Ondes planes électromagnétiques dans le vide

Dans tout le chapitre on note $(\mathscr{R})$ le référentiel d'étude et on le munit d'un repère d'espace $R = (Oxyz)$ dont la base cartésienne associée $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est orthonormale directe.

Table des matières

I. Ondes planes

1) Introduction

Nous allons étudier dans ce chapitre des solutions particulières de l'équation de d'Alembert scalaire, qu'on appelle **ondes planes (OP)** :

$$\boxed{\Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \qquad (1)}$$

où v est une constante positive, homogène à une vitesse.

Rappelons d'autre part qu'en dehors des charges et des courants, c'est à dire en tout point M tel que $\rho(M,t) = 0$ et $\vec{j}(M,t) = \vec{0}$, le champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ satisfait aux équations de d'Alembert vectorielles :

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta\overrightarrow{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{B}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

où $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ est la célérité de la lumière dans le vide.

En projetant sur la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ on obtient six équations de la forme :

$$\boxed{\Delta s - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0}$$

où s désigne une des composantes cartésiennes E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$. Cela correspond donc à un cas particulier de l'équation (1) avec $v = c$.

Les ondes planes (et en particulier les OPPS) sont des solutions mathématiques de l'équation de d'Alembert mais elles n'ont pas d'existence physique. Leur intérêt est que toute onde peut toujours être vue comme une somme d'ondes planes (paquet d'ondes)

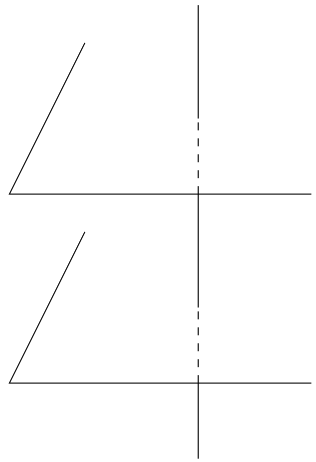
2) Ondes planes

Définition 1. Onde plane

On dit que $s(M,t)$ est une *onde plane* (OP) si et seulement s'il existe une droite Δ telle que, pour tout plan $\mathscr{P}\perp\Delta$ on ait la propriété :

$$\forall\,(M_1, M_2) \in \mathscr{P}\times\mathscr{P},\ \forall\, t,\ s(M_1,t) = s(M_2,t)$$

Autrement dit, à chaque instant t et pour chaque plan $\mathscr{P}\perp\Delta$, s prend la même valeur en tout point de $\mathscr{P}$.



Définition 2. Plans d'onde

Les plans $\mathscr{P}\perp\Delta$ sont appelés *plans d'onde* associés à l'onde plane.

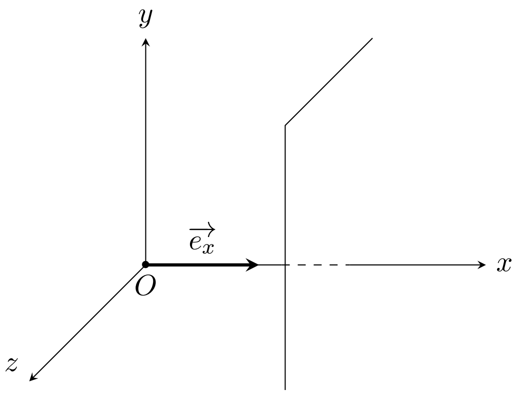
Remarque :

Dans toute la suite la droite Δ sera orientée par un vecteur unitaire directeur $\vec{u}$ et on prendra l'origine O du repère d'espace sur Δ : $O \in \Delta$.

3) Étude des solutions à onde plane

On étudie les solutions de (1) qui sont des ondes planes : il s'agit donc de solutions particulières (les seules au programme).

Pour commencer on suppose que $\boxed{\Delta = Ox}$ (donc $\vec{u} = \overrightarrow{e_x}$) et on donnera le cas général après.



