

CORRIGÉ du DS n°3 (CCP-e3a) - Partie électromagnétisme

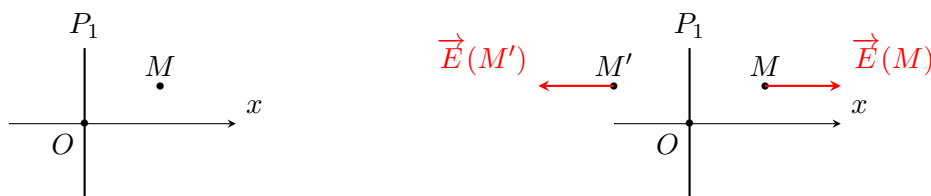
1 Étude d'un condensateur

ÉTUDE D'UN MICROPHONE ÉLECTROSTATIQUE. D'après Centrale TSI

I. Capacité du condensateur au repos

- 1) Étant donné un point M quelconque de coordonnées (x, y, z) , les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ sont deux plans de symétrie des charges contenant M . On en déduit que : $\vec{E}_1(M) = E_1(x, y, z) \vec{u}_x$. De plus, il y a invariance par toute translation le long de Oy et de Oz ce qui entraîne que E_1 ne dépend ni de y , ni de z . On a donc :

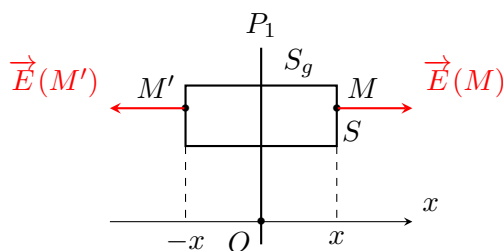
$$\vec{E}_1(M) = E_1(x) \vec{u}_x$$



- 2) Le plan de $P_1 = (Oyz)$ est un plan de symétrie des charges électriques : de part et d'autre de ce plan, le champ électrique est transformé en son symétrique. Nous avons donc :

$$\vec{E}_1(M') = \text{sym}_{Oyz} \vec{E}_1(M) = -\vec{E}_1(M)$$

- 3) On prend une surface de Gauss (surface fermée) S_g en forme de cylindre de génératrices \parallel à Ox , de surface de base S et placé symétriquement par rapport au plan de P_1 . Un point M de coordonnée $x > 0$ est supposé être situé sur la base supérieure du cylindre.



Le théorème de Gauss donne :

$$\iint_{S_g} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \iint_{\text{Base sup}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S}_M + \iint_{\text{Base inf}} \vec{E}_1(M') \cdot d\vec{S}_{M'} + \iint_{\text{Surf lat}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_{\text{lat}}$$

L'intégrale sur la surface latérale du cylindre est nulle et les deux premières intégrales sont égales. Il vient alors :

$$\iint_{S_g} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = 2 \iint_{\text{Base sup}} \vec{E}_1(M) \cdot d\vec{S}_M = 2 E_1(x) S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

et donc $E_1(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ si $x > 0$. Dans le cas où $x < 0$, on utilise la propriété de symétrie de \vec{E}_1 de part et d'autre du plan de symétrie P_1 . En résumé :

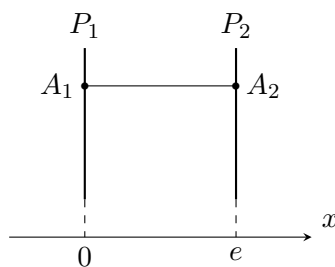
$$\vec{E}_1(M) = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

4) On peut dresser le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$	0	e	$+\infty$
\vec{E}_1	$-\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	
\vec{E}_2	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$-\sigma/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	
\vec{E}	$\vec{0}$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\vec{0}$	

On a donc : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$ entre les deux plaques P_1 et P_2 et $\vec{E}(M) = \vec{0}$ partout ailleurs.

5) Appliquons le théorème de la circulation entre les deux plaques, le long d'un chemin rectiligne allant d'un point A_1 de P_1 vers un point A_2 de P_2 .



On obtient :

$$u_c = V_{P_1} - V_{P_2} = \int_{A_1}^{A_2} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^e \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \cdot dz \vec{u}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} e = \frac{q e}{S \varepsilon_0}$$

d'où l'expression :

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{e}$$

II. Introduction d'une plaque métallique entre les deux armatures du condensateur

1) Initialement, les électrons de conduction de \mathcal{P} se déplacent sous l'influence du champ électrique $\vec{E} = \sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$ créé par le condensateur. Comme $\vec{F}_{el} = -e \vec{E}$, les électrons s'accumulent sur la face A et il y a un défaut d'électron sur la face B . On a donc :

$$\sigma_A < 0 \quad \text{et} \quad \sigma_B > 0$$

Comme la plaque est initialement non chargée, on a :

$$\sigma_A = -\sigma_B$$

- 2) Le champ électrique total \vec{E}_{tot} créé par l'ensemble $\{P_1 + P_2 + A + B\}$ est la superposition du champ \vec{E} créé par $\{P_1 + P_2\}$ qui a déjà été calculé à la question **1.3**) et des champs électriques \vec{E}_A et \vec{E}_B créés par les faces A et B . En ordonnant les résultats dans un tableau, nous avons :

x	0	x_0	$x_0 + d$	e
\vec{E}	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma/\varepsilon_0 \vec{u}_x$	
\vec{E}_A	$-\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma_A/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	
\vec{E}_B	$-\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$-\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	$\sigma_B/2\varepsilon_0 \vec{u}_x$	

Pour $x_0 \leq x \leq x_0 + d$, le champ électrique total s'écrit :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_A}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x - \frac{\sigma_B}{2\varepsilon_0} \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x + \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0} \vec{u}_x = \vec{0}$$

On en déduit que :

$$\sigma_A = -\sigma \quad \text{et} \quad \sigma_B = \sigma$$

- 3) D'après le tableau étudié à la question précédente, nous avons :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x \text{ pour } x \in [0, x_0] \text{ et } x \in [x_0, x_0 + d]$$

ce qui signifie que dans ces deux régions les champs électriques créés par A et B se compensent.

