

DS n°3 (CCP - e3a)
(Samedi 9 novembre 2024 - Partie électromagnétisme)

L'utilisation des calculatrices est autorisée. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée. La précision, la clarté ainsi que les efforts de présentation (résultats encadrés ou soulignés) seront pris en compte dans la note. Les efforts d'explication (schémas) seront valorisés.

1 ÉTUDE D'UN CONDENSATEUR

Donnée : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

PARTIE A. – ÉTUDE D'UN MICROPHONE ÉLECTROSTATIQUE

Un microphone électrostatique (Figure 1) est constitué d'une membrane P_1 de surface S , extrêmement légère de masse m_e . Celle-ci, réalisée en métal (ou en polyester rendu conducteur par un saupoudrage de métal), est mobile et constitue l'une des armatures d'un condensateur plan. L'espace entre la membrane P_1 et l'armature fixe P_2 est entièrement rempli d'air de permittivité électrique ε_0 . Au repos, la distance entre les deux armatures parallèles est notée e . En mouvement, la liaison entre l'isolant et la membrane peut être modélisée par une force de rappel élastique de constante de raideur k_e .

Les variations de pression provoquées par l'onde sonore font varier la distance entre les deux armatures par un déplacement de la membrane parallèlement à l'axe Ox . Ce déplacement induit une variation de la capacité et cet effet est exploité dans le circuit électrique de la Figure 1 de manière à récupérer le signal $u(t)$ aux bornes de la résistance $R = 10 \text{ k}\Omega$. Les variations de $u(t)$ sont à l'image de celles de la pression acoustique

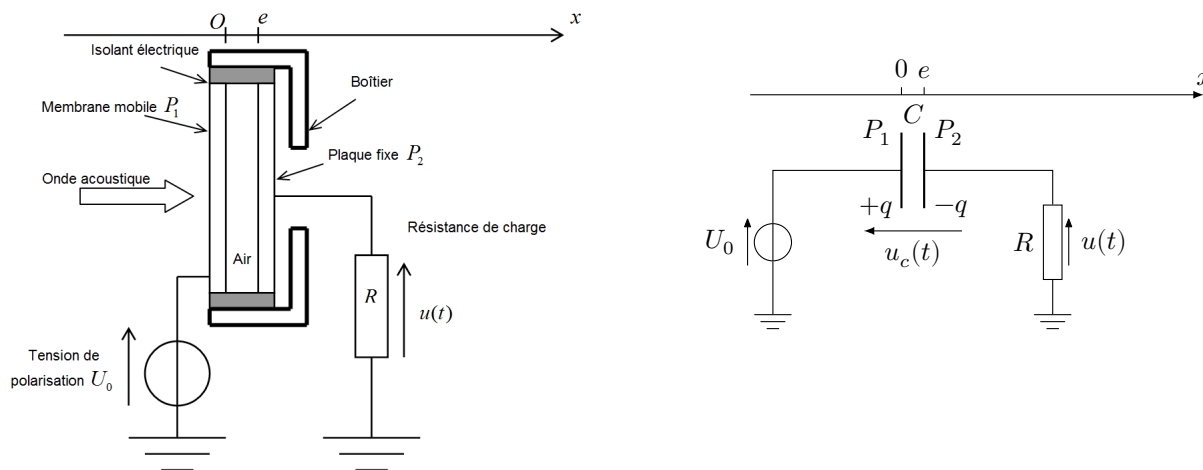


FIGURE 1 – Microphone électrostatique

La membrane P_1 et l'armature fixe P_2 sont assimilées à des plans chargés uniformément par les charges $+q$ et $-q$. On associe à P_1 et P_2 les densités surfaciques uniformes de charges $+\sigma = +q/S$ pour $-\sigma = -q/S$ pour P_2 . De plus, on assimile les deux plaques à des plans infinis afin de négliger par la suite les effets de bord.

