

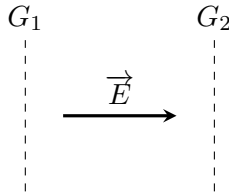
## Corrigé du DS n°4

## I. Séparation des isotopes par spectrométrie de masse. Centrale TSI 2012

### A - Accélération des ions

**A1)** Pour que les ions positifs soient accélérés, il faut que le champ électrostatique soit dirigé de  $G_1$  vers  $G_2$ . Or  $\vec{E}$  est dans le sens des potentiels décroissants. On en déduit que :

$$V_{G_1} > V_{G_2} \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_{G_1} - V_{G_2} > 0}$$



**A2)** L'énergie mécanique d'un ion est constante au cours du temps :

$$E_m(O_1) = E_m(O_2) \quad \text{d'où} \quad 0 + eV_{G_1} = \frac{1}{2}mu^2 + eV_{G_2}$$

ce qui entraîne pour chaque type d'ions :

$$\boxed{u_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}} \quad \text{et} \quad u_2 = \sqrt{\frac{2eU}{m_2}}}$$

avec  $m_1 = M_1/N_A$  et  $m_2 = M_2/N_A$ ,  $M_1$  et  $M_2$  étant les masses molaires des deux types d'ions, c'est à dire  $M_1 = 235 \text{ g.mol}^{-1}$  pour  ${}^{235}_{92}\text{U}^+$  et  $M_2 = 238 \text{ g.mol}^{-1}$  pour  ${}^{238}_{92}\text{U}^+$ .

**A3)** L'énergie cinétique acquise par les ions s'écrit :

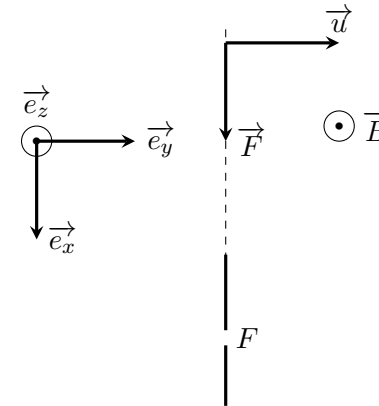
$$E_c = \frac{1}{2}mu^2 = eU = 15,0 \text{ keV} \quad \text{d'où} \quad \boxed{U = 15 \text{ kV}}$$

On en déduit que, après calcul des masses  $m_1$  et  $m_2$  :

$$\boxed{u_1 = 111 \text{ km/s} \quad \text{et} \quad u_2 = 110 \text{ km/s}}$$

### B - Déviation des ions

**B1)** Lorsqu'un ion positif pénètre dans la chambre de déviation, il est soumis à la force de Lorentz  $\vec{F} = e\vec{u} \wedge \vec{B}$ . Cette force doit être dirigée vers la fente  $F$ , d'où le sens de  $\vec{B}$  sur le schéma :  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  avec  $B > 0$ .



**B2)** On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) à un ion de charge  $e$  et de masse  $m$ . En négligeant les autres forces que la force magnétique on a :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

À la sortie de la chambre d'accélération (temps  $t = 0$ ), le vecteur vitesse de l'ion est dans le plan de la figure et  $\vec{v} = u \vec{e}_y$ . Pour  $t > 0$  on a :

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$

En projection sur  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  :

$$m \frac{dv_x}{dt} = eB v_y \quad ; \quad m \frac{dv_y}{dt} = -eB v_x \quad \text{et} \quad m \frac{dv_z}{dt} = 0$$

On a donc  $v_z = \text{Cste} = 0$  d'où  $z = \text{Cste} = 0$  (d'après conditions initiales) : le mouvement est plan, dans le plan  $O_2xy$  (= plan de la figure).

Posons  $\omega_c = eB/m$  (pulsation cyclotron) et  $\underline{v} = v_x + iv_y$  (vitesse complexe). On obtient l'équation :

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -i\omega_c \underline{v} \implies \underline{v}(t) = \underline{v}(0) e^{-i\omega_c t} = iu e^{-i\omega_c t}$$

Il vient :

$$v_x(t) = \text{Re}[v(t)] = u \sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad v_y(t) = \text{Im}[v] = u \cos(\omega_c t)$$

puis :

$$x(t) = -\frac{u}{\omega_c} \cos(\omega_c t) + C_1 \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{u}{\omega_c} \sin(\omega_c t) + C_2$$

