

- Correction - DS n°3bis (CCS - Mines) - Partie électromagnétisme

1 STRUCTURE INTERNE DE LA TERRE (d'après CCS-PSI-2024)

A. Préliminaire : l'analogie électrostatique - gravitation

Q.16	électrostatique	gravitation
$\vec{F}_{1/2}$	$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_{12}}{r^2}$	$-G m_1 m_2 \frac{\vec{e}_{12}}{r^2}$
force	q charge	m masse
	$\vec{F} = q \vec{E}$	$\vec{F} = m \vec{G}$
champs	\vec{E}	\vec{G}
constante	$\frac{1}{\epsilon_0}$	$-4\pi G$

\Rightarrow	$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ ρ : charge vol.	$\text{div } \vec{G} = -4\pi G \rho$ ρ : masse vol.
th de GAUSS	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$	$\oint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}$

B. Un premier modèle géométrique fuste de la Terre

0.17



On utilise r quelconque à l'aide de coordonnées sphériques (r, θ, φ)

Le problème est à symétrie SPHÉRIQUE (invariant par toute rotation autour de O)

$$\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$$

Σ : sphère de centre O et de rayon r

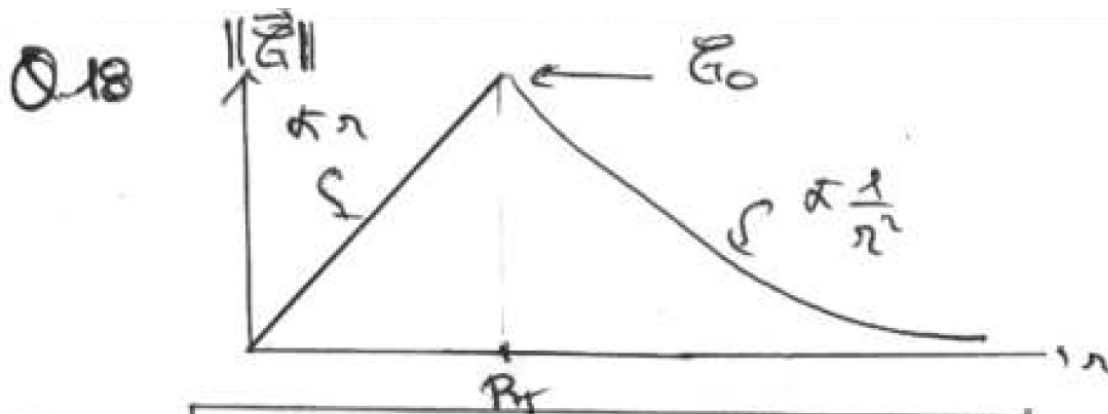
$$\oint_{\Sigma} \vec{E}(r) \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma} \vec{E}(r) \vec{e}_r \cdot d\vec{S} \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_1 = E(r) 4\pi r^2$$

$$\text{si } r < R_T \quad q_{\text{int}} = \rho_0 \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{si } r \geq R_T \quad q_{\text{int}} = \rho_0 \frac{4}{3} \pi R_T^3 = q_T$$

\Rightarrow
Th de
GAUSS

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(r) = -\frac{4}{3} \pi \epsilon_0 r \vec{e}_r = -\frac{G \rho_0 r}{R_T^3} \vec{e}_r \\ \text{si } r \leq R_T \\ \vec{E}(r) = -\frac{4}{3} \pi \epsilon_0 \frac{R_T^3}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{G \rho_0 R_T^3}{r^2} \vec{e}_r \\ \text{si } r \geq R_T \end{array} \right.$$



Q.19

$$E_0 = \frac{G M_T}{R_T^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,972 \cdot 10^{24}}{(6371 \cdot 10^3)^2} = 9,814 \text{ m.s}^{-2}$$

C. Un second modèle (noyau + manteau) de la Terre

Q.20 D'après le th de GAUSS, E_0 ne dépend que de M_T et R_T qui sont inchangés.

Voir fin
du corrigé
* pour autre
méthode

Q.21 On appelle l'équation de Maxwell-Gauss "gravitationnelle"

• pour $r \leq R_2$ $E_T(r) = -E_0 \frac{r}{R_2}$ (car $E_T < 0$)

