# 1 Décharge dans un gaz

**Donnée** : pour un champ vectoriel de la forme $\vec{a} = a(r,t)\,\overrightarrow{e_r}$ dans le système des coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a(r,t)\right)$$

L'espace entre deux sphères métalliques minces $(S_1)$ et $(S_2)$, de même centre $O$ et de rayons respectifs $R_1$ et $R_2$ avec $R_1 < R_2$ est rempli par un gaz initialement isolant et dont les constantes électromagnétiques peuvent être confondues avec celles du vide, c'est à dire $\epsilon_0$ et $\mu_0$.

Initialement, $(S_2)$ n'est pas chargée et $(S_1)$ porte la charge électrique $Q$. La sphère métallique $(S_1)$ est creuse, c'est à dire vide de toute matière et, de la même façon, le milieu extérieur à $(S_2)$, caractérisé par $r > R_2$, est vide lui aussi.

On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le gaz devient brusquement conducteur et qu'il obéit à la loi d'Ohm locale, ce qui signifie que $\vec{j} = \gamma\,\vec{E}$ en tout point du gaz, $\gamma$ étant la conductivité électrique (grandeur supposée constante). Pour $t > 0$ on supposera que :

$$\vec{j}(M,t) = j(r,t)\,\overrightarrow{e_r} \quad \text{et} \quad \rho(M,t) = \rho(r,t)$$

en tout point $M$ de coordonnées sphériques $(r,\theta,\varphi)$ telles que $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$.

**1)** En analysant les symétries du problème, montrer que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ ne peut être que nul en tout point de l'espace. Montrer de même que, $\overrightarrow{e_r}$ désignant le vecteur unitaire radial des coordonnées sphériques, le champ électrique est nécessairement de la forme :

$$\overrightarrow{E}(M) = E(r,t)\,\overrightarrow{e_r} \text{ pour toute valeur de } r = OM$$

**2)** a) Déterminer à l'aide des équations de Maxwell une équation différentielle par rapport au temps, vérifiée par $E(r,t)$ pour $R_1 < r < R_2$. En déduire l'expression de $E(r,t)$ en fonction de $t$, $r$ et $Q$. On introduira un temps caractéristique $\tau$ pour exprimer ce champ.

b) Déterminer $E(r,t)$ pour $r < R_1$ puis $r > R_2$.

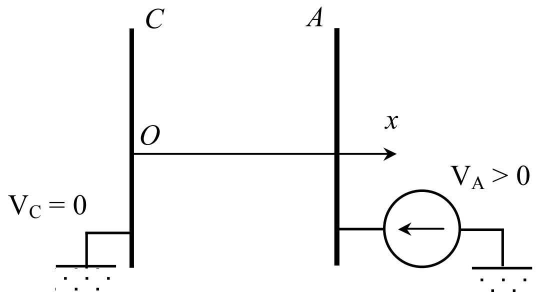
**3)** Que vaut la densité volumique de charges $\rho$ dans l'espace entre les deux sphères ? Quelle est l'expression de $\vec{j}$ ? Est-ce compatible avec l'équation de conservation de la charge électrique ?

# 2 Tube à vide

Un tube à vide est constitué de deux armatures métalliques planes A et C enfermées dans une ampoule où règne le vide. La cathode C, de potentiel nul, émet par effet thermoélectrique des électrons sans vitesse initiale qui sont attirés par l'anode A maintenue au potentiel $V_A > 0$.

On étudie le régime stationnaire d'écoulement des électrons, de charge $-e$ et de masse $m$, de C vers A ce qui correspond à un courant d'intensité constante $I$.

La cathode C qui occupe le plan $x = 0$ et l'anode A, qui occupe le plan $x = L$, sont planes, parallèles et ont même surface en regard $S$.