Les conditions initiales donnent :  $C_1 = u/\omega_c$  et  $C_2 = 0$ , d'où :

$$x(t) = \frac{u}{\omega_c} (1 - \cos(\omega_c t)) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{u}{\omega_c} \sin(\omega_c t)$$

L'élimination du temps conduit à :

$$\left(x - \frac{u}{\omega_c}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{u}{\omega_c}\right)^2$$

ce qui est l'équation d'un cercle de centre  $\Omega = \left(\frac{u}{\omega_c}, 0\right)$  et de rayon  $R = \frac{u}{\omega_c} = \frac{mu}{eB}$ . On a donc pour les deux types d'ions :

$$R_1 = \frac{m_1 u_1}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_1}{e}} \quad \text{et} \quad R_2 = \frac{m_2 u_2}{eB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Um_2}{e}}$$

**B3)** Les ions de l'uranium 235 passent par  $F$  si et seulement si  $2R_1 = D$  ce qui conduit à :

$$B = \frac{2}{D} \sqrt{\frac{2Um_1}{e}} \stackrel{AN}{=} 0,576 \text{ T}$$

ce qui est un ordre de grandeur raisonnable pour  $B$ , facilement atteignable en laboratoire.

**B4)** Pour le champ magnétique trouvé à la question précédente on a :  $2R_2 = 946 \text{ mm} > D + L'$ . Les ions de l'isotope 238 ne passent pas par la fente  $F$ . Il y a bien séparation isotopique.

**B5)** Charge électrique passant dans le dispositif en un an :  $Q = It$  avec  $t = 365,25 \times 24 \times 3600$  secondes donc  $Q = 3,156 \cdot 10^6 \text{ C}$ .

Nombre d'ions :  $N = \frac{Q}{e} = 1,972 \cdot 10^{25}$

Le nombre d'ions  ${}^{235}_{92}\text{U}^+$  est donc  $0,7 \cdot 10^{-2} \times N = 1,380 \cdot 10^{23}$  ce qui correspond à 0,229 mol, soit une masse de 53,9 grammes. Ceci n'est pas beaucoup !

## II. Résonance magnétique nucléaire CCINP MP 2017

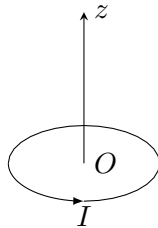
### I. Rapports gyromagnétiques

- Q1.** Le contour définissant la spire étant orienté, le vecteur surface obéit à la règle de la main droite :

$$\vec{S} = \pi R^2 \vec{e}_z$$

Le moment magnétique de la spire est le produit de  $\vec{S}$  par l'intensité  $I$  du courant qui traverse la spire.

$$\vec{m} = I \vec{S} = I \pi R^2 \vec{e}_z$$



- Q2.** a) Le mouvement étant circulaire ( $r = \text{Cste}$ ), le vecteur vitesse s'écrit en coordonnées polaires  $\vec{v} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ . La puissance de la force  $\vec{F}_{\text{el}}$  est donc nulle puisque :

$$\vec{F}_{\text{el}} \cdot \vec{v} = 0$$

D'après le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \vec{F}_{\text{el}} \cdot \vec{v} = 0$$

ce qui montre que l'énergie cinétique est conservée et donc que la norme de la vitesse est une constante.

- b) En assimilant la trajectoire de l'électron à un boucle de courant microscopique parcourue par un courant  $I = -e/T$  (voir cours), on peut associer à l'électron un moment magnétique :

$$\vec{m} = -\frac{e}{T} \pi r_B^2 \vec{e}_z$$

Comme la norme de la vitesse est constante, on peut écrire que la circonférence du cercle vérifie l'équation :

$$2\pi r_B = \int_0^T v dt = vT \quad \text{donc} \quad v = \frac{2\pi r_B}{T}$$

d'où :

$$\vec{m} = -\frac{e}{2} v r_B \vec{e}_z$$

- c) Par définition du moment cinétique :

$$\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m_e \vec{v} = m_e r_B v \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = m_e r_B v \vec{e}_z$$

- d) On en déduit que :

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{L}_O = \gamma_e \vec{L}_O$$

et donc que :

$$\gamma_e = -\frac{e}{2m_e}$$

Application numérique :  $\gamma_e = -8,8 \cdot 10^{10} \text{ C.kg}^{-1}$ .

