

## Correction - DS n°5 - CCINP-e3a

## 1 Étude d'un cyclotron

1. On applique le principe fondamental de la dynamique au proton, soumis à la seule force électrique :

$$m\vec{a} = e\vec{E} = +e \frac{U_0}{d} \vec{a}_y \Rightarrow \ddot{y} = \frac{eU_0}{md}$$

qui s'intègre en :

$$\dot{y} = \frac{eU_0}{md} t \text{ et } y(t) = \frac{eU_0}{2md} t^2 - \frac{d}{2}$$

Rq : On peut aussi appliquer un TEM (plus rapide)

À  $t_1$  :  $y(t_1) = \frac{d}{2} \Rightarrow d = \frac{eU_0}{2md} t_1^2$  et donc

$$t_1 = \sqrt{\frac{2m}{eU_0}} d \text{ et } v_1 = \dot{y}(t_1) = \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

- 1.b) Il est nécessaire que  $t_1 < T/2$  ce qui donne :

$$\sqrt{\frac{2m}{eU_0}} < \frac{T}{2d} \Leftrightarrow \frac{8md^2}{eT^2} < U_0$$

et donc  $U_{\text{min}} = \frac{8md^2}{eT^2}$

2. a) Seule la force magnétique  $\vec{F}_m = e\vec{v} \wedge \vec{B}$  agit sur le proton. Comme  $\vec{F} \perp \vec{v}$ , le travail de cette force est nul et, par le théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \mathcal{W}(\vec{F}_m) = 0 \Rightarrow \|\vec{v}\| = \text{cste}$$

- 2.b) On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{F}_m = e(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) \wedge B\vec{e}_z \\ &= eB(-\dot{x}\vec{e}_y + \dot{y}\vec{e}_x) \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \frac{eB}{m} y \\ \ddot{y} = -\frac{eB}{m} \dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{eB}{m} y - \frac{eB}{m} \frac{d}{2} \\ \ddot{y} = -\frac{eB}{m} x + v_i \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

En substituant  $\ddot{y}$ , on obtient :

$$\ddot{x} + \left(\frac{eB}{m}\right)^2 x = \frac{eB}{m} v_i \quad \begin{array}{l} \text{on peut poser } \omega = \frac{eB}{m} \\ \text{(pulsation cyclotron)} \end{array}$$

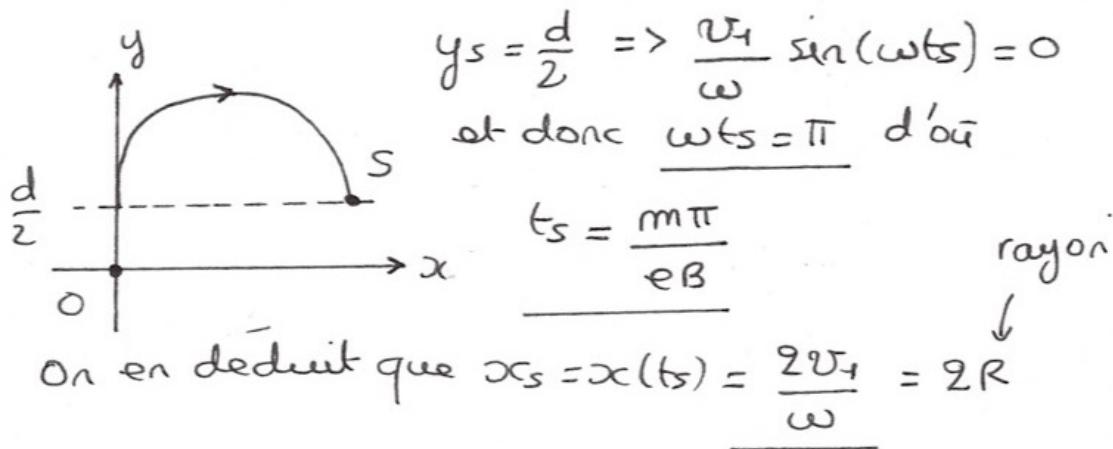
$$\text{Séolution : } x(t) = \lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) + \frac{v_i}{\omega}$$

$$\text{CI} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -v_i/\omega \\ \omega\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad x(t) = \frac{v_i}{\omega} (1 - \cos(\omega t))$$

$$\text{puis : } y(t) = \frac{\dot{x}}{\omega} + \frac{d}{2} = \frac{v_i}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{d}{2}$$

2.c) la trajectoire du proton est alors un  cercle.



$$y_s = \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{v_i}{\omega} \sin(\omega t_s) = 0$$

$$\text{et donc } \omega t_s = \pi \quad \text{d'où}$$

$$t_s = \frac{m\pi}{eB}$$

rayon  
↓

$$\text{On en déduit que } x_s = x(t_s) = \frac{2v_i}{\omega} = 2R$$

3.a) De façon générale, le rayon de la trajectoire est donné par :

$$R\omega = v \quad \text{avec } \omega = \frac{eB}{m}$$

3.b) le proton parcourt un demi-cercle à vitesse constante en norme (égale à  $v$ ). On a donc: 8.

$$v \Delta t = \pi R \Rightarrow \Delta t = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi}{\omega} = \frac{m\pi}{eB}$$

Cette durée est constante indépendante du rayon de la trajectoire. Pour que  $\Delta t$  soit parfaitement synchronisé avec la période du champ électrique il faut que:

$$\Delta t = \frac{T}{2} \quad (\text{puisque on néglige la durée des phases d'accélération})$$

3.c. A chaque accélération, le champ électrique effectue un travail moteur.

$$\frac{1}{2}m v_{n+1}^2 - \frac{1}{2}m v_n^2 = \underbrace{eExd}_{\substack{\text{travail d'une} \\ \text{force constante}}} = eU_0$$

d'où

$$v_{n+1}^2 = v_n^2 + \frac{2eU_0}{m}$$

Vérifions le résultat demandé par l'énoncé au moyen d