**1)** On suppose que les grandeurs de ce problème ne dépendent que de la distance $x$ à la cathode ($0 < x < L$).

a) Écrire l'équation locale satisfaite par le potentiel électrique $V(x)$, en introduisant le nombre $n(x)$ d'électrons par unité de volume à l'abscisse $x$.

b) Quelle est la relation entre la densité volumique de courant $j(x)$, $n(x)$ et la vitesse $u(x)$ des électrons à l'abscisse $x$ ? Relier $j(x)$ à l'intensité $I(x)$ qui traverse la surface plane d'aire $S$, perpendiculaire à $Ox$ et située à l'abscisse $x$. Montrer que cette intensité ne dépend pas de $x$.

c) En utilisant l'énergie mécanique d'un électron, relier $u(x)$ à $V(x)$.

**2)** Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $V(x)$ est de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}(x) = \frac{K}{\sqrt{V(x)}}$$

où $K$ est une constante à exprimer en fonction de $e$, $m$, $S$, $\varepsilon_0$ et l'intensité $I$.

**3)** a) En multipliant l'équation précédente par $\mathrm{d}V/\mathrm{d}x$ et en intégrant, montrer que le potentiel $V(x)$ vérifie l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x) = 2\sqrt{K}\,[\,V(x)\,]^{1/4}$$

On admettra que le champ électrique est nul au niveau de la cathode.

b) Déduire de l'équation précédente que l'intensité $I$ du courant est liée au potentiel $V_A$ de l'anode par la relation : $I = a\,V_A^{3/2}$ et déterminer la constante $a$.

Application numérique : $S = 1{,}0$ cm$^2$ ; $L = 2$ cm ; calculer $I$ si $V_A = 80$ V. On donne : $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m.

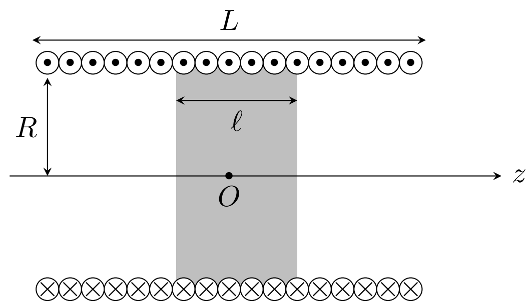
# 3 Solénoïde en ARQS

On donne en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{e_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{e_z}$$

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

On considère un solénoïde de longueur $L$ entièrement situé dans la zone ARQS. Il est formé de spires jointives circulaire d'axe $Oz$ et de rayon $R$, parcourues par un courant d'intensité $i(t) = I_m\cos(\omega t)$. On note $n$ le nombre de spires par mètre.




**1)** a) À quelle condition sur $\omega$, $L$ et $R$, tous les points du solénoïde sont-ils situés dans la zone A.R.Q.S. ?

b) Écrire les équations de Maxwell en un point $M$ de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ situé à l'intérieur du solénoïde : $r < R$ et $-L/2 < z < L/2$.

**2)** À l'aide d'une étude des symétries :

a) Montrer qu'en tout point $M$ de coordonnées cylindriques $(r, \theta, z)$ il existe un champ électrique de la forme $\overrightarrow{E}(M,t) = E(r,z,t)\,\overrightarrow{e_\theta}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{E} = \vec{0}$ en tout point de l'axe $Oz$.

**3)** On étudie le champ électromagnétique dans la région centrale du solénoïde (zone grisée sur le schéma) de longueur $\ell$, suffisamment loin des bords pour supposer qu'en tout point $M(r,\theta,z)$ de cette zone on puisse écrire :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = B_0(r,z)\,\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

a) Montrer que $B_0(r,z)$ ne dépend ni de $r$, ni de $z$.

b) En supposant que le champ magnétique est nul en dehors du solénoïde, déterminer $B_0$ en fonction de $\mu_0$, $n$ et $I_m$.

c) On se place dans la région centrale du solénoïde (zone grisée). Montrer à l'aide des équations de Maxwell que $E(r,z,t)$ ne dépend pas de $z$ et déterminer l'expression de $E(r,t)$.

d) Retrouver l'expression de $E(r,t)$ à l'aide de la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday.