Théorème fondamental

La solution générale de l'équation (2) s'écrit :

$$s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right) \qquad (*)$$

où f et g sont deux fonctions quelconques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à condition qu'elles soient C^2 sur $\mathbb{R}$.

Dans le programme on nous demande seulement de vérifier que (*) est bien solution de l'équation (2) (et pas de démontrer que c'est la solution générale).

4) Interprétation : onde plane progressive (OPP)

Cours à noter sur feuille libre.

5) Cas où Δ est quelconque

Cours à noter sur feuille libre.

II. Onde plane progressive sinusoïdale (ou harmonique)

Toute cette partie est à noter sur feuille libre.

1) Définition

2) Double périodicité spatiale et temporelle

a) Spatiale

b) Temporelle

3) Phase de l'OPPS. Vitesse de phase

4) Vecteur d'onde

5) Représentation complexe d'une OPPS

III. OPPS électromagnétique dans le vide

1) Préambule technique

Pour des raisons de commodités de calcul on va très souvent utiliser des vecteurs à composantes complexes. $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ étant la base cartésienne orthonormale directe associée au repère d'espace $(Oxyz)$ attachée au référentiel $(\mathscr{R})$, on pose par définition :

$$\boxed{\underline{\vec{a}} \overset{\text{déf}}{=} \underline{a}_x \, \overrightarrow{e_x} + \underline{a}_y \, \overrightarrow{e_y} + \underline{a}_z \, \overrightarrow{e_z}}$$

avec $(\underline{a}_x, \underline{a}_y, \underline{a}_z) \in \mathbb{C}^3$.

$\underline{\vec{a}}$ est un *vecteur à composantes complexes* et $\underline{a}_x$, $\underline{a}_y$ et $\underline{a}_z$ sont ses trois composantes complexes sur la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Exemple :

Propriétés : cours à noter sur feuille libre.

2) Définition d'une OPPS (ou OPPH) électromagnétique dans le vide

Par définition, une onde plane progressive sinusoïdale électromagnétique (OPPS EM) dans le vide qui se propage dans une direction et un sens définis par le vecteur unitaire $\vec{u}$ est consituée d'un champ électrique et d'un champ magnétique dont les expresssions sont données par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E}(M,t) &= E_{mx} \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_x\right) \, \overrightarrow{e_x} \\ &+ E_{my} \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_y\right) \, \overrightarrow{e_y} \\ &+ E_{mz} \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_z\right) \, \overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B}(M,t) &= B_{mx} \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \psi_x\right) \, \overrightarrow{e_x} \\ &+ B_{my} \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \psi_y\right) \, \overrightarrow{e_y} \\ &+ B_{mz} \cos\left(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \psi_z\right) \, \overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est le vecteur position du point M, $\boxed{\vec{k} = k \, \vec{u}}$ avec $\boxed{k = \omega/c}$ (puisqu'ici $v = c$) est le vecteur d'onde associé à l'OPPS.

Ainsi, les composantes cartésiennes E_x, E_y, E_z, B_x, B_y et B_z sont des OPPS scalaires qui vibrent **à la même pulsation** ω et qui ont **le**

même vecteur d'onde $\vec{k}$. *Les seules différences sont les amplitudes réelles et les phases à l'origine des temps et de l'espace.*

Représentation complexe associée à l'OPPS EM :

On introduit les représentations complexes des trois composantes cartésiennes du champ électrique :

$$\underline{E}_x(M,t) = E_{mx}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_x)} = E_{mx}\, e^{i\varphi_x}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$
$$\underline{E}_y(M,t) = E_{my}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_y)} = E_{my}\, e^{i\varphi_y}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$
$$\underline{E}_z(M,t) = E_{mz}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi_z)} = E_{mz}\, e^{i\varphi_z}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

telles que $E_x = \mathrm{Re}(\underline{E}_x)$, $E_y = \mathrm{Re}(\underline{E}_y)$ et $E_z = \mathrm{Re}(\underline{E}_z)$.