Comme le champ électrique est nul dans le domaine $x \in [x_0, x_0 + d]$, le potentiel y est constant et $V(x_0) = V(x_0 + d)$. On en déduit que :

$$u_c = V(x=0) - V(x=e) = \{V(0) - V(x_0)\} + \{V(x_0+d) - V(e)\} = \frac{\sigma x_0}{\varepsilon_0} + \frac{\sigma(e - x_0 - d)}{\varepsilon_0}$$

et donc :

$$u_c = \frac{\sigma(e-d)}{\varepsilon_0}$$

- 4) En posant $\sigma = q/S$, il vient :

$$u_c = \frac{q(e-d)}{S\varepsilon_0} = \frac{q}{C'}$$

et donc :

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{e-d} > \frac{\varepsilon_0 S}{e} = C_0$$

La plaque métallique permet donc d'augmenter la capacité du condensateur.

III. Réponse du circuit électrique en régime permanent sinusoïdal. D'après Centrale TSI

- 1) Durant le passage de l'onde acoustique, l'écartement entre les deux armatures du condensateur devient $e + x_1(t)$ et la capacité s'écrit :

$$C(t) = \frac{\varepsilon_0 S}{e + x_1(t)} = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \frac{1}{1 + x_1/e} \approx \frac{\varepsilon_0 S}{e} \left(1 - \frac{x_1(t)}{e}\right) = C_0 - C_0 \frac{X_1}{e} \cos(\omega t)$$

et donc :

$$C_1 = C_0 \frac{X_1}{e}$$

2) a) On a :

$$i = \frac{d(Cu_c)}{dt} = C(t) \frac{du_c}{dt} + u_c \frac{dC}{dt}$$

b) Il vient donc :

$$u = Ri = RC \frac{du_c}{dt} + u_c R \frac{dC}{dt}$$

Or $u_c = U_0 - u$, ce qui entraîne :

$$u = -RC \frac{du}{dt} + (U_0 - u) R \frac{dC}{dt}$$

d'où :

$$RC \frac{du}{dt} + \left(1 + R \frac{dC}{dt}\right) u = RU_0 \frac{dC}{dt}$$

3) En notant que $R \frac{dC}{dt} = RC_0 \omega \frac{X_1}{e} \sin(\omega t)$, on peut supposer que, lorsque $X_1/e \ll 1$:

$$\left| R \frac{dC}{dt} \right| \ll 1 \quad \text{et} \quad C \approx C_0$$

On a donc :

$$RC_0 \frac{du}{dt} + u = RC_0 \omega U_0 \frac{X_1}{e} \sin(\omega t)$$

En divisant par C_0 , on obtient :

$$\frac{du}{dt} + \omega_0 u = \omega U_0 \frac{X_1}{e} \sin(\omega t) = \omega U_0 \frac{X_1}{e} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

et on obtient bien le résultat demandé par l'énoncé.

$$\frac{du}{dt} + \omega_0 u = \omega A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{avec} \quad A = \frac{U_0 X_1}{e} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC_0}$$

4) Dans le domaine complexe : $\underline{u}(t) = U \exp(j\omega t) \exp(j\varphi_u)$, ce qui conduit à :

$$(j\omega + \omega_0) \underline{u}(t) = -j\omega U_0 \frac{X_1}{e} e^{j\omega t} \implies \underline{u}(t) = \frac{-j\omega}{(j\omega + \omega_0)} U_0 \frac{X_1}{e} e^{j\omega t}$$

d'où :

$$U = |\underline{u}| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} U_0 \frac{X_1}{e}$$

5) On étudie les asymptotes basse et haute fréquence :

- Si $\omega \ll \omega_0$, $U \approx U_0 \frac{X_1}{e} \frac{\omega}{\omega_0}$ donc $20 \log U = 20 \log \left(U_0 \frac{X_1}{e} \right) + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$. C'est une droite de pente +20 dB/décade.
- Si $\omega \gg \omega_0$, $U \approx U_0 \frac{X_1}{e}$ donc $20 \log U = 20 \log \left(U_0 \frac{X_1}{e} \right)$.

L'allure du graphe reproduit ces deux comportements asymptotiques. On remarque qu'il y a une asymptote basse fréquence qui varie de -8 dB à 30 Hz jusqu'à 0 dB à 70 Hz. On peut calculer sa pente :

$$p = \frac{0 + 8}{\log 70 - \log 30} \approx 22 \text{ dB/décade}$$

ce qui confirme le modèle théorique.

- 6) Les deux asymptotes se coupent en $\omega_0 = 2\pi f_0$. On lit sur le graphique $f_0 = 70$ Hz et donc :

$$C_0 = \frac{1}{2\pi f_0 R} = 2,3 \times 10^{-7} \text{ F}$$

- 7) On peut supposer qu'il y a une résonance mécanique à la fréquence $f_R = 2.10^4$ Hz, pour la pulsation caractéristique $\omega_R = \sqrt{k_e/m_e}$, ce qui donne :

$$\sqrt{k_e/m_e} = 2\pi f_R = 1,3.10^5 \text{ rad.s}^{-1}$$