Une démonstration de l'identité remarquable $\boxed{\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a}\right) = 0}$

Soit $\vec{a}$ un champ vectoriel quelconque. Dans le système des coordonnées cartésiennes on peut l'écrire :

$$\vec{a} = a_x\,\overrightarrow{e_x} + a_y\,\overrightarrow{e_y} + a_z\,\overrightarrow{e_z}$$

où a_x, a_y et a_z sont des fonctions des trois coordonnées cartésiennes x, y, z et du temps t.

On a d'une part :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overrightarrow{e_x} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overrightarrow{e_y} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overrightarrow{e_z}$$

Posons :

$$U_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \quad ; \quad U_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \quad \text{et} \quad U_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

D'autre part :

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a}\right) = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

c'est à dire :

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$$

En utilisant le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)$$

on constate que tous les termes du membre de droite de (1) s'annulent deux à deux, ce qui permet d'affirmer que :

$$\boxed{\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{a}\right) = 0}$$