

**DS n°4**  
Samedi 7 décembre 2024

## I. Séparation des isotopes par spectrométrie de masse

**Données :**

$$1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

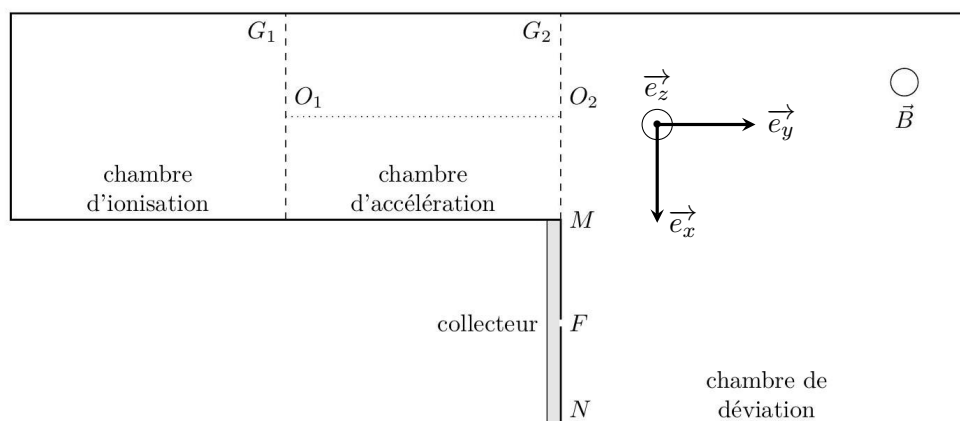
$$\text{Constante d'Avogadro : } N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

L'enrichissement de l'uranium a pour but d'élever la teneur en  $^{235}\text{U}$  de l'uranium de départ à une valeur optimale pour l'application désirée. Une des méthodes est la spectrographie de masse qui reste la méthode la plus sensible d'analyse isotopique. Elle a été employée pendant la seconde Guerre Mondiale dans l'usine Y12 d'Oak Ridge dans des dispositifs appelés Calutrons.

Un Calutron est un spectrographe de masse constitué de plusieurs parties (cf figure 1) :

- la chambre d'ionisation dans laquelle des atomes d'uranium  $^{235}_{92}\text{U}$  et  $^{238}_{92}\text{U}$  de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$  portés à haute température sont ionisés en ions  $\text{U}^+$ . On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en  $O_1$ , la vitesse des ions est quasi nulle ;
- la chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre  $O_1$  et  $O_2$  sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles  $G_1$  et  $G_2$  ;
- la chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  de direction perpendiculaire au plan de figure. Un collecteur d'ions est disposé entre  $M$  et  $N$ . Une fente centrée sur  $O_2$  de largeur  $L$  dans le plan de la figure permet de choisir la largeur du faisceau incident. Une fente collectrice centrée sur  $F$  est placée entre  $M$  et  $N$  et a pour largeur  $L'$  dans le plan de la figure.

Les chambres sont sous vide. On négligera le poids des ions devant les autres forces et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vecteurs vitesse des ions sont contenus dans le plan de la figure.



**Figure 1**

### A - Accélération des ions

**A.1)** Quel doit être le signe de la différence de potentiel  $V_{G1} - V_{G2}$  pour que les ions soient accélérés entre  $O_1$  et  $O_2$  ?

**A.2)** Établir les expressions des vitesses  $u_1$  et  $u_2$  respectivement des ions  ${}^{235}_{92}\text{U}^+$  et  ${}^{238}_{92}\text{U}^+$  lorsqu'ils parviennent en  $O_2$  en fonction de  $m_1, m_2, e$  et  $U = V_{G1} - V_{G2}$ .

**A.3)** L'énergie cinétique acquise par les ions en  $O_2$  est de 15,0 keV ; en déduire la valeur de la tension  $U$  appliquée entre les deux grilles. Déterminer numériquement les vitesses  $u_1$  et  $u_2$  en respectant les chiffres significatifs.

## B - Déviation des ions

**B.1)** Quel doit être le sens du champ magnétique  $\vec{B}$  régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur ?

