

1 Le protoxyde d'azote : un gaz prétendument "fun" ? CCINP MP 2021

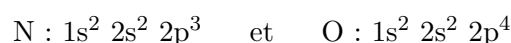
La molécule N₂O

Données :

- Numéros atomiques : $Z_N = 7$; $Z_O = 8$
- Électronégativités : $\chi_N = 3,0$; $\chi_O = 3,4$

Q1. a) Donner la structure de Lewis des trois formes mésomères de la molécule N₂O (l'atome central est un atome d'azote).

Les configurations électroniques de N et O sont :



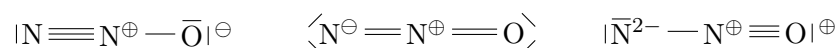
ce qui montre que les nombres d'électrons de valence de N et O sont respectivement :

$$N_v(N) = 5 \text{ et } N_v(O) = 6$$

Le nombre d'électrons de valence de la molécule de N₂O est : $N_v = 5 \times 2 + 6 = 16$, ce qui donne 8 doublets disponibles. Une première esquisse de la formule de Lewis qui assure les liaisons covalentes entre les atomes ainsi que la règle de l'octet des atomes périphériques est :



Cependant dans cette configuration l'atome central N ne respecte pas la règle de l'octet. Il faut donc déplacer des doublets non liants pour assurer cette règle. On constate qu'il y a 3 possibilités (on a aussi représenté les charges formelles) :



b) Justifier par un argument simple laquelle est la plus probable. Expliquer si on peut conclure à l'existence d'un moment dipolaire pour la molécule N₂O.

Les formules les plus probables sont celles qui contiennent le moins de charges formelles possible (c'est une question de stabilité de l'édifice chimique) et où les charges formelles négatives sont portées par les atomes les plus électronégatifs. Seule la première formule de Lewis correspond à ces deux critères :



L'existence d'une charge \oplus sur N et d'une charge \ominus sur O entraîne l'existence d'un moment dipolaire électrique \vec{p} permanent de la molécule, dirigé de O vers N

Obtention de N₂O

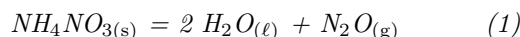
Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

Données thermodynamiques à 298 K

	NH ₄ NO _{3(s)}	H ₂ O _(ℓ)	N ₂ O _(g)	N _{2(g)}	O _{2(g)}
Enthalpie standard de formation $\Delta_f H^\circ$ (kJ.mol ⁻¹)	- 365,6	- 285,1	82,05		
Entropie molaire standard S_m° (J.K ⁻¹ .mol ⁻¹)	151,1	69,91	219,9	191,3	204,8

	NH ₄ NO ₃	H ₂ O
Enthalpie standard de fusion $\Delta_{\text{fus}}H^\circ$ (kJ.mol ⁻¹)	5,86	
Température de fusion T_{fus} (K)	443	
Enthalpie standard de vaporisation $\Delta_{\text{vap}}H^\circ$ (kJ.mol ⁻¹)		40,8
Température de vaporisation T_{vap} (K)		373

Q2. Le protoxyde d'azote est préparé par décomposition du nitrate d'ammonium. Pour une température $T < 373$ K l'équation-bilan de la réaction est :



a) Calculer l'enthalpie et l'entropie standard de la réaction (1)

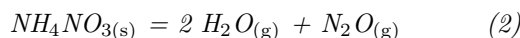
La loi de Hess donne à 298 K :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^\circ &= \Delta_f H^\circ(\text{N}_2\text{O}_{(g)}) + 2 \times \Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}) - \Delta_f H^\circ(\text{NH}_4\text{NO}_{3(s)}) \\ &= 82,5 + 2 \times (-285,1) - (-365,6) = -122,1 \text{ kJ.mol}^{-1} \end{aligned}$$

Pour l'entropie standard de la réaction, on utilise sa définition :

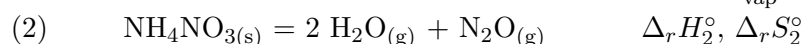
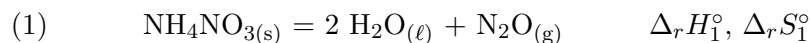
$$\begin{aligned} \Delta_r S_1^\circ &= S_m^\circ(\text{N}_2\text{O}_{(g)}) + 2 \times S_m^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\ell)}) - S_m^\circ(\text{NH}_4\text{NO}_{3(s)}) \\ &= 219,9 + 2 \times 69,91 - 151,1 = 208,6 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

b) Pour $373 \text{ K} < T < 443 \text{ K}$ l'équation-bilan de la réaction s'écrit :



Calculer l'enthalpie et l'entropie standard de la réaction (2).