- Q3.** Décomposons la boule en porteuse d'une charge totale  $q$  en petites charges élémentaires  $dq$ . Lorsque la boule est en rotation autour d'un diamètre  $OZ$ , chaque charge  $dq$  décrit un cercle autour de  $OZ$  et crée un moment magnétique dirigé dans la direction du vecteur  $\vec{e}_z$  si  $dq > 0$  et  $-\vec{e}_z$  si  $dq < 0$ . Si on considère que le moment magnétique total  $\vec{m}$  de la boule est la somme des moments magnétiques de chaque charge  $dq$ , alors  $\vec{m}$  sera colinéaire à  $\vec{e}_z$ .

- Q4.** Nous obtenons :  $\|\vec{m}\| = \gamma_p \hbar/2$ . Application numérique :  $\|\vec{m}\| = 1,4 \cdot 10^{-26} \text{ A.m}^2$ .

## II. Dipôles magnétiques

- Q5.** Il s'agit d'un système physique caractérisé par un moment magnétique  $\vec{m}$  non nul et dont la taille caractéristique  $\ell$  est très petite devant la distance où on observe son champ magnétique créé
- Q6.** Rappelons que lorsque le champ magnétique d'origine extérieure  $\vec{B}_0$  est uniforme, la résultante des forces magnétiques exercées sur le dipôle est nulle : il ne reste que le moment résultant de ces forces (couple).

Les positions d'équilibre correspondent à  $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ , c'est à dire à  $\vec{m}$  dans le même sens que  $\vec{B}_0$  où  $\vec{m}$  en sens opposé à  $\vec{B}_0$ . Dans le premier cas l'énergie potentielle vaut  $E_p(1) = -\|\vec{m}\|B_0$  et dans l'autre cas elle vaut  $E_p(2) = +\|\vec{m}\|B_0$ .

La position d'équilibre stable correspond à la plus petite valeur de  $E_p$  : c'est donc la première configuration.

- Q7.** La différence d'énergie vaut :  $\Delta E_p = 2\|\vec{m}\|B_0$ . Application numérique :  $\Delta E_p = 2,8 \cdot 10^{-26} \text{ J} = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ eV}$  (on rappelle qu'un eV est égal à  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ ).

C'est une très petite énergie comparée à celle des électrons dans les atomes par exemple qui est de l'ordre de quelques eV ou à celle des interactions (fortes) entre les nucléons du noyau atomique qui est de l'ordre de quelques centaines de MeV (méga électron-volts).

### Précession d'un dipôle magnétique.

- Q8.** En supposant que les seules forces qui agissent sont les forces magnétiques, nous avons (TMC) :

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}_0$$

En multipliant cette équation par  $\gamma_p$ , il vient :

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = -\gamma_p \vec{B}_0 \wedge \vec{m} \quad (1)$$

d'où :

$$\boxed{\vec{\omega}_0 = -\gamma_p \vec{B}_0}$$

Du point de vue des dimensions,  $\omega_0$  est homogène à l'inverse d'un temps : il s'agit d'une *pulsation*, appelée *pulsation de précession* ou encore *pulsation de Larmor*.

- Q9.** Considérons le produit scalaire de l'équation précédente par  $\vec{m}$ . Nous obtenons :

$$\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \vec{m} \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}_0) = 0$$

et comme :

$$\vec{m} \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(\vec{m} \cdot \vec{m})}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\|\vec{m}\|^2}{dt}$$

il vient :

$$\boxed{\frac{d\|\vec{m}\|^2}{dt} = 0 \iff \|\vec{m}\| = \text{Cste}}$$

Considérons maintenant le produit scalaire de l'équation précédente par  $\vec{e}_z$ . Puisque  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$  et que  $\vec{e}_z$  est un vecteur constant, il vient :

$$\vec{e}_z \cdot \frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{d(\vec{e}_z \cdot \vec{m})}{dt} = \vec{e}_z \cdot (\vec{m} \wedge \vec{B}_0) = 0$$

et donc :

$$\boxed{\vec{e}_z \cdot \vec{m} = m_z = \text{Cste}}$$

En utilisant les deux expressions équivalentes du produit scalaire, on en déduit que :

$$\vec{m} \cdot \vec{B}_0 = m_z B_0 = \|\vec{m}\| B_0 \cos \alpha = \text{Cste}$$

ce qui montre que  $\cos \alpha$  reste constant au cours du mouvement et donc que  $\alpha$  reste constant. Ceci montre que le vecteur  $\vec{m}$  décrit un cône de demi-angle au sommet  $\alpha$ .