**B.2)** Déterminer la nature de la trajectoire d'un ion  ${}^{235}_{92}\text{U}^+$  dans la zone où règne le champ magnétique et exprimer son rayon de courbure  $R_1$  en fonction de  $m_1, e, U$  et  $B = \|\vec{B}\|$ . Faire de même pour un ion  ${}^{238}_{92}\text{U}^+$  ; on notera  $R_2$  son rayon de courbure.

**B.3)** Le collecteur du Calutron consiste en un récipient métallique muni d'une fente centrée en  $F$  de largeur  $L'$ , placée en  $M$  et  $N$  qui permet de recueillir les isotopes 235 . Quelle doit être la valeur du champ magnétique régnant dans le calutron sachant que  $F$  est placé à  $D = 940$  mm de  $O_2$ .

**B.4)** Le faisceau d'ions émis en  $O_2$  est un faisceau parallèle dans le plan de la figure. La fente du collecteur a une largeur de  $L' = 4,0$  mm dans le plan de la figure. Peut-il y avoir séparation isotopique dans le récipient du collecteur ?

**B.5)** L'intensité du faisceau utilisé dans un Calutron est de 100 mA . La source est alimenté en uranium contenant 0,7% de  ${}^{235}_{92}\text{U}^+$  et 99,3% de  ${}^{238}_{92}\text{U}^+$ . Quelle quantité de l'isotope 235 le Calutron peut-il isoler en une année de fonctionnement continu ?

## II. Résonance magnétique nucléaire (CCINP MP)

La résonance magnétique nucléaire RMN est une technique non destructive de visualisation en coupes des tissus organiques mous, en les laissant intacts. Elle utilise un champ magnétique intense permanent  $\vec{B}_0$  combiné avec un faible champ magnétique perturbateur oscillant. L'interaction de ces champs avec le moment magnétique d'une particule élémentaire (proton) engendre un comportement dynamique qui fournit des renseignements sur la nature et l'état des tissus organiques.

Données :

Masse de l'électron	$m_e = 9,1.10^{-31}$ kg
Charge élémentaire	$e = 1,6.10^{-19}$ C
Rapport gyromagnétique du proton	$\gamma_p = 2,67.10^8$ C.kg $^{-1}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = 1,05.10^{-34}$ J.s
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ H.m $^{-1}$

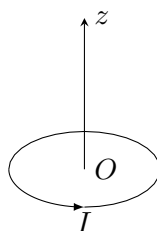
Formulaire :

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{a} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{a} - \Delta \vec{a} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial z^2}$$

Dans tout le problème, le référentiel d'étude du laboratoire, de repère d'espace ( $Oxyz$ ), est supposé galiléen.

### I. Rapports gyromagnétiques

- Q1.** Définir le vecteur moment magnétique  $\vec{m}$  associé à une boucle circulaire de courant de rayon  $R$  et d'axe de révolution  $Oz$ , parcourue par une intensité  $I$ . On note  $\vec{e}_z$  le vecteur unitaire de l'axe  $Oz$ . Le sens de rotation directe autour de l'axe  $Oz$  est le sens d'orientation du courant dans la spire.



Une boucle de courant est créée par un électron dans son mouvement orbital autour du noyau atomique (de charge électrique  $Ze$ ) supposé fixe en  $O$ . On considère que l'électron, assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m_e$ , possède une orbite circulaire de rayon  $r_B$  et de centre  $O$ , contenue dans le plan  $Oxy$  et qu'il n'est soumis qu'à la force électrique exercée par le noyau, qui s'écrit :

$$\vec{F}_{\text{el}} = - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|^3}$$

- Q2.** a) Montrer que la norme  $v$  de la vitesse de l'électron est constante.  
 b) On appelle  $T$  la période de révolution de l'électron sur son orbite. Exprimer le moment magnétique  $\vec{m} = m \vec{e}_z$  associé à cette boucle microscopique de courant en fonction du rayon  $r_B$ , de la charge élémentaire  $e$  et de  $T$ , puis en fonction de  $r_B$ ,  $v$  et  $e$ .