On commence par se placer à la température $T_{\text{vap}} = 373$ K de vaporisation de l'eau. À cette température particulière coexistent les trois réactions :



On constate que $(2) = (1) + 2 \times (1')$ ce qui implique, par le théorème des combinaisons linéaires :

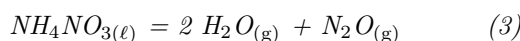
$$\boxed{\Delta_r H_2^\circ = \Delta_r H_1^\circ + 2 \times \Delta_{\text{vap}} H^\circ \quad \text{et} \quad \Delta_r S_2^\circ = \Delta_r S_1^\circ + 2 \times \Delta_{\text{vap}} S^\circ}$$

A.N. :

$$\Delta_r H_2^\circ = -40,5 \text{ kJ.mol}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta_r S_2^\circ = 427,4 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

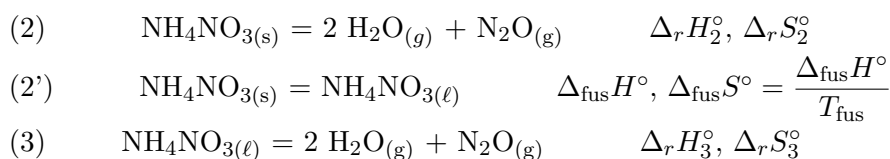
Pour $373 \text{ K} < T < 443 \text{ K}$, $\Delta_r H_2^\circ$ et $\Delta_r S_2^\circ$ ne varient pas avec la température (approximation d'Ellingham). Leurs valeurs sont donc celles calculées à 373 K.

c) Enfin, pour $T > 443 \text{ K}$, on assiste à :



Calculer l'enthalpie et l'entropie standard de la réaction (3). Cette réaction est-elle thermodynamiquement favorisée à basse ou à haute température ? Justifier votre réponse.

On recommence le même raisonnement qu'à la question précédente. On se place à la température $T_{\text{fus}} = 443$ K à laquelle coexistent les trois réactions ci-dessous :



On constate que (3) = (2) - (2') ce qui implique, par le théorème des combinaisons linéaires :

$$\boxed{\Delta_r H_3^\circ = \Delta_r H_2^\circ - \Delta_{\text{fus}} H^\circ \quad \text{et} \quad \Delta_r S_3^\circ = \Delta_r S_2^\circ - \Delta_{\text{fus}} S^\circ}$$

A.N. :

$$\Delta_r H_3^\circ = -46,36 \text{ kJ.mol}^{-1} \quad \text{et} \quad \Delta_r S_3^\circ = 414,1 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$$

Pour $443 \text{ K} < T$, $\Delta_r H_3^\circ$ et $\Delta_r S_3^\circ$ gardent les mêmes valeurs en vertu de l'approximation d'Ellingham.

Le signe > 0 et la grande valeur de $\Delta_r S_3^\circ$ viennent de l'augmentation du "désordre" importante par passage d'une mole de liquide à 3 moles de gaz.

On remarque que $\Delta_r H_3^\circ < 0$. Selon la loi de modération de Van't Hoff, toute augmentation de température déplace l'équilibre chimique (3) dans le sens indirect \leftarrow . La réaction (3) est donc favorisée à basse température.

- d) Exprimer l'enthalpie libre standard de réaction $\Delta_r G^\circ(T)$ pour $T > 443 \text{ K}$. Calculer la constante d'équilibre de la réaction (3) à 520 K . Commenter.

Pour $T > 443 \text{ K}$ on a :

$$\Delta_r G^\circ(T) = \Delta_r H_3^\circ - T \Delta_r S_3^\circ$$

A.N. à 520 K : $\Delta_r G^\circ = -261,7 \text{ kJ.mol}^{-1}$. on en déduit :

$$\boxed{K^\circ = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right) = 2 \times 10^{26}}$$

La réaction est donc totale à cette température.

Q3. Dans cette question, on considère un domaine de température tel que la réaction (3) est un équilibre chimique. Quelle est alors l'influence sur cet équilibre :

- a) de l'ajout de vapeur d'eau à température et volume constants ?