I. Capacité du condensateur au repos

- 1) Montrer, par des considérations de symétrie et d'invariance, que le champ électrique $\vec{E}_1(M)$ créé par la plaque P_1 en tout point de l'espace est perpendiculaire à ce plan et ne dépend que d'une variable d'espace.
- 2) Justifier que $\vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M')$ où M et M' sont deux points placés symétriquement par rapport au plan P_1 .
- 3) En appliquant le théorème de Gauss sur une surface clairement indiquée, exprimer le champ électrique $\vec{E}_1(M)$.
- 4) Dédire du résultat précédent l'expression du champ électrique total $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$ créé par les deux plaques P_1 et P_2 en tout point de l'espace.
- 5) Montrer que la différence de potentiel $u_C = V_{P_1} - V_{P_2}$ entre les deux plaques peut se mettre sous la forme $u_C = \frac{q}{C_0}$, où C_0 est la capacité du condensateur au repos. Déterminer l'expression de C_0 en fonction de ε_0 , S et e .

II. Introduction d'une plaque métallique entre les deux armature du condensateur

On introduit entre les deux plaques du condensateur plan précédent une plaque métallique \mathcal{P} parallélépipédique d'épaisseur $d < e$, de même surface S que P_1 et P_2 et parallèle aux armatures du condensateur (Figure 2). Les effets de bords sont toujours négligés et, du point de vue des symétries, on pourra considérer que P_1 , P_2 et \mathcal{P} sont d'extension infinie selon Oy et Oz .

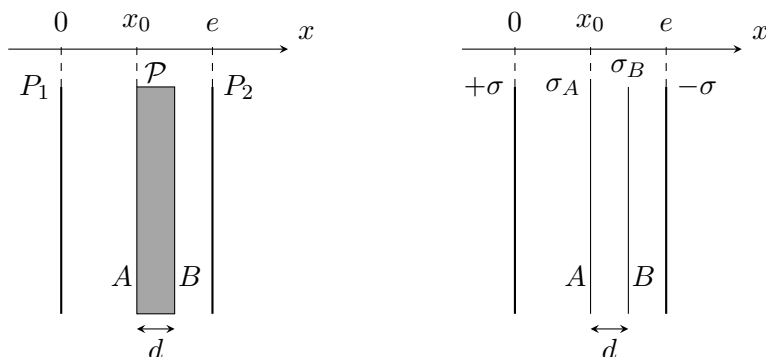


FIGURE 2 – Introduction d'une plaque entre les armatures

Avant son introduction dans le condensateur, la plaque métallique \mathcal{P} n'est pas chargée. Cependant, sous l'influence du champ électrique du condensateur, les électrons de conduction de \mathcal{P} vont se déplacer et venir s'accumuler sur l'une des faces (A ou B sur le schéma), créant ainsi une distribution de charges surfacique. Il y a alors un défaut d'électrons sur la face opposée, ce qui est équivalent à une distribution surfacique de charges de signe opposé.

Un état d'équilibre finit par s'installer où les charges s'immobilisent dans le référentiel d'étude. L'ensemble condensateur et plaque se comporte alors comme quatre plans infinis comme indiqué sur la Figure 2, avec des densités surfaciques $+\sigma$, σ_A , σ_B et $-\sigma$.

- 1) Préciser les signes des densités σ_A et σ_B . Quelle est la relation entre σ_A et σ_B ?
- 2) On admet que les charges se répartissent sur les deux faces A et B de \mathcal{P} de sorte à ce que le champ électrostatique total $\vec{E}(x)$ soit nul dans \mathcal{P} , c'est à dire pour $x_0 \leq x \leq x_0 + d$.

Déterminer l'expression de $\vec{E}(x)$ pour $x_0 \leq x \leq x_0 + d$ et en déduire la relation entre σ_A et σ .

- 3) Déterminer l'expression du champ électrostatique pour $x \in [0, x_0]$ d'une part et pour $x \in [x_0 + d, e]$ d'autre part, en fonction de σ et de ε_0 . En déduire la différence de potentiel $u_c = V(x=0) - V(x=e)$ entre les deux armatures du condensateur, en fonction de σ , e , d et ε_0 .
- 4) En déduire la capacité C' du condensateur ainsi obtenu (avec la plaque métallique). On exprimera C' en fonction de e , d , S et ε_0 . Conclure quant à l'influence de la plaque métallique sur la capacité du condensateur.