- c) Exprimer le moment cinétique  $\vec{L}_O = L_O \vec{e}_z$  de l'électron par rapport au point  $O$  en fonction des mêmes paramètres.
- d) En déduire le rapport gyromagnétique  $\gamma_e$ , défini par  $\vec{m} = \gamma_e \vec{L}_O$  en fonction des constantes fondamentales et calculer la valeur numérique de ce rapport.

*Le même type de relation entre le moment cinétique et le moment magnétique existe pour les protons. Dans une description classique, on assimile le proton à une boule chargée en rotation autour de l'un de ses diamètres. Le proton est donc considéré comme un petit solide en rotation autour d'un axe avec un vecteur rotation  $\vec{\Omega}$  et il possède de ce fait un moment cinétique  $\vec{S} = J \vec{\Omega}$  où  $J$  est le moment d'inertie par rapport à cet axe.*

- Q3.** Expliquer pourquoi une boule chargée, en rotation autour d'un axe passant par son centre, est elle aussi caractérisée par un moment magnétique dont on précisera la direction et le sens (on ne demande pas le calcul du moment mais seulement la justification de son existence).

*Il est donc possible d'associer au proton un moment magnétique  $\vec{m}$  qui est relié au moment cinétique  $\vec{S}$  par :  $\vec{m} = \gamma_p \vec{S}$  où  $\gamma_p$  est le rapport gyromagnétique du proton<sup>1</sup>.*

- Q4.** La mécanique quantique indique que la norme de  $\vec{S}$  vaut  $\hbar/2$  où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. Calculer la valeur numérique de  $\|\vec{m}\|$  pour le proton.

## II. Dipôles magnétiques

Soit un dipôle magnétique de moment  $\vec{m}$  placé en  $O$  dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . On rappelle les expressions de l'énergie potentielle  $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$  et du couple (moment de forces)  $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$ .

- Q5.** Définir un dipôle magnétique.
- Q6.** Quelles sont les deux positions d'équilibre d'un dipôle magnétique dans ce champ magnétique extérieur uniforme  $\vec{B}_0$ . Préciser les valeurs associées de l'énergie potentielle. Quelle position d'équilibre est stable ?
- Q7.** Évaluer la différence d'énergie en eV entre les deux configurations d'équilibre si le dipôle magnétique est un proton, soumis à un champ magnétique de 1 T (ordre de grandeur typique en RMN).

### Précession d'un dipôle magnétique.

*La précession est le nom donné au changement graduel d'orientation d'un vecteur qui décrit un cône dont l'axe est la direction de précession. Ce cône est parcouru à vitesse constante dans un sens donné.*

*Le dipôle magnétique placé en  $O$  est un proton en rotation autour d'un de ses diamètres, de moment cinétique  $\vec{S}$ . On écarte son moment magnétique d'un angle  $\alpha$  par rapport à la position d'équilibre stable dans  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ .*

- Q8.** En appliquant le théorème du moment cinétique, écrire l'équation différentielle caractéristique de l'évolution du moment magnétique  $\vec{m}$  sous la forme :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{m}$$

en précisant ce que vaut  $\vec{\omega}_0$ .

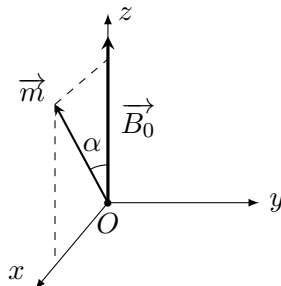
---

1. Dans la théorie quantique, ce moment cinétique est une grandeur quantifiée qui correspond au spin du proton.

- Q9.** Montrer que  $\|\vec{m}\|$  est une constante. On appellera  $m_0$  cette constante par la suite. Montrer que  $m_z = \vec{m} \cdot \vec{e}_z$  est une constante. En déduire la constance de l'angle  $\alpha$  entre  $\vec{m}$  et  $\vec{e}_z$  ( $\alpha$  est compris entre 0 et  $\pi$ ).

Dans la suite, on posera :  $\vec{m} = m_x \vec{e}_x + m_y \vec{e}_y + m_z \vec{e}_z$ .