À l'équilibre, le quotient de réaction $Q_r = \frac{P(\text{N}_2\text{O})P(\text{H}_2\text{O})^2}{(P^\circ)^3}$ est égal à la constante d'équilibre K° .

Si on ajoute de la vapeur d'eau de manière isotherme et isochore on augmente $P(\text{H}_2\text{O})$ sans modifier $P(\text{N}_2\text{O})$ ni K° . Q_r augmente et devient supérieur à K° . Pour "rejoindre" la constante d'équilibre, il faut donc que le système évolue dans le sens indirect \leftarrow .

- b) de l'ajout d'un gaz inerte à température et pression constantes ?

Si on ajoute un gaz inerte de manière isotherme et isobare on diminue les pressions partielles, donc Q_r . Pour "rejoindre" la constante d'équilibre, il faut donc que le système évolue dans le sens direct \rightarrow .

Aspect cinétique de la décomposition de N_2O

Soit la réaction de décomposition de N_2O suivante, supposée totale dans le domaine de température T considéré :



À l'instant initial $t = 0$, on introduit dans un réacteur thermostaté à la température T , de volume constant V , préalablement vidé, une quantité n_1 de protoxyde d'azote à la pression initiale P_1 . Soit $n(t)$ la quantité de matière en protoxyde d'azote à une date ultérieure t quelconque.

Q4. Établir l'expression de $P(t) - \frac{3}{2}P_1$ en fonction de $n(t)$, R , T et V .

Faisons un tableau d'avancement :

	N_2O	N_2	O_2	n_g
E.I.	n_1	0	0	n_1
instant t	$n_1 - \xi$	ξ	$\xi/2$	$n_1 + \xi/2$

On a $n(t) = n_1 - \xi$ donc $\xi = n_1 - n(t)$. La loi des gaz parfaits donne :

$$P(t) = \frac{n_g RT}{V} = \left(\frac{3n_1}{2} - \frac{n(t)}{2} \right) \frac{RT}{V} \quad \text{et} \quad P_1 = \frac{n_1 RT}{V}$$

On en déduit :

$$P(t) - \frac{3}{2}P_1 = -\frac{n(t)}{2} \frac{RT}{V}$$

Q5. En déduire l'expression de la vitesse volumique de la réaction $v = -\frac{1}{V} \frac{dn}{dt}$ en fonction de R , T et $\frac{dP}{dt}$.

La vitesse s'écrit :

$$v = -\frac{1}{V} \frac{dn}{dt} = \frac{2}{RT} \frac{dP}{dt}$$

La réaction est d'ordre 1 par rapport à N_2O avec k la constante de vitesse à la température T .

Q6. Établir l'équation différentielle vérifiée par $P(t)$. On la mettra sous la forme :

$$\frac{dP}{dt} + kP = \frac{3}{2}kP_1$$

On a d'autre part :

$$v = k[\text{N}_2\text{O}](t) = k \frac{n(t)}{V} = k \frac{2}{RT} \left(\frac{3}{2}P_1 - P(t) \right)$$

d'où en identifiant les deux expressions de v :

$$\frac{dP}{dt} + kP = \frac{3}{2}kP_1$$

Q7. Donner l'expression de $P(t)$ et l'allure du graphe correspondant.

La solution de cette équation est :

$$P(t) = A e^{-kt} + \frac{3}{2}P_1$$

avec comme condition initiale $P(0) = P_1$ donc $A = -\frac{P_1}{2}$. On obtient alors :

$$P(t) = \frac{P_1}{2} (3 - e^{-kt})$$

Q8. La figure 1 est la représentation graphique de $\ln\left(3 - 2\frac{P}{P_1}\right)$ en fonction du temps, tracée à l'aide des données du tableau ci-dessus.

En tirer la valeur de k .

D'après la question précédente, la courbe de la figure 1 est $f(t) = -kt$. La pente de la droite nous donne $k \approx \frac{1}{90} = 0,011 \text{ s}^{-1}$ (valeur de k à 873 K).