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-r^2 E_0 \frac{r}{R_2}) = -\frac{3E_0}{R_2} = -4\pi G \rho(r)$$

$$\Rightarrow \rho(r) = \frac{3E_0}{4\pi G R_2} = \rho_c$$

• pour $R_2 \leq r \leq R_T$ $E_T(r) = -E_0$

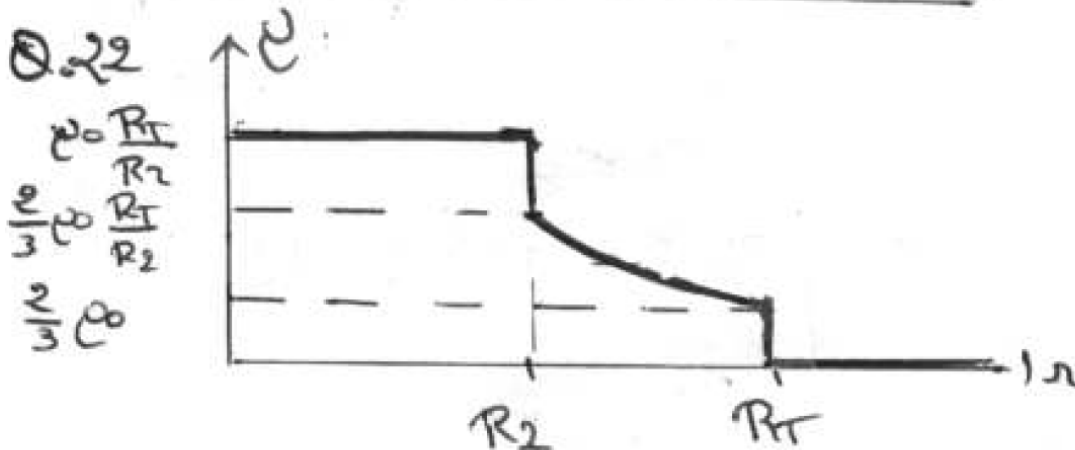
$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-r^2 E_0) = -\frac{2}{r} E_0 = -4\pi G \rho(r)$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(r) = \frac{\epsilon_0}{2\pi G r^2}}$$

$$\text{or } \epsilon_0 = \frac{G M_T}{R_T^2} = \frac{G}{R_T^2} \frac{4}{3} \rho_0 \pi R_T^3 = \frac{4}{3} \pi \rho_0 G R_T$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(r) = \rho_0 \frac{R_T}{R_2} \text{ pour } r < R_2}$$

$$\text{et } \boxed{\rho(r) = \frac{M_T}{2\pi R_T^2 r} \text{ pour } R_2 < r < R_T = \frac{2}{3} \rho_0 \frac{R_T}{r}}$$



$$\text{on a aussi } \rho(R_2^-) = \rho_0 \frac{R_T}{R_2} \quad \rho(R_2^+) = \frac{2}{3} \rho_0 \frac{R_T}{R_2}$$

$$\text{et } \rho(R_T^-) = \frac{2}{3} \rho_0$$

$$\text{AN} \left[\begin{aligned} \rho(R_2^-) &= \frac{3 M_T}{4\pi R_T^2 R_2} = \frac{3 \times 5,972 \cdot 10^{24}}{4\pi (6371 \cdot 10^3)^2 (3486 \cdot 10^3)} = 10 \text{ g.cm}^{-3} \\ \rho(R_2^+) &= 6,7 \text{ g.cm}^{-3} \quad \rho(R_T^-) = 3,7 \text{ g.cm}^{-3} \end{aligned} \right.$$

Proches des valeurs de la figure 3, mais le modèle $\rho(r) = \text{cte}$ pour $r < R_2$ est mis en défaut

2 Étude d'un microphone électrostatique

IV.A.1) Soit $M(x_M, y_M, z_M)$ un point quelconque. Les plans (Mxz) et (Myz) étant des plans de symétrie de la distribution de charges, le champ électrostatique en M sera de la forme :

$$\vec{E}(M) = E(x_M, y_M, z_M) \vec{u}_z$$

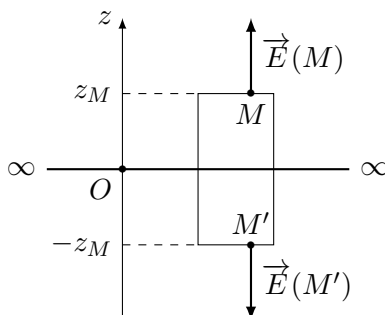
Comme il y a invariance par toute translation le long de Ox ou de Oy , on en déduit que :

$$\boxed{\vec{E}(M) = E(z_M) \vec{u}_z}$$

IV.A.2) Le plan de la base est plan de symétrie pour cette distribution de charge seule. Le champ électrostatique créé par cette distribution est donc transformé en son symétrique de part et d'autre de la base, c'est à dire, si M' est le point symétrique de M par rapport au plan de la base :

$$\boxed{\vec{E}(M') = \text{sym } \vec{E}(M) = -\vec{E}(M)}$$

IV.A.3) Soit M un point de cote $z_M > 0$. Prenons comme surface de Gauss S_G un cylindre de hauteur $2z_M$ et dont les deux bases sont deux disques de rayon r et sont placées de façon symétrique par rapport au plan chargé. Le point M est supposé appartenir à la base supérieure du cylindre.