- Q10.** a) Établir les équations différentielles vérifiées par  $m_x$  et  $m_y$ .  
b) En donner la solution sachant à l'instant  $t = 0$  on suppose que le moment magnétique est dans la configuration donnée sur la figure ci-dessous :



- c) Montrer que l'extrémité du vecteur  $\vec{m}_{\perp} = m_x \vec{e}_x + m_y \vec{e}_y$  décrit un cercle dans le plan  $Oxy$  dont on précisera le rayon. À quelle vitesse angulaire ce cercle est-il parcouru ? Quel est le sens de parcours sur ce cercle ?

### III. La relaxation de l'aimantation

Dans la technique de résonance magnétique nucléaire (RMN) on étudie un échantillon de matière (tissu organique mou) de petites dimensions, qui est placé dans un champ magnétique uniforme et permanent  $\vec{B}_0$  très intense (de l'ordre de 1T). Les molécules de l'échantillon contiennent des atomes d'hydrogène H dont les noyaux (protons) sont assimilés à des dipôles magnétiques de moments individuels  $\vec{m}_i$ .

Il n'est pas possible d'étudier le comportement individuel d'un seul moment magnétique et seule une étude d'ensemble peut être menée. Dans la suite, nous désignerons par  $\vec{M}$  la somme des moments magnétiques individuels des noyaux d'hydrogène de l'échantillon :

$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i$$

que nous appellerons **vecteur aimantation**.

En l'absence de  $\vec{B}_0$ , les vecteurs moments dipolaires magnétiques des noyaux d'hydrogène sont répartis dans toutes les directions et  $\vec{M} = \vec{0}$ . Par contre, en présence d'un champ magnétique extérieur  $\vec{B}_0$ , les différents  $\vec{m}_i$  auront tendance à s'aligner sur ce champ, ce qui créera une aimantation non nulle.

Il est très difficile de réaliser une étude théorique détaillée de l'aimantation à partir des moments magnétiques individuels car les noyaux d'hydrogène interagissent entre eux et aussi avec les autres atomes et électrons présents dans l'échantillon de matière. Seules des lois phénoménologiques, liées à l'expérience, peuvent être formulées. Elles sont expliquées dans les documents 1, 2 et 3 données en fin d'énoncé et auxquels on se reportera pour aborder la suite du problème.

- Q11.** On suppose pour simplifier l'étude qu'à l'instant  $t = 0$ , juste après l'impulsion radiofréquence, l'aimantation vaut  $\vec{M}(t = 0) = -M_0 \vec{e}_y$ .

- a) Projeter l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{M}$  pour obtenir celle vérifiée par  $M_z$ .

b) Résoudre cette dernière équation différentielle à l'aide de la condition initiale donnée.

**Q12.** Obtention de  $\vec{M}_\perp$  :

a) Donner l'équation différentielle vérifiée par  $\vec{M}_\perp$ .

b) En posant  $\vec{M}_1 = \vec{M}_\perp e^{t/T_2}$ , montrer que :

$$\frac{d\vec{M}_1}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_1$$

c) En déduire que la solution est :

$$\vec{M}_\perp = -M_0 e^{-t/T_2} [\sin(\omega_0 t) \vec{e}_x + \cos(\omega_0 t) \vec{e}_y]$$

Tracer l'évolution de  $M_\perp = \|\vec{M}_\perp\|$  en fonction du temps. Est-ce conforme aux résultats expérimentaux ?

#### IV. La RMN pulsée

Pour faire basculer l'aimantation dans le plan  $Oxy$  avant de pouvoir étudier sa relaxation vers l'équilibre, on applique un champ magnétique radiofréquence oscillant à la pulsation  $\omega$ . Ce champ magnétique est en fait un champ uniforme et tournant, de la forme :

$$\vec{B}_1(t) = B_1 (\cos(\omega t) \vec{e}_x - \sin(\omega t) \vec{e}_y)$$

où  $B_1 > 0$  est constant. Le champ magnétique total est donc :

$$\vec{B} = B_1 (\cos(\omega t) \vec{e}_x - \sin(\omega t) \vec{e}_y) + B_0 \vec{e}_z$$

Dans toute la suite du problème on posera :  $\omega_1 = \gamma_p B_1$  et  $\omega_0 = \gamma_p B_0$ .

**Q13.** L'origine de  $\vec{B}_1$  étant supposée placée en  $O$ , montrer que son extrémité décrit un cercle dont on précisera le rayon et le sens de parcours.