On définit ensuite le vecteur champ électrique complexe $\overrightarrow{\underline{E}}(M,t)$

De la même façon pour le champ magnétique :

$$\underline{B}_x(M,t) = B_{mx}\, e^{i\psi_x}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$
$$\underline{B}_y(M,t) = B_{my}\, e^{i\psi_y}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$
$$\underline{B}_z(M,t) = B_{mz}\, e^{i\psi_z}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$$

telles que $B_x = \mathrm{Re}(\underline{B}_x)$, $B_y = \mathrm{Re}(\underline{B}_y)$ et $B_z = \mathrm{Re}(\underline{B}_z)$.

On définit ensuite le vecteur champ magnétique complexe

3) Intérêt des grandeurs complexes

L'intérêt des grandeurs complexes est qu'elles facilitent grandement les calculs. En effet, on a les règles de calcul suivantes pour les OPPS vectoriels complexes :

Règles de calcul

Si $\underline{\vec{a}} = \underline{\overrightarrow{A_m}}\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}$ alors $\dfrac{\partial \underline{\vec{a}}}{\partial t} = i\omega\, \underline{\vec{a}}$; $\mathrm{div}\, \underline{\vec{a}} = -i\, \vec{k}.\underline{\vec{a}}$ et

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \underline{\vec{a}} = -i\, \vec{k} \wedge \underline{\vec{a}} \;\; ; \;\; \Delta \underline{\vec{a}} = -\left(\vec{k}.\vec{k}\right) \underline{\vec{a}}$$

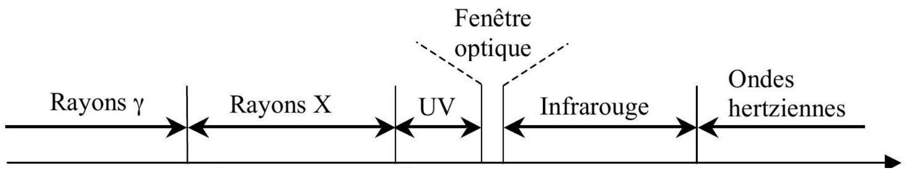
Remarques :

4) Spectre des ondes électromagnétiques

Dans le cas d'ondes planes progressives sinusoïdales (OPPS), on peut définir la longueur d'onde λ (période spatiale), la période temporelle T, la fréquence $\nu = 1/T$. Ces grandeurs sont liées par les relations :

$$\lambda = cT = \mathrm{c}/\nu$$

Dénominations des rayonnements électromagnétiques selon les valeurs de λ (spectre des ondes électromagnétiques).



Rayons γ	:	$\lambda < 1$ nm
Rayons X	:	1 nm $< \lambda <$ 100 nm
Ultraviolet	:	100 nm $< \lambda <$ 400 nm
Lumière visible	:	400 nm $< \lambda <$ 700 nm
Infrarouge	:	700 nm $< \lambda <$ 0,1 mm
Ondes Hertziennes	:	$\lambda >$ 0,1 mm

Remarque :

Dans le domaine visible, à une longueur d'onde λ est associée une couleur bien précise (perception visuelle). On parle alors d'ondes planes progressives monochromatiques (OPPM) dans le cas des ondes électromagnétiques. On peut donc utiliser les termes synonymes : OPPS, OPPH ou OPPM.

λ(nm)	Valeur moy.	410	460	530	580	620	670
	Intervalle	400-425	425-490	490-575	575-585	585-650	650-700
Couleur perçue		Violet	Bleu	Vert	Jaune	Orange	Rouge

Ordre de grandeur des fréquences du visible : $\nu = 10^{14}$ Hz

Fréquence moyenne (Hz)	$4.4.10^{14}$	$4.8.10^{14}$	$5.2.10^{14}$	$5.6.10^{14}$	$6.5.10^{14}$	$7.3.10^{14}$
Couleur perçue	Rouge	Orange	Jaune	Vert	Bleu	Violet

Tableau des correspondances fréquence - couleur (la valeur de la fréquence est celle qui correspond au centre de chaque gamme de couleur)

5) Transposition des équations de Maxwell dans le domaine complexe

La linéarité des équations de Maxwell permet de les transposer dans le domaine complexe. Cette partie du cours est à noter sur feuille libre.