- Q10.** a) Projétons l'équation (1) sur la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .  
Nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{m}_x &= \gamma_p B_0 m_y \\ \dot{m}_y &= -\gamma_p B_0 m_x \end{cases}$$

En dérivant la première équation par rapport au temps et en y remplaçant  $\dot{m}_y$ , il vient :

$$\ddot{m}_x = \gamma_p B_0 \dot{m}_y = -(\gamma_p B_0)^2 m_x$$

Par la suite, nous poserons :  $\omega_0 = \|\vec{\omega}_0\| = \gamma_p B_0 > 0$ . On obtient alors :

$$\ddot{m}_x + \omega_0^2 m_x = 0$$

ce qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ . Une équation similaire est vérifiée par  $m_y$ .

- b) Nous avons :

$$m_x(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$$

En observant la configuration du moment magnétique à  $t = 0$ , on voit que  $m_x(0) = m_0 \sin \alpha$  et que  $\dot{m}_x(0) = \omega_0 m_y(0) = 0$ . On en déduit que  $\lambda = m_0 \sin \alpha$  et  $\mu = 0$  et donc :

$$m_x(t) = m_0 \sin \alpha \cos(\omega_0 t)$$

puis :

$$\begin{aligned} \dot{m}_y &= -\gamma_p B_0 m_x = -\omega_0 m_0 \sin \alpha \cos(\omega_0 t) \\ \Rightarrow m_y(t) &= -m_0 \sin \alpha \sin(\omega_0 t) + \text{Cste} \end{aligned}$$

Comme  $m_y(0) = 0$ , la constante d'intégration est nulle et nous obtenons :

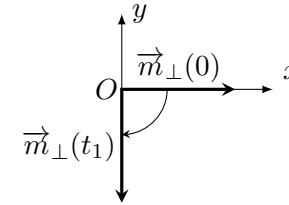
$$m_y(t) = -m_0 \sin \alpha \sin(\omega_0 t)$$

- c) On a :

$$m_x^2 + m_y^2 = (m_0 \sin \alpha)^2$$

ce qui montre que l'extrémité du vecteur  $\vec{m}_\perp$  décrit un cercle de rayon  $m_0 \sin \alpha$ . La vitesse angulaire de parcours de ce cercle est  $\omega_0$ .

À l'instant  $t = 0$ ,  $\vec{m}_\perp(0) = m_0 \sin \alpha \vec{e}_x$  et à l'instant  $t_1 > 0$  tel que  $\omega_0 t_1 = \pi/2$ ,  $\vec{m}_\perp(t_1) = -m_0 \sin \alpha \vec{e}_y$ . On voit donc que le sens de parcours est le *sens horaire*.



### III. La relaxation de l'aimantation

- Q11.** On suppose pour simplifier l'étude qu'à l'instant  $t = 0$ , juste après l'impulsion radiofréquence, l'aimantation vaut  $\vec{M}(t = 0) = -M_0 \vec{e}_y$ .

- a) Le document 2 donne l'équation à projeter. On obtient :

$$\frac{dM_z}{dt} = -\frac{M_z - M_0}{T_1} \iff \frac{dM_z}{dt} + \frac{M_z}{T_1} = \frac{M_0}{T_1}$$

- b) La solution est :  $M_z(t) = A \exp(-t/T_1) + M_0$ , avec  $M_z(0) = 0$ , ce qui conduit à :

$$M_z(t) = M_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]$$

**Q12.** Obtention de  $\vec{M}_\perp$  :

- a) La projection de l'équation du document 2 sur un plan orthogonal à  $\vec{e}_z$  conduit à :

$$\boxed{\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_\perp - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}}$$

- b) Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}_\perp}{dt} &= \frac{d\vec{M}_\perp}{dt} e^{t/T_2} + \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} e^{t/T_2} \\ &= \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_\perp e^{t/T_2} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} e^{t/T_2} + \frac{\vec{M}_\perp}{T_2} e^{t/T_2} \\ &= \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M}_\perp \end{aligned}$$

ce qui est le résultat demandé par l'énoncé.