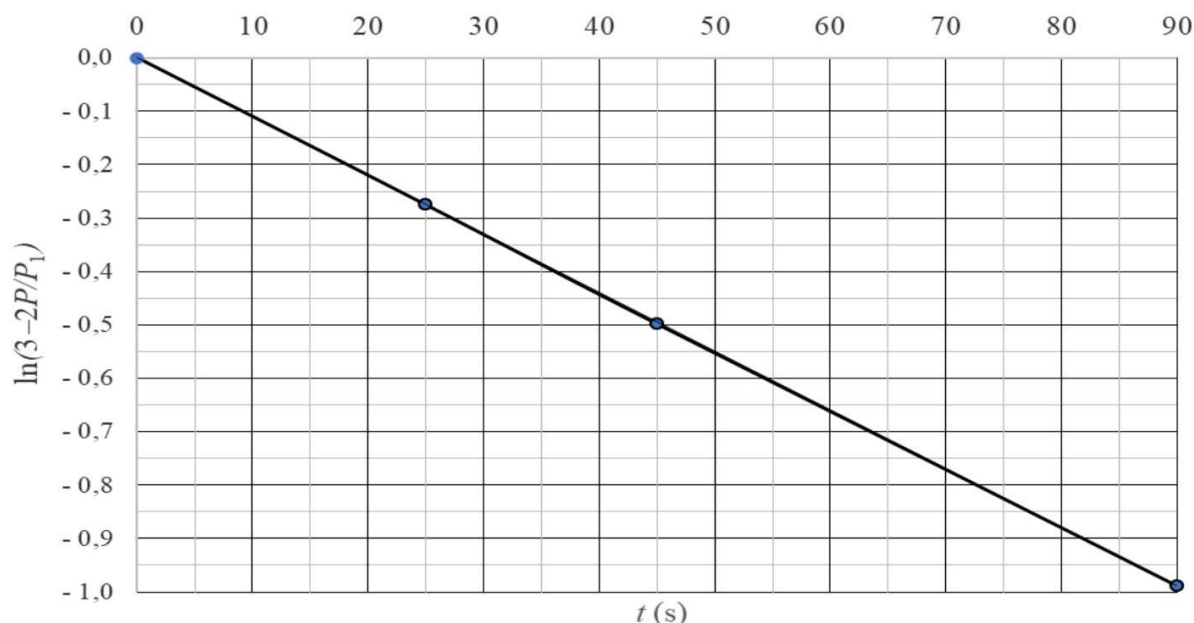
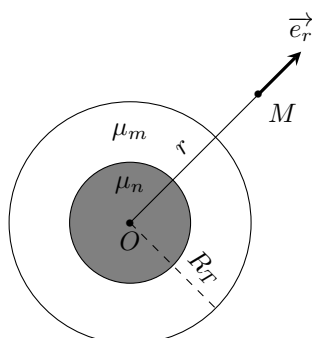


FIGURE 1 – Graphe $\ln\left(3 - 2\frac{P}{P_1}\right) = f(t)$ avec t en seconde

2 Champ de gravitation créé par la Terre

Assimilons la Terre à une planète sphérique de rayon $R_T = 6378 \text{ km}$, de centre O et de masse totale $m_T = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. On modélise la structure interne de la Terre par deux couches concentriques : un noyau de rayon R_n , de masse volumique uniforme μ_n recouvert d'un manteau de masse volumique uniforme $\mu_m = 4361 \text{ kg.m}^{-3}$.



Un point M sera repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) et on introduira la base sphérique locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. On note $\vec{G}(M)$ le champ de gravitation créé par la Terre en M et $m(r)$ la masse contenue à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon r .

1. Énoncer le théorème de Gauss gravitationnel en définissant tous les termes utilisés.

Soient $\mathcal{D}_{\text{masse}}$ une distribution de masses créant un champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$ en tout point M et S_F une surface fermée quelconque, orientée de l'intérieur vers l'extérieur. Alors :

$$\boxed{\Phi_{\text{sortant}}(\vec{\mathcal{G}}/S_F) = -4\pi G M_{\text{int}}}$$

où M_{int} est la masse contenu à l'intérieur de S_F et où G est la constante universelle de la gravitation.