6) Polarisation des OPPS électromagnétiques

a) Polarisation rectiligne

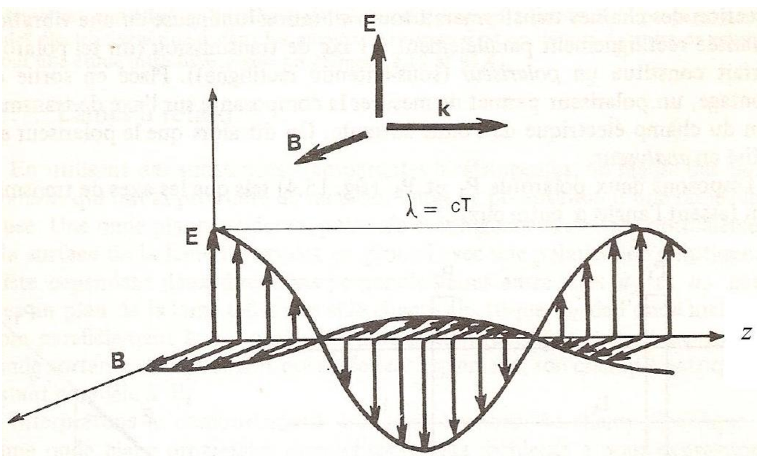
Définition

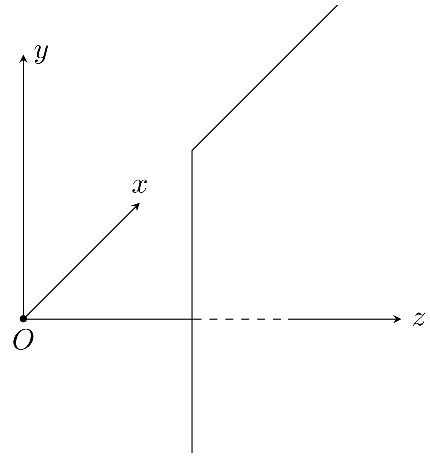
On dit qu'une OPPS électromagnétique est *polarisée rectilignement* si et seulement si, en tout point M et à chaque instant t, on peut écrire **son champ électrique** de la façon suivante :

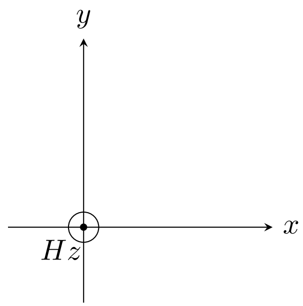
$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_m\,\overrightarrow{u_p}\cos(\omega t - \vec{k}.\vec{r} + \varphi)$$

où $\overrightarrow{u_p}$ est *un vecteur unitaire constant* qui définit la direction de polarisation rectiligne.

Remarque et exemple :





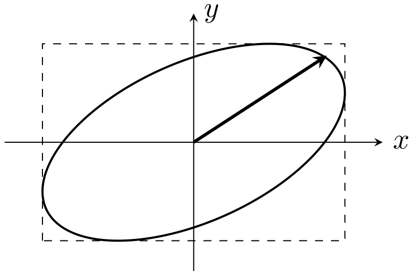


b) Polarisation circulaire

Pour des raisons de facilité de calculs prenons une OPPS électromagnétique qui se propage selon $+\overrightarrow{e_z}$: $\vec{k} = k\,\overrightarrow{e_z}$. L'expression la plus générale de son champ électrique s'écrit :