- c) Il s'agit de la même équation différentielle que celle qui était vérifiée à la question **Q8.** par  $\vec{m}$ . On en déduit les deux équations couplées :

$$\begin{cases} \dot{M}_{1x} = -\omega_0 M_{1y} \\ \dot{M}_{1y} = \omega_0 M_{1x} \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\ddot{M}_{1y} = -\omega_0^2 M_{1y}$$

et donc à :

$$M_{1y}(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$$

avec :  $M_{1y}(0) = -M_0$  et  $\dot{M}_{1y}(0) = \omega_0 M_{1x}(0) = 0$  et donc :

$$M_{1y}(t) = -M_0 \cos(\omega_0 t)$$

et

$$\dot{M}_{1x} = -\omega_0 M_{1y} = M_0 \cos(\omega_0 t) \implies M_{1x}(t) = M_0 \sin(\omega_0 t)$$

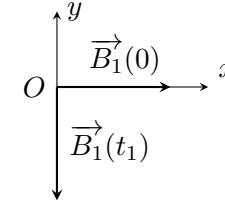
et, finalement :

$$\vec{M}_\perp(t) = \vec{M}_\perp e^{-t/T_2} = -M_0 e^{-t/T_2} [-\sin(\omega_0 t) \vec{e}_x + \cos(\omega_0 t) \vec{e}_y]$$

La norme de ce vecteur est donc :  $M_\perp(t) = M_0 e^{-t/T_2}$ , ce qui donne une décroissance exponentielle, avec une constante de temps  $T_2$ , conforme à l'allure donnée sur le document 1.

#### IV. La RMN pulsée

**Q13.** Tout d'abord,  $\|\vec{B}_1\| = B_1 = \text{Cste}$ . Ensuite, si on représente  $\vec{B}_1$  à  $t = 0$ , puis à  $t_1$  tel que  $\omega t_1 = \pi/2$ , nous obtenons :



Ainsi, l'extrémité de  $\vec{B}_1$  décrit un cercle de rayon  $B_1$  dans le sens horaire.

**Q14.** Négliger les phénomènes de relaxation revient à faire  $T_1 \rightarrow +\infty$  et  $T_2 \rightarrow +\infty$  dans les équations de Bloch. Le champ magnétique vu par le dipôle étant maintenant  $\vec{B}_0 + \vec{B}_1$ , il vient :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{M} + \vec{\omega}_1 \wedge \vec{M}$$

avec  $\vec{\omega}_0 = -\gamma_p B_0 \vec{e}_z = -\omega_0 \vec{e}_z$  et  $\vec{\omega}_1 = -\gamma_p \vec{B}_1 = -\omega_1 \vec{e}_1$ .

- Q15.** Il s'agit d'une rotation de repère dans le sens horaire, ce qui donne :

$$\vec{\omega}(R_1/R_0) = -\omega \vec{e}_z$$

- Q16.** Utilisons la loi de dérivation vectorielle :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{M} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_1} - \omega \vec{e}_z \wedge \vec{M}$$

et, d'autre part :

$$\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_0} = -\omega_0 \vec{e}_z \wedge \vec{M} - \omega_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{M}$$

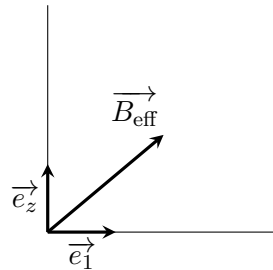
En regroupant les deux expressions, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_1} &= (\omega - \omega_0) \vec{e}_z \wedge \vec{M} - \omega_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{M} \\ &= \vec{M} \wedge [(\omega_0 - \omega) \vec{e}_z + \omega_1 \vec{e}_1] \end{aligned}$$

d'où :

$$\vec{B}_{\text{eff}} = \frac{\omega_0 - \omega}{\gamma_p} \vec{e}_z + \frac{\omega_1}{\gamma_p} \vec{e}_1 = \left(B_0 - \frac{\omega}{\gamma_p}\right) \vec{e}_z + B_1 \vec{e}_1$$

qui est bien homogène à un champ magnétique. Ce champ "effectif" est représenté sur le figure ci-dessous, dans le cas où  $\omega_0 > \omega$  :



- Q17.** Dans le référentiel tournant, nous sommes ramenés à la situation des questions 9., 10. et 11. Le vecteur aimantation va avoir un *mouvement de précession* autour de l'axe défini par le champ magnétique effectif  $\vec{B}_{\text{eff}}$ .

