétrie** de ρ et de $\vec{j}$ est un plan de **symétrie** de $\overrightarrow{E}$ et un plan **d'antisymétrie** de $\overrightarrow{B}$.
2. Tout plan de **d'anti-symétrie** de ρ et de $\vec{j}$ est un plan **d'anti-symétrie** de $\overrightarrow{E}$ et un plan **de symétrie** de $\overrightarrow{B}$.
3. Si ρ et $\vec{j}$ sont invariants par une translation (le long de Oz par exemple) alors $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont invariants par la même translation.
4. Si ρ et $\vec{j}$ sont invariants par une rotation autour d'un axe Δ alors $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ sont invariants par la même rotation.

5) Théorème de superposition

Soient $(\rho_1, \vec{j}_1)$ et $(\rho_2, \vec{j}_2)$ deux distributions de charge et de courant, définies en tout point $M \in \mathscr{E}$ et à chaque instant t. On appelle **distribution superposée** la distribution $(\rho, \vec{j})$ telle que :

$$\boxed{\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 \quad \text{et} \quad \vec{j} = \alpha_1\vec{j}_1 + \alpha_2\vec{j}_2}$$

La linéarité des équations de Maxwell entraîne le théorème ci-dessous :

Théorème de superposition

Si $(\rho_1, \vec{j}_1)$ crée un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{B_1})$ et si $(\rho_2, \vec{j}_2)$ crée un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E_2}, \overrightarrow{B_2})$, alors la distribution superposée créé un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ vérifiant :

$$\overrightarrow{E} = \alpha_1\overrightarrow{E_1} + \alpha_2\overrightarrow{E_2} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B} = \alpha_1\overrightarrow{B_1} + \alpha_2\overrightarrow{B_2}$$

II. Existence des ondes électromagnétiques

Les équations de Maxwell (1864) prédisent l'existence d'ondes électromagnétiques qui se propagent dans le vide à la vitesse de la lumière $c = 3{\times}10^8$ $m.s^{-1}$. Cette existence ne fut constatée expérimentalement que 23 ans plus tard, en 1887 par Heinrich Herz.

1) Le phénomène ondulatoire

L'une des équations aux dérivées partielles les plus importantes qui décrit la propagation d'une onde *dans un milieu non dispersif et non absorbant* est l'équation de d'Alembert. Si $s(M,t)$ est la grandeur qui se propage, alors :

$$\boxed{\Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0}$$

À une dimension, lorsque s ne dépend que d'une coordonnée x et du temps t : $s = s(x,t)$ l'équation s'écrit :

Exemples :

1. Onde sur une corde :



2. Onde sonore :

Analyse dimensionnelle :

2) Ondes électromagnétiques dans le vide

.

.

3) Les potentiels électromagnétiques

III. Équations de Maxwell dans la zone ARQS

1) Définition de la zone ARQS

Reprenons l'expressions des potentiels en régime variable :

$$V(M,t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathscr{E}} \frac{\rho(P, t - PM/c)}{PM} \, \mathrm{d}\tau_P$$

et

$$\overrightarrow{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathscr{E}} \frac{\vec{j}(P, t - PM/c)}{PM} \, \mathrm{d}\tau_P$$

Dans la première intégrale on ne somme que sur le domaine chargé $\mathscr{D}_{\text{charge}}(t)$ (puisque $\rho = 0$ en dehors de ce domaine) et dans la seconde sur le domaine des courants $\mathscr{D}_{\text{courant}}(t)$, les deux domaines étant pris à l'instant t.

En pratique la distribution de charges et de courants est **bornée** et, de plus, les charges et les courants n'existent que dans un volume fini $\mathscr{V}$ de l'espace, invariable au cours du temps, ce qui fait que les deux intégrales se calculent sur $\mathscr{V}$.

Exemple :

En général, ρ et $\vec{j}$ évoluent temporellement avec une durée caractéristique Δt_{car} (il se peut que ρ et $\vec{j}$ n'aient pas la même durée caractéristique d'évolution mais dans ce cas Δt_{car} est la plus petite des deux durées).