Les contributions au flux des deux bases sont identiques et la surface latérale ne contribue pas. Nous avons donc :

$$\Phi(\vec{E}/S_G) = 2 \times \pi r^2 E(z_M)$$

De plus, comme $Q_{int} = \sigma \pi r^2$, le théorème de Gauss conduit à :

$$E(z_M) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ pour } z_M > 0 \text{ et } E(z_M) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ pour } z_M < 0$$

De plus, si Q est la charge portée par l'armature de base, $\sigma = \frac{Q}{S}$ ce qui conduit à :

$$\boxed{E(z_M) = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \text{ pour } z_M > 0 \text{ et } E(z_M) = -\frac{Q}{2\varepsilon_0 S} \text{ pour } z_M < 0}$$

IV.A.4)

$$\boxed{\vec{F}_e = -Q \vec{E}_{\text{base}} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \vec{u}_z}$$

Il s'agit d'une force attractive, ce qui est cohérent car les deux disques portent des charges opposées.

IV.A.5) Par définition de la capacité d'un condensateur : $Q = CU$ et donc :

$$\vec{F}_e = -\frac{C^2 U^2}{2\varepsilon_0 S} \vec{u}_z = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(e+z)^2} \vec{u}_z$$

IV.C – Étude dynamique

IV.C.1) On applique le principe fondamental de la dynamique à la membrane, en projection sur \vec{u}_z :

$$m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \frac{U(t)^2}{(e+z)^2}$$

IV.C.2) $z = z_0 + \xi(t)$ donc $\dot{z} = \dot{\xi}$ et $\ddot{z} = \ddot{\xi}$. Par conséquent :

$$m\ddot{\xi} = -k(z_0 + \xi) - h\dot{\xi} - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \frac{(U_0 + u)^2}{(e + z_0 + \xi)^2}$$

IV.C.3) Un développement limité au premier ordre en u/U_0 et en $\xi/(e+z_0)$ permet d'écrire :

$$\begin{cases} (U_0 + u)^2 & \approx U_0^2 + 2U_0 u \\ \frac{1}{(e + z_0 + \xi)^2} & \approx \frac{1}{(e + z_0)^2} \left(1 - \frac{2\xi}{e + z_0}\right) = \frac{1}{(e + z_0)^2} - \frac{2\xi}{(e + z_0)^3} \end{cases}$$

En reportant dans l'équation précédente et en négligeant le terme proportionnel à ξu qui est un infiniment petit du deuxième ordre, nous obtenons :

$$m\ddot{\xi} = -k\xi - h\dot{\xi} - \underbrace{kz_0 - \frac{\varepsilon_0 S}{2} \frac{U_0^2}{(e + z_0)^2}}_{=0 \text{ (condition d'équilibre)}} - \varepsilon_0 S \frac{U_0 u}{(e + z_0)^2} + \varepsilon_0 S \frac{U_0^2 \xi}{(e + z_0)^3}$$

d'où :

$$m\ddot{\xi} + h\dot{\xi} + \left\{ k - \varepsilon_0 S \frac{U_0^2}{(e + z_0)^3} \right\} \xi = -\frac{\varepsilon_0 S U_0}{(e + z_0)^2} u(t)$$

donc :

$$\begin{cases} k' & = k - \varepsilon_0 S \frac{U_0^2}{(e + z_0)^3} \\ \alpha & = -\frac{\varepsilon_0 S U_0}{(e + z_0)^2} \end{cases}$$

Application numérique : avec $U_0 = 1,1 \text{ kV}$, on obtient : $k' = 980 \text{ N.m}^{-1}$ et $\alpha = -5,5.10^{-5} \text{ N.V}^{-1}$. La valeur de α est donc très petite. Si $u(t)$ n'est pas importante, l'excitation de la membrane restera faible, donc $\xi(t)$ aussi (ce qui justifie par ailleurs le développement limité réalisé dans cette question).

IV.D – Régime sinusoïdal forcé

IV.D.1) On transpose l'équation différentielle dans le domaine complexe. Sachant que dériver par rapport au temps revient à multiplier par $j\omega$, il vient :

$$(-m\omega^2 + jh\omega + k') \underline{\xi}(t) = \alpha \underline{u}(t)$$

et donc :

$$A(j\omega) = \frac{\alpha}{k' + jh\omega - m\omega^2}$$

IV.D.2) C'est un filtre passe-bas du seconde ordre. Sa fonction de transfert peut être mise sous la forme canonique :

$$A(j\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Dans notre cas : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k'}{m}} = 2\pi f_0$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k'}{m}} \quad \text{fréquence propre du filtre}$$

A.N. : $m = \mu aS = 2,7 \text{ g}$ ce qui donne : $f_0 = 96 \text{ Hz}$.

IV.D.3) Si $f \ll f_0$, alors $A(j\omega) \approx H_0 = \alpha/k'$ et donc :

$$\xi(t) = \frac{\alpha}{k'} u_s \cos(\omega t) = \xi_m \cos(\omega t)$$

La réponse $\xi(t)$ est donc en phase avec l'excitation $u(t)$. Si on veut que $\xi_m = e/100$, alors on doit choisir :

$$u_s = \frac{k'e}{100\alpha} = 5,3.10^2 \text{ V}$$