2. Montrer que $\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r) \vec{e}_r$.

À priori nous avons :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + \mathcal{G}_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + \mathcal{G}_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$$

Cependant :

- Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont deux plans de symétrie de la distribution de masse contenant M . Il s'ensuit que :

$$\mathcal{G}_\theta = \mathcal{G}_\varphi = 0 \quad \text{d'où} \quad \vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

- De plus la distribution de masses est invariante par toute rotation autour de l'origine O , ce qui implique que $\vec{\mathcal{G}}$ également et donc que :

$$\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}_r(r) \vec{e}_r \stackrel{\text{noté}}{=} \mathcal{G}(r) \vec{e}_r}$$

3. Donner l'expression de $\mathcal{G}(r)$ en fonction de G , r et $m(r)$.

Appliquons le théorème de Gauss en choisissant comme surface fermée (surface de Gauss) S_F la sphère de centre O et de rayon r . Il vient :

$$\Phi_{\text{sortant}}(\vec{\mathcal{G}}/S_F) = \iint_{S(O,r)} \mathcal{G}(r) \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r = \mathcal{G}(r) 4\pi r^2 = -4\pi G m(r)$$

puisque ici $M_{\text{int}} = m(r)$. On a donc :

$$\boxed{\mathcal{G}(r) = -G \frac{m(r)}{r^2}}$$

4. Expliciter $m(r)$ en fonction de r . En déduire le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$ à l'extérieur de la Terre ($r > R_T$).

Il faut distinguer les trois cas $r \leq R_n$, $R_n < r \leq R_T$ et $R_T < r$. Un calcul simple conduit à :

$$m(r) = \begin{cases} \mu_n \frac{4\pi}{3} r^3 & \text{si } r \leq R_n \\ \mu_n \frac{4\pi}{3} R_n^3 + \mu_m \frac{4\pi}{3} (r^3 - R_n^3) & \text{si } R_n < r \leq R_T \\ m_T & \text{si } R_T < r \end{cases}$$

On remarquera que dans ce modèle :

$$m_T = \mu_n \frac{4\pi}{3} R_n^3 + \mu_m \frac{4\pi}{3} (R_T^3 - R_n^3)$$

D'après le théorème de Gauss gravitationnel, on en déduit que :

$$\mathcal{G}(r) = -G \frac{m_T}{r^2} \quad \text{si } R_T < r$$

Remarque :

À la surface de la Terre, $\mathcal{G}(R_T)$ a pour valeur numérique :

$$|\mathcal{G}(R_T)| = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{5,97 \cdot 10^{24}}{6378000^2} = 9,79 \text{ m.s}^{-2}$$

ce qui est la valeur attendue (la différence avec 9,81 provient de la précision des données numériques sur G , m_T et R_T).

5. Le noyau terrestre a un rayon $R_n = 3480 \text{ km}$ et une masse de $m_n = 2,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

a) Quelle est la masse volumique μ_n du noyau ?

On a :

$$\mu_n = \frac{m_n}{4\pi R_n^3/3} = 11,3 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

ce qui représente 11,3 fois la masse volumique de l'eau. Le noyau terrestre a donc une densité $d = 11,3$.

b) Déterminer l'expression et la valeur numérique du champ de gravitation à la frontière noyau-manteau.

À la frontière noyau-manteau on a :

$$|\mathcal{G}(R_n)| = G \frac{m(R_n)}{R_n^2} = G \frac{m_n}{R_n^2} = 11,0 \text{ m.s}^{-2}$$

soit un champ de gravitation légèrement supérieur à celui qui existe à la surface terrestre.

c) Des trois représentations de $\mathcal{G}(r)$ ci-dessous, identifier celle qui correspond au modèle développé dans cet exercice. À quel type de modèle peuvent correspondre les deux autres courbes ? On donnera les expressions des masses volumiques correspondantes.

Il s'agit manifestement de la représentation **(2)**. Pour analyser les deux autres représentations on utilise l'équation de Maxwell-Gauss de la gravitation :

$$\text{div } \vec{\mathcal{G}} = -4\pi G \mu \quad \text{donc} \quad \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \mathcal{G}(r))}{dr} = -4\pi G \mu$$