**Q14.** Écrire l'équation différentielle de l'évolution du vecteur aimantation dans le référentiel  $R_0$  du laboratoire *en négligeant les phénomènes de relaxation*.

On appelle  $R_1$  le référentiel "tournant" dans lequel le champ  $\vec{B}_1$  est un champ statique. La base orthonormée liée à ce référentiel tournant est ( $\vec{e}_1 = \vec{B}_1(t)/B_1$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_3$ ). On rappelle la loi de dérivation vectorielle d'un vecteur  $\vec{U}$  lors d'un changement de référentiel :

$$\left( \frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\vec{U}}{dt} \right)_{R_1} + \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{U}$$

**Q15.** Expliciter le vecteur rotation  $\vec{\omega}(R_1/R_0)$  du référentiel tournant  $R_1$  par rapport au référentiel du laboratoire  $R_0$ .

**Q16.** Écrire l'équation différentielle de l'évolution du vecteur aimantation  $\vec{M}$  dans le référentiel tournant  $R_1$  en négligeant toujours les phénomènes de relaxation. Montrer que dans ce référentiel  $R_1$  on peut écrire l'équation du mouvement sous la forme :

$$\left( \frac{d\vec{M}}{dt} \right)_{R_1} = \gamma_p \vec{M} \wedge \vec{B}_{\text{eff}}$$

où le champ magnétique "effectif"  $\vec{B}_{\text{eff}}$  est un champ statique dont on donnera l'expression en fonction de  $\gamma_p$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\vec{e}_1$  et  $\vec{e}_z$ . Faire un dessin de représentation du vecteur  $\vec{B}_{\text{eff}}$  avec ses composantes dans  $R_1$ .

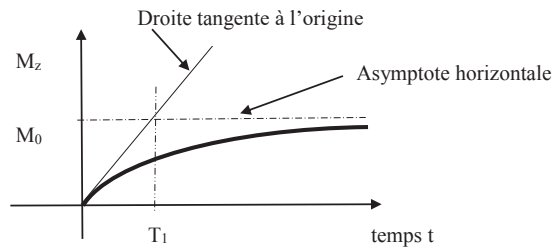
- Q17.** Décrire le mouvement de l'aimantation dans ce référentiel tournant. Une réponse qualitative est attendue, sans aucun calcul.
- Q18.** Si on tient compte maintenant des temps de relaxation  $T_1$  et  $T_2$ , décrire sans calculs vers quelle valeur tend l'aimantation dans le référentiel  $R_1$ ? On supposera qu'initialement,  $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ .
- Q19.** Comment est-il possible de faire "basculer" l'aimantation  $\vec{M}$  dans le plan  $Oxy$ ? Quelle pulsation  $\omega$  faut-il choisir? Faire l'application numérique avec  $B_0 = 1\text{T}$ . Quelle est alors la fréquence  $f$  du champ magnétique oscillant? Pourquoi appelle-t-on ce phénomène résonance?

*À partir d'une situation initiale, dans laquelle l'aimantation est en équilibre stable sous l'effet du champ permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ , on applique le champ radiofréquence  $\vec{B}_1(t)$  à un instant choisi comme origine  $t = 0$ . On supprime ensuite ce champ oscillant à un instant  $t_1$ .*

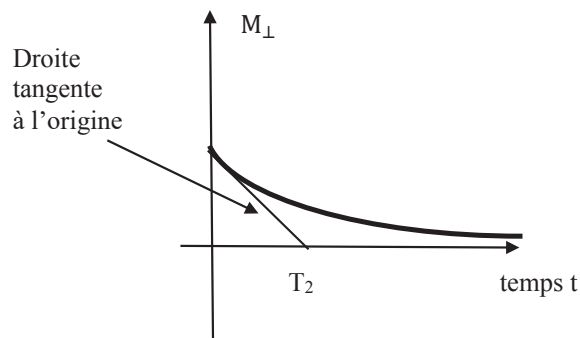
- Q20.** Quel est l'ordre de grandeur de la durée  $t_1$  pendant laquelle on doit appliquer  $\vec{B}_1$  pour obtenir un basculement de  $\vec{M}$  dans le plan  $Oxy$ ?