# 4 Condensateur en régime variable. Limites de l'ARQS

Un condensateur est constitué de deux disques métalliques de même rayon $a$, d'axe $Oz$ situés dans les plans $z=+h$ et $z=-h$. On admet que $\overrightarrow{E}(M,t)$ est colinéaire à $\overrightarrow{e_z}$ entre les armatures du condensateur. Pour $h \ll a$, ce modèle est justifié sauf au voisinage immédiat des bords, c'est-à-dire en $r=a$. Le condensateur est soumis à une tension sinusoïdale de fréquence $f=\omega/2\pi$ et on souhaite déterminer la structure du champ électromagnétique créé à l'intérieur de celui-ci.

Formules d'analyse vectorielle :

- Laplacien d'une fonction $f(r)$ en coordonnées cylindriques :

$$\triangle f = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}$$

- $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathrm{div}\,\overrightarrow{a}) - \Delta\,\overrightarrow{a}$
- Pour $\overrightarrow{a} = f\,\overrightarrow{e_z}$ on a $\Delta\,\overrightarrow{a} = (\Delta\,f)\,\overrightarrow{e_z}$.

On cherche un champ électrique entre les deux armatures du condensateur, de la forme :

$$\overrightarrow{E} = E(r,z)\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_z}$$

**1)** En utilisant une des équations de Maxwell, montrer que $E(r,z)$ ne dépend pas de $z$. Dans la suite on le notera $E(r)$

**2)** Toujours à partir des équations de Maxwell, montrer que le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ dans l'espace entre les deux armatures vérifie :

$$\triangle\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0}$$

**3)** En déduire que $E(r)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} + \frac{\omega^2}{c^2}\,E(r) = 0$$

**4)** On cherche la solution de cette équation sous la forme d'un développement en série entière en posant :

$$E(r) = E(0)\,\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,r^n$$

Établir une récurrence sur les coefficients $a_n$ et en déduire les trois premiers termes non nuls de la série en partant de $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, hypothèses qu'on justifiera.

**5)** On pose $x = \frac{\omega r}{c}$. Montrer que si $x \ll 1$ on peut se contenter des deux premiers termes de la série entière donnant $E(r)$. Cette approximation est-elle vérifiée avec $a = 10$ cm et $f = 10$ MHz (limite supérieur d'un générateur de laboratoire usuel). À quel concept renvoit la relation $x \ll 1$ ?

# 5 Boule radioactive *

**Donnée** : pour un champ vectoriel de la forme $\vec{a} = a(r,t)\,\overrightarrow{e_r}$ dans le système des coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 a(r,t)\right)$$

Une boule de matière radioactive, de centre $O$ et de rayon $R$, est électriquement neutre à l'instant $t = 0$. À partir de cet instant initial, elle émet depuis sa surface $n$ positons $\beta^+$ par unité de temps, chaque positon ayant une charge élémentaire $e$. On suppose que l'émission est isotrope, les charges émises ayant une même vitesse radiale $\vec{v} = v\,\vec{u}_r$ de norme $v$ constante.

**1)** a) En étudiant la charge électrique contenue à l'instant $t > 0$ dans une coquille sphérique limitée par les rayons $r$ et $r + \mathrm{d}r$, déterminer la densité volumique de charges $\rho(r,t)$ en tout point de l'espace situé à une distance $r > R$ du centre de la boule radioactive. Que se passe-t-il si $r > R + vt$ ?

b) Expliciter de même le vecteur densité de courant $\vec{j}$ en tout point situé à une distance $r > R$.

**2)** Déterminer le champ électrique $\overrightarrow{E}(M,t)$ en tout point $M$ tel que $r = OM > R$. Que peut-on dire du champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ ?

**3)** Quelle est la charge électrique $Q(t)$ de la boule radioactive à l'instant $t$ ? Retrouver ce résultat en appliquant le théorème de Gauss.