- La représentation **(3)** correspond à un champ de gravitation de la forme : $\mathcal{G}(r) = -\alpha r$ où α est une constante positive. On en déduit :

$$\mu = \frac{3\alpha}{4\pi G}$$

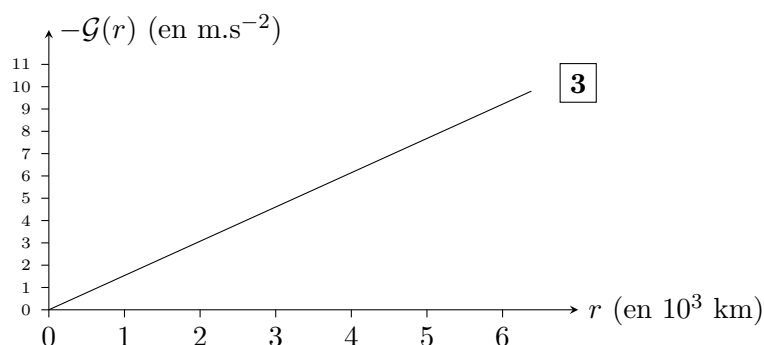
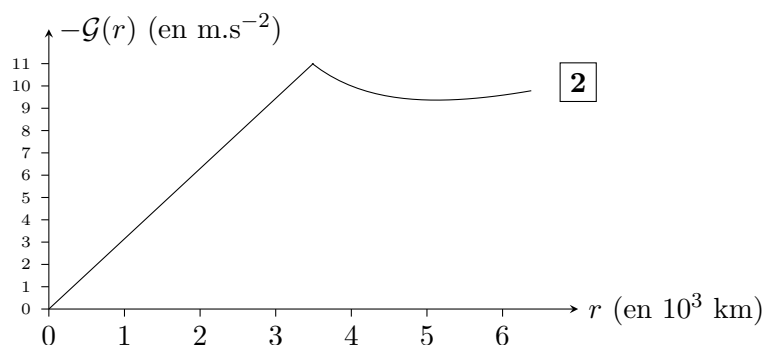
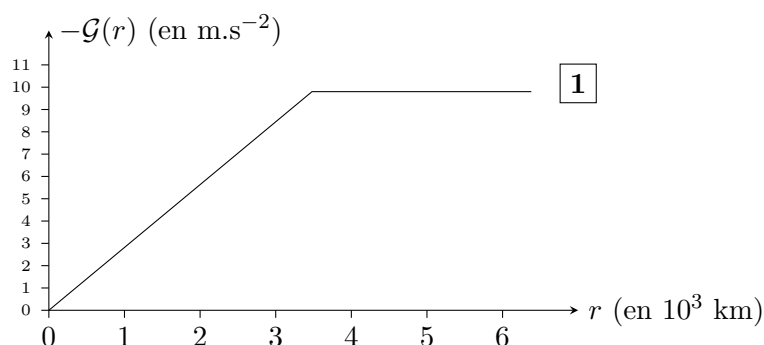
ce qui correspond à une masse volumique uniforme de la Terre. Celle-ci ne peut alors qu'être égale à :

$$\mu = \frac{m_T}{4\pi R_T^3/3}$$

- La représentation **(1)** correspond à un modèle de noyau de masse volumique uniforme (car \mathcal{G} est à croissance linéaire de 0 à R_n), puis un champ gravitationnel constant $\mathcal{G}(r) = \mathcal{G}(R_T) = -G m_T / R_T^2$ jusqu'à la surface de la Terre. Dans la partie $R_n < r \leq R_T$ on a donc :

$$\begin{aligned}\mu &= -\frac{1}{4\pi G} \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \mathcal{G}(R_T))}{dr} = \frac{m_T}{4\pi R_T^2} \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2)}{dr} \\ &= \frac{m_T}{2\pi R_T^2} \frac{1}{r}\end{aligned}$$

c'est à dire une masse volumique non uniforme, avec une décroissance en $1/r$.



3 Champ électrostatique créé une distribution non uniforme

L'espace est ramené au repère $(Oxyz)$. Une distribution de charges statique est caractérisée par une densité volumique de charge $\rho(M)$ en un point M situé à une distance r de l'origine O donnée par :

$$\rho(M) = \rho_0 \frac{a}{r} \quad \text{si } r \leq a \quad \text{et} \quad \rho(M) = 0 \quad \text{si } r > a$$

où ρ_0 est une constante positive.

1. Exprimer la charge totale Q de cette distribution en fonction de ρ_0 et a .

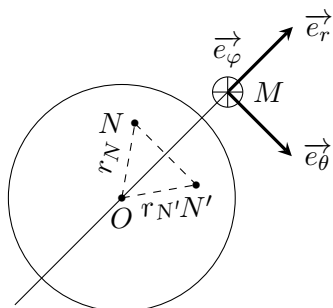
L'élément de volume en coordonnées sphériques étant $d\tau_M = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ la charge totale est donnée par :

$$Q = \int_0^a \rho_0 a r dr \times \int_0^\pi \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi \rho_0 a^3}{2}$$

2. a) Étudier les symétries du champ électrostatique créé au point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

À priori on a :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + E_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$$



$(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ est un plan de symétrie de la densité volumique de charges car $\rho(N) = \rho(N')$ pour tous points N et N' symétriques par rapport à ce plan.