**Document 1**a) Temps de relaxation longitudinale  $T_1$ 

Quand on applique un champ magnétique  $\vec{B}_0$  sur la direction  $Oz$ , l'aimantation n'atteint pas sa valeur d'équilibre instantanément : elle augmente alors de la valeur initiale  $M_z = 0$  à la valeur d'équilibre  $M_z = M_0$  en un certain temps. On observe que  $M_z$  croît exponentiellement avec le temps vers  $M_0$  avec un temps caractéristique  $T_1$ , appelé temps de relaxation longitudinale :

b) Temps de relaxation transversale  $T_2$ 

Supposons qu'à l'instant  $t = 0$ , l'échantillon présente une aimantation transversale  $M_\perp$  dans le plan  $xOy$  orthogonal à  $Oz$ . Alors  $M_\perp$  doit tendre vers 0, avec un temps caractéristique  $T_2$ , car à l'équilibre, les composantes transversales de l'aimantation sont nulles.  $T_2$  est appelé temps de relaxation transversale et est toujours inférieur à  $T_1$ .





**Document 2 : équations de Bloch <sup>a</sup>**

Les équations différentielles couplées qui régissent l'évolution de l'aimantation sont appelées équations de Bloch. Elles permettent de décrire le comportement de l'aimantation en fonction du temps et en présence d'un champ magnétique permanent  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$ . En posant  $\vec{\omega}_0 = -\omega_0 \vec{e}_z$  avec  $\omega_0 = \gamma_p B_0 > 0$  qui est appelée pulsation de précession (ou pulsation de Larmor), ces équations de Bloch s'écrivent :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \vec{e}_z$$

avec  $\vec{M} = \vec{M}_\perp + M_z \vec{e}_z$ , où  $\vec{M}_\perp = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y$ .

Ainsi, le mouvement de  $\vec{M}$  est la superposition d'un mouvement de précession décrit par le terme  $\vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}$  et de termes d'amortissement décrivant les relaxations longitudinale et transversale.

<sup>a</sup>. les premières études de RMN ont été réalisées indépendamment en 1945-6 par Félix Bloch et Edward Mills Purcell, qui ont reçu le prix Nobel de physique en 1952.

**Document 3**

Le temps de relaxation  $T_1$  dépend de l'intensité du champ magnétique principal  $B_0$ . Le temps  $T_2$  en est indépendant. Ils dépendent de la nature des tissus comme l'indique le tableau de valeurs ci-dessous. Les tissus cancéreux ont une décroissance  $T_2$  plus lente que celle des tissus sains.

Champ magnétique $B_0$	1 T	1,5 T	
Tissus	$T_1$ (en ms)	$T_1$ (en ms)	$T_2$ (en ms)
Liquide céphalo-rachidien	2500	3000	200
Graisse	180	200	90
Substance blanche	500	750	90
Substance grise	350	500	75

Source : Guide des technologies de l'imagerie médicale et de la radiothérapie, JP Dillenseger, E Moerschel, Masson, 2009.

$T_1$  et  $T_2$  permettent d'obtenir de précieuses informations sur les tissus organiques. Afin de les mesurer, on utilise actuellement la méthode qui consiste à mettre l'aimantation hors d'équilibre, puis à déterminer les temps de relaxations longitudinale et transversale : c'est la RMN pulsée.

Avec cette technique, on fait "basculer" rapidement l'aimantation sur le plan  $Oxy$  grâce à un champ magnétique oscillant dans le domaine des radiofréquences. Lors de ce basculement, la norme de  $\vec{M}$  est conservée.