- Q18.** Si on tient compte des temps de relaxation  $T_1$  et  $T_2$ , ce mouvement de précession va s'amortir. Le vecteur aimantation va venir s'aligner selon l'axe défini par le champ magnétique effectif  $\vec{B}_{\text{eff}}$ , avec une constante de temps  $T_1$ , tandis que les composantes de  $\vec{M}$  orthogonales à cet axe vont tendre vers 0 avec une constante de temps  $T_2$ .

Comme, selon le document 3, la norme de  $\vec{M}$  est conservée au cours de ce basculement, le vecteur  $\vec{M}$  va finir par s'aligner selon l'axe de  $\vec{B}_{\text{eff}}$ , avec une norme égale à  $M_0$ .

- Q19.** Il faut faire varier la direction de l'axe de  $\vec{B}_{\text{eff}}$  en agissant sur la *vitesse angulaire*  $\omega$  du champ tournant et en attendant un temps  $T > \max(T_1, T_2)$  pour que  $\vec{M}$  ait le temps de s'aligner sur cet axe. Ainsi, pour faire basculer  $\vec{M}$  dans le plan  $Oxy$ , il est nécessaire que  $\omega = \omega_0$ .

A.N. :  $\omega = \omega_0 = 2,67.10^8 \text{ rad.s}^{-1}$  et donc  $f = \omega/2\pi = 42,5 \text{ MHz}$ , ce qui correspond à des ondes radiofréquence.

On appelle ce phénomène "résonance" parce que ce basculement se produit pour une *fréquence caractéristique*  $f_0$  du système.

- Q20.** Il faut que  $t_1 > \max(T_1, T_2)$  (déjà répondu à la question précédente). D'après le document 3,  $T_1 > T_2$  pour les tissus étudiés et donc il faut que  $t_1 > T_1$  qui varie de 0,2 s à 3 s et qui dépend de l'intensité de  $B_0$ .

### III. Magnéto-résistance. Mines-Pont PSI 2016

- 1) Le problème est invariant par toute rotation autour de l'axe  $Oz$  et par toute translation le long de l'axe  $Oz$  puisqu'on néglige les effets de bord. On a donc  $V = V(r)$

- 2) On a :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

ce qui implique :

$$\operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} V) = \Delta V = 0$$

qui est l'équation de Laplace. On en déduit que :

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dV}{dr} \right) = 0 \quad \text{donc} \quad r \frac{dV}{dr} = C \quad \text{d'où} \quad V(r) = C \ln(r) + C'$$

où  $C$  et  $C'$  sont deux constantes. Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{cases} V(r_1) = C \ln(r_1) + C' = V_1 \\ V(r_2) = C \ln(r_2) + C' = V_2 \end{cases}$$

On résout pour en déduire que :

$$\boxed{C = \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_1/r_2)} \quad \text{et} \quad C' = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_1/r_2)} \ln(r_1)}$$

Il s'ensuit que :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\frac{C}{r} \vec{e}_r = \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_2/r_1)} \frac{\vec{e}_r}{r}}$$

- 3) Un électron de conduction dans le volume  $d\tau$ , assimilé à une charge ponctuelle  $M_i$  de vecteur vitesse  $\vec{v}_i$ , est soumis à :

- La force électrique  $-e \vec{E}(M_i)$
- La force magnétique  $-e \vec{v}_i \wedge \vec{B}$
- La force de frottement  $-\lambda \vec{v}_i$

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) donne :

$$m_e \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -e \vec{E}(M_i) - e \vec{v}_i \wedge \vec{B} - \lambda \vec{v}_i$$

En sommant sur les  $\delta N$  électrons de conduction contenus dans  $d\tau$  on obtient :

$$m_e \sum_{i=1}^{\delta N} \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -e \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{E}(M_i) - e \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i \wedge \vec{B} - \lambda \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i$$

En supposant que le champ électrostatique varie peu à l'échelle de l'élément de volume  $d\tau$  on peut l'assimiler à sa valeur en  $M$  situé sur un sommet du petit parallélépipède formant le volume  $d\tau$  (et à la distance  $r$  de l'axe  $Oz$ ). D'autre part, en permutant la somme et la dérivation dans le membre de gauche et en utilisant le fait que  $\vec{B}$  est uniforme, on obtient :

$$m_e \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i \right) = -e \delta N \vec{E}(M) - e \left( \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i \right) \wedge \vec{B} - \lambda \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i$$