Exemples :

Dans le cas où $L(M)/c \ll \Delta t_{\text{car}}$ on peut négliger le retard temporel PM/c dans les deux intégrales, ce qui donne l'expression approchée des potentiels en M :

$$V(M,t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathscr{E}} \frac{\rho(P,t)}{PM} \,\mathrm{d}\tau_P$$

et

$$\overrightarrow{A}(M,t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathscr{E}} \frac{\vec{j}(P,t)}{PM} \,\mathrm{d}\tau_P$$

Cette approximation porte le nom *d'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) au point M*.

Dans cette approximation, la valeur des potentiels en M à l'instant t ne dépend que des valeurs de ρ et de $\vec{j}$ au même instant t. La durée de propagation entre chaque point P de la distribution de charges et de courants et le point M est tellement courte que peut l'assimiler à zéro.

Définition. Zone ARQS

La *zone ARQS* est l'ensemble des points $M \in \mathscr{E}$ qui vérifient la propriété $L(M) \ll c\,\Delta t_{\text{car}}$. En pratique on fera une approximation au centième : $L(M) \leqslant \frac{c\Delta t_{\text{car}}}{100}$.

Lien avec le cours de MPSI

2) Équations de Maxwell dans la zone ARQS

Soit M un point de la zone ARQS. Les potentiels vecteur magnétique et scalaire en M peut s'écrire de façon approchée :

$$\overrightarrow{A}(M,t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathscr{E}} \frac{\vec{j}(P,t)}{PM} \,\mathrm{d}\tau_P$$

et

$$V(M,t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathscr{E}} \frac{\rho(P,t)}{PM} \,\mathrm{d}\tau_P$$

Les champs magnétique et électrique s'en déduisent par :

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V - \frac{\partial \overrightarrow{A}}{\partial t}$$

a) Équations de Maxwell pour le champ magnétique

En régime stationnaire on a de façon exacte :

$$\overrightarrow{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathscr{E}} \frac{\vec{j}(P)}{PM} \,\mathrm{d}\tau_P \quad \text{et} \quad \overrightarrow{B} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A}$$

b) Équations de Maxwell pour le champ électrique

Bilan de ce chapitre

Points du cours à connaître :

- Les 4 équations de Maxwell : formulation locale et intégrale en utilisant les théorèmes d'Ostrogradski et de Stokes.
- Obtenir la loi de conservation de la charge électrique à partir des équations de Maxwell.
- Connaître les lois de symétries des charges et des courants et leur répercussion sur $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$.
- Établir l'équation de d'Alembert pour le champ électromagnétique dans le vide à partir des équations de Maxwell.
- Connaître le critère pour que l'approximation des régimes quasi-stationaires soit valable en un point M donné. Savoir que la zone A.R.Q.S. est constituée de l'ensemble des points M vérifiant le critère précédent. Donner les équations de Maxwell dans la zone A.R.Q.S.

Exercices à travailler :

- En priorité : 3 et 4
- S'il y a le temps : 1 et 2

****

Chapitre sur l'énergie électromagnétique

- Connaître la densité volumique de la puissances des forces de Lorentz : $\vec{j}.\overrightarrow{E}$ ainsi que la puissance des forces de lotentz agissant sur les porteur de charge situés dans un volume $\mathcal{V}$. Savoir ce qu'elle représente.
- Connaître les expressions du vecteur de Poyting $\vec{\pi}$ et de la densité volumique d'énergie électromagnétique u_{em}. Savoir ce qu'ils représentent.

- Faire un bilan d'énergie électromagnétique sur un volume $\mathcal{V}$: équation intégrale puis équation locale (identité de Poynting).
- Connaître par cœur la résistance R d'un fil (cylindre) de longueur L, section S, conductivité électrique γ.

Exercices à travailler :

- En priorité : exercice résolu du cours 4 (avec calcul de la résistance ohmique d'un cylindre) et 5
- S'il y a le temps : 1 et 3