### III. Magnétorésistance (Mines-Ponts)

**Formulaire :** en coordonnées cylindriques, pour un champ scalaire  $f = f(r)$  qui ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe  $Oz$  on a :

$$\text{Laplacien : } \Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right)$$

$$\vec{\text{grad}} V = \frac{dV}{dr} \vec{e}_r$$

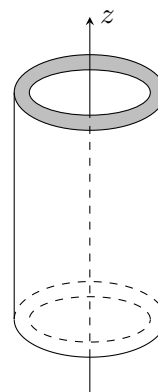
**Données :**

Charge élémentaire :  $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$  C

masse de l'électron :  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  kg

On considère un conducteur métallique se présentant sous la forme d'un tube cylindrique creux d'axe  $Oz$ . Le métal occupe l'espace délimité par un cylindre intérieur de rayon  $r_1$  et par un cylindre extérieur de rayon  $r_2 > r_1$ , les deux cylindres étant coaxiaux d'axe  $Oz$  et très grande longueur ; il est immobile dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

À l'aide d'un générateur de tension constante on impose les potentiels  $V(r_1) = V_1$  et  $V(r_2) = V_2$  sur les deux faces du conducteur. On se place en régime stationnaire et on néglige les effets de bord, ce qui revient à supposer le tube est de longueur infinie.



On émet l'hypothèse que le potentiel dans le conducteur ne dépend que de la distance  $r$  à l'axe  $Oz$  :  $V = V(r)$

*On admet que l'on peut écrire les équations de Maxwell dans un métal en utilisant la permittivité du vide  $\epsilon_0$  et que les équations locales de l'électrostatique sont valables en régime stationnaire, même si le métal est parcouru par des courants. La densité d'électrons de conduction  $n$  du métal sera supposée uniforme.*

- 1) Justifier l'hypothèse  $V = V(r)$ .
- 2) La densité volumique de charges dans le métal est supposée nulle. Montrer que  $V$  satisfait à l'équation  $\Delta V = 0$ . En déduire  $V(r)$  dans le métal en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r$ .

Déterminer l'expression du champ électrique  $\vec{E}(M)$  en un point  $M$  du métal à la distance  $r$  en fonction de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  et  $r$ .

*Le tube métallique est placé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B} = B \vec{e}_z$  avec  $B > 0$ .*

*On admet de plus que, du fait de son interaction avec les ions positifs du réseau métallique, un électron de conduction de vitesse  $\vec{v}$  est soumis, en plus des forces électromagnétiques, à une force de frottement de la forme  $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$ , avec  $\lambda$  constante positive.*

- 3) En étudiant les électrons de conduction situés dans un volume élémentaire  $d\tau$  localisé en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de  $Oz$ , montrer que la densité de courant vérifie l'équation :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(M, t) = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E}(M) - \frac{e}{m_e} \vec{j}(M, t) \wedge \vec{B} - \frac{\lambda}{m_e} \vec{j}(M, t)$$

où  $m_e$  désigne la masse de l'électron. Pour établir cette relation, on supposera que le champ électrostatique varie très peu à l'échelle de l'élément de volume  $d\tau$ .

- 4) On se place désormais en régime stationnaire. L'invariance de la situation par toute translation de direction  $Oz$  et par toute rotation d'axe  $Oz$  permet de poser :

$$\vec{j}(M) = j_r(r) \vec{e}_r + j_\theta(r) \vec{e}_\theta + j_z(r) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

Déduire de la question précédente les trois composantes  $j_r(r)$ ,  $j_\theta(r)$  et  $j_z(r)$  en fonction de  $e$ ,  $\lambda$ ,  $n$ ,  $B$  et  $E(r)$ .

- 5) Calculer l'intensité électrique  $I$  traversant une surface équipotentielle cylindrique de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . En déduire la résistance électrique  $R$  du tube, définie par :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I}$$

en fonction de  $e$ ,  $n$ ,  $\lambda$ ,  $B$ ,  $h$ ,  $r_1$  et  $r_2$ .

On note  $R_0$  la valeur de cette résistance en l'absence de champ magnétique. Exprimer l'écart relatif  $\varepsilon = \frac{R-R_0}{R_0}$  en fonction de  $e$ ,  $B$  et  $\lambda$ .

- 6) Calculer les valeurs numériques de  $R_0$  et de  $\varepsilon$  pour  $B = 1,0$  mT,  $r_1 = 1,0$  mm,  $r_2 = 3,0$  mm,  $h = 1,0$  mm,  $n = 1,1 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$  et  $\lambda = 1,8 \times 10^{-17} \text{ kg.s}^{-1}$ .

Commenter l'utilisation du phénomène pour la mesure de champs magnétiques.

**FIN DU DEVOIR**