Un schéma similaire montrerait qu'il en va de même pour le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

• Plans de symétrie

Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la densité volumique de charges donc des plans de symétrie de \vec{E} par le principe de Curie, contenant M . Il s'ensuit que :

$$E_\theta = E_\varphi = 0 \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

• Invariances

La densité volumique de charges est invariante par rotation autour de l'origine O et donc \vec{E} l'est également. On a donc :

$$E_r = E_r(r) \quad \text{d'où} \quad \vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$$

- b) Montrer que $\vec{E}(O) = \vec{0}$

À priori, $\vec{E}(O) = E_x(O) \vec{e}_x + E_y(O) \vec{e}_y + E_z(O) \vec{e}_z$.

Or les plans (Oxy) , (Oyz) et (Oxz) sont trois plans de symétries des charges contenant le point O . Il s'agit donc également de plans de symétrie de \vec{E} et on en déduit que :

$$E_x(O) = E_y(O) = E_z(O) = 0$$

3. Déterminer $\vec{E}(M)$ en tout point M :

a) En utilisant le théorème de Gauss.

Le champ électrique étant à symétrie sphérique, on choisit comme surface fermée S_F (surface de Gauss) la sphère de centre O et de rayon r . On a :

$$\Phi_{\text{sortant}}(\vec{E}/S_F) = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

Notons $B(O, r)$ la boule de centre O et de rayon r . On voit que Q_{int} est la charge contenue dans $B(O, r)$ et on a donc :

$$Q_{\text{int}} = \iiint_{B(O, r)} \rho(N) d\tau_N$$

où N est un point qui décrit le volume de $B(O, r)$. Soient $(r_N, \theta_N, \varphi_N)$ les coordonnées sphériques du point N . On doit distinguer deux cas :

1^{er} cas $r \leq a$:

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}} &= \int_0^r \rho_0 \frac{a}{r_N} r_N^2 dr_N \times \int_0^\pi \sin(\theta_N) d\theta_N \times \int_0^{2\pi} d\varphi_N \\ &= \frac{4\pi\rho_0 a r^2}{2} = 2\pi\rho_0 a r^2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$E(r) = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} \quad \text{si } r \leq a$$

2^{ème} cas $r > a$:

Dans ce cas Q_{int} est la charge contenue dans la boule $B(O, a)$. On a donc :

$$Q_{\text{int}} = \int_0^a \rho_0 a r_N dr_N \times \int_0^\pi \sin \theta_N d\theta_N \times \int_0^{2\pi} d\varphi_N = \frac{4\pi\rho_0 a^3}{2}$$

On retrouve la charge électrique calculée à la question 1.. On obtient alors :

$$E(r) = \frac{\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0 r^2} \quad \text{si } r > a$$

b) En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss.

Pour un champ à symétrie sphérique on a :

$$\text{div}(Er) \vec{e}_r = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E(r))$$

1^{er} cas $0 < r \leq a$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E(r)) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{a}{r} \quad \text{donc} \quad E(r) = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} + \frac{C_1}{r^2}$$

Or $E(r)$ doit rester fini lorsque $r \rightarrow 0^+$ ce qui impose $C_1 = 0$.

2^{ème} cas $r > a$:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E(r)) = 0 \quad \text{donc} \quad E(r) = \frac{C_2}{r^2}$$

La constante C_2 est déterminée en imposant la continuité de E en $r = a$, ce qui donne :

$$\frac{C_2}{a^2} = \frac{\rho_0 a}{2\varepsilon_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{C_2 = \frac{\rho_0 a^3}{2\varepsilon_0}}$$

On remarque la discontinuité de $E(r)$ en $r = 0$. Ceci est dû au fait que ρ n'est pas définie en $r = 0$, ce qui montre $\text{div } \vec{E}$ ne l'est pas non plus et donc que les dérivées partielles de \vec{E} par rapport aux coordonnées d'espace ne le sont pas non plus : \vec{E} ne peut donc pas être continu en $r = 0$.