On introduit ensuite la vitesse de dérive  $\vec{v}_e(M, t)$  des électrons de conduction en  $M$  et à l'instant  $t$ . Par définition, c'est la moyenne arithmétique :

$$\vec{v}_e(M, t) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\delta N} \left( \sum_{i=1}^{\delta N} \vec{v}_i \right)$$

On obtient alors :

$$m_e \frac{\partial (\delta N \vec{v}_e(M, t))}{\partial t} = -e \delta N \vec{E}(M) - e \delta N \vec{v}_e(M, t) \wedge \vec{B} - \lambda \delta N \vec{v}_e(M, t)$$

Enfin, comme  $\delta N = n d\tau$ , que l'élément de volume  $d\tau$  reste fixe et que le vecteur densité de courant est donné par :

$$\vec{j}(M, t) = -en\vec{v}_e(M, t)$$

(les électrons de conduction sont les seuls PCM puisque les ions sont fixes dans le référentiel d'étude), il vient (tous les champs vectoriels étant évalués au point  $M$  et à l'instant  $t$ ) :

$$-\frac{m_e}{e} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} d\tau = -en \vec{E} d\tau + \vec{j} \wedge \vec{B} d\tau + \frac{\lambda}{e} \vec{j} d\tau$$

En simplifiant  $d\tau$ , on aboutit à :

$$\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(M, t) = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E}(M) - \frac{e}{m_e} \vec{j}(M, t) \wedge \vec{B} - \frac{\lambda}{m_e} \vec{j}(M, t)$$

ce qui est bien l'équation demandée.

- 4) En régime stationnaire on a  $\partial \vec{j} / \partial t = \vec{0}$ , ce qui conduit à :

$$\vec{j}(M) + \frac{e}{\lambda} \vec{j}(M) \wedge \vec{B} = \frac{ne^2}{\lambda} \vec{E}(M)$$

Comme le point  $M$  est à la distance  $r$  de  $Oz$  et qu'on suppose l'invariance des courants par toute translation de direction  $Oz$  et par toute rotation d'axe  $Oz$ , on pose :

$$\vec{j}(M) = j_r(r) \vec{e}_r + j_\theta(r) \vec{e}_\theta + j_z(r) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

- 5) L'équation précédente peut être explicitée sur la base cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . On obtient :

$$\begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_z \end{pmatrix} + \frac{e}{\lambda} \begin{pmatrix} B j_\theta \\ -B j_r \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{ne^2}{\lambda} \begin{pmatrix} E(r) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où le système :

$$\begin{cases} j_r + (eB/\lambda) j_\theta &= (ne^2/\lambda) E(r) \\ j_\theta - (eB/\lambda) j_r &= 0 \\ j_z &= 0 \end{cases}$$

On résout pour trouver :

$$j_r = \frac{ne^2}{\lambda} \frac{E(r)}{1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}} \quad ; \quad j_\theta = \frac{eB}{\lambda} \frac{ne^2}{\lambda} \frac{E(r)}{1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}} \quad \text{et} \quad j_z = 0$$

- 6) L'équipotentielle est la surface cylindrique de rayon  $r$  et de hauteur  $h$ . On a donc, avec  $d\vec{S} = r d\theta dz \vec{e}_r$  :

$$I = \iint_S \vec{j}(M) \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=z_0}^{z_0+h} j_r r d\theta dz = \frac{ne^2}{\lambda} \frac{E(r)}{1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}} 2\pi r h$$

En remplaçant  $E(r)$  par son expression on obtient :

$$I = 2\pi h \frac{ne^2}{\lambda} \frac{V_1 - V_2}{\ln(r_2/r_1)} \frac{1}{1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}}$$

d'où :

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{\lambda}{2\pi h ne^2} \ln(r_2/r_1) \left( 1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2} \right)$$

Si on note  $R_0$  la résistance en l'absence de champ magnétique alors :

$$R_0 = \frac{\lambda}{2\pi h ne^2} \ln(r_2/r_1)$$

On remarque alors que :

$$R = R_0 \left( 1 + \frac{e^2 B^2}{\lambda^2} \right) \implies \boxed{\varepsilon = \frac{e^2 B^2}{\lambda^2}}$$

A.N. :  $R_0 = 110 \, \Omega$  et  $\varepsilon = 7,9.10^{-11}$

Cette variation relative de résistance est vraiment très faible et probablement très difficile à déceler.