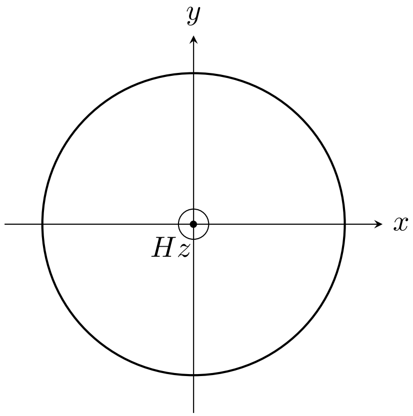
$$\overrightarrow{E}(M,t) = E_{mx}\cos(\omega t - kz + \varphi_x)\,\overrightarrow{e_x} + E_{my}\cos(\omega t - kz + \varphi_y)\,\overrightarrow{e_y}$$

Dans le cas général : φ, E_{mx} et E_{my} quelconques, la trajectoire du point P est *une ellipse*. On dit que l'onde est **polarisée elliptiquement**. Ce cas général est hors programme de MP et on ne l'étudiera donc pas.



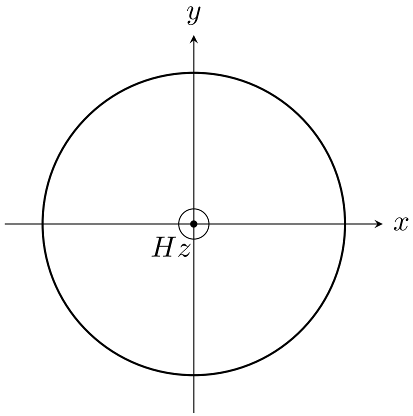
Dans le cadre du programme de MP on s'intéresse au deux cas particuliers suivants :

1er **cas** : $E_{mx} = E_{my} = E_m$ et $\varphi \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$



.

2ème **cas** : $E_{mx} = E_{my} = E_m$ et $\varphi \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$



7) Énergie d'une OPPS électromagnétique

Cours à noter sur feuille libre.

IV. Application : réflexion d'une OPPS électromagnétique sur un métal parfait

Toute cette partie du cours est à prendre sur feuille libre. En voici le plan.

1) Définition d'un métal parfait

2) Relations de passage

3) Réflexion d'une OPPS électromagnétique sur un métal parfait

4) Définition d'une onde stationnaire

5) Caractéristiques d'une onde stationnaire

6) Énergie de l'onde stationnaire

7) Courants surfaciques sur le métal

Bilan de ce chapitre

Points du cours à connaître :

- Définir ce qu'est une onde plane et les plans d'onde.
- Vérifier que $s(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$ est solution de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle pour une onde plane scalaire dont les plans d'onde sont orthogonaux à Ox.
- Définir une onde plane progressive sinusoïdale (OPPS). Expliciter la double périodicité temporelle et spatiale. Relation entre λ, T et v.
- Connaître l'expression générale en complexe d'une OPPS avec son vecteur d'onde. Donner sans démonstration les différentes opérations dans le domaine complexe pour une OPPS complexe. En déduire les transversalités électrique et magnétique de l'OPPS électromagnétique dans le vide et obtenir la relation de structure.
- Définir une OPPS EM polarisée rectilignement. Dans le cas où une OPPS EM se propage selon $+\overrightarrow{e_z}$, indiquer ce qu'est une polarisation circulaire. Étudier les deux cas (polarisations circulaires gauch et et droite) selon le déphasage Φ de la composante E_y par rapport à la composante E_x de $\overrightarrow{E}$.
- Définir une onde stationnaire.
- Connaître parfaitement toute la démarche lorsqu'une OPPS incidente $\underline{\overrightarrow{E_i}}$ polarisée rectilignement arrive de $-\infty$ sur un plan métallique parfait situé en $x = 0$: déterminer le champ électrique $\underline{\overrightarrow{E_r}}$ de l'onde réfléchie ; déterminer les champs magnétiques $\underline{\overrightarrow{B_i}}$ et $\underline{\overrightarrow{B_r}}$, puis les champs résultants $\overrightarrow{E}$ et $\underline{\overrightarrow{B}}$; déterminer les nœuds et les ventres de vibration ; calculer le $\overrightarrow{j_S}$ à la surface du métal.

Exercices à travailler :

- En priorité : 4, 7, 8, 9
- S'il y a le temps : 5