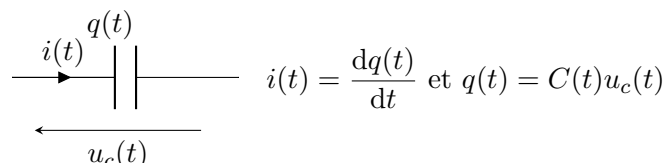
III. Réponse du circuit électrique en régime permanent sinusoïdal

On revient dans cette partie à la configuration du condensateur plan étudié dans la partie I., sans plaque métallique. Lorsque celui-ci est au repos (écartement e entre les armatures), sa capacité est C_0 déterminée à la question I.5).

En raison du passage d'une onde acoustique créant surpression sinusoïdale de pulsation ω , la membrane mobile P_1 oscille autour de sa position d'équilibre O selon l'équation $x_1(t) = X_1 \cos(\omega t)$ avec une amplitude de déplacement $X_1 \ll e$. On admet que l'expression de la capacité obtenue à la question I.5) reste valable à condition de remplacer l'épaisseur e par $e + x_1(t)$.

- 1) À l'aide d'un développement limité, montrer que la capacité $C(t)$ du condensateur s'exprime par $C(t) = C_0 - C_1 \cos(\omega t)$. Préciser l'expression de C_1 en fonction de C_0 , X_1 et e .

La Figure 3 rappelle les équations caractéristiques reliant l'intensité électrique $i(t)$ traversant un condensateur, la charge électrique $q(t)$ sur son armature, la tension $u_c(t)$ à ses bornes et sa capacité $C(t)$:



$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \text{ et } q(t) = C(t)u_c(t)$$

FIGURE 3 – Relations générales entre i , q , u_c et C pour un condensateur.

- 2) a) Quelle est la relation entre $i(t)$, $u_c(t)$ et $C(t)$?
 b) On note $u(t)$ la tension aux bornes de la résistance R et U_0 la tension constante délivrée par le générateur sur le schéma électrique de la Figure 1. Établir la relation liant $u(t)$, U_0 , R et $C(t)$.
- 3) En déduire, en précisant les approximations faites, l'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de la tension $u(t)$ sous la forme

$$\frac{du}{dt} + \omega_0 u = \omega A \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avec} \quad A = \frac{U_0 X_1}{e} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC_0}$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u)$.

- 4) Exprimer l'amplitude U en fonction de ω , ω_0 , X_1 , e et U_0 .

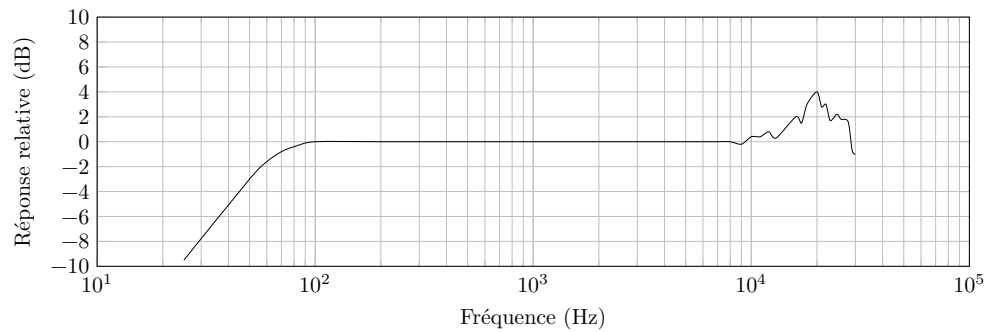


FIGURE 4 – Réponse du microphone électrostatique en fonction de la fréquence : $20 \log U$ en fonction de la fréquence (échelle logarithmique)

- 5) Montrer qu'en dessous de 10 kHz le graphe $20 \log U$ en fonction de ω est compatible avec la réponse relative du microphone en fonction de la fréquence donnée Figure 4.
- 6) Estimer alors l'ordre de grandeur de C_0 .

Le modèle étudié précédemment ne prend pas en considération le couplage électromécanique du système dans les hautes fréquences. Celui-ci, devient prépondérant au-delà de 10 kHz, la réponse du microphone présente alors une résonance causée par les oscillations mécaniques de la membrane au voisinage de sa position d'équilibre.

- 7) Donner un ordre de grandeur de $\sqrt{k_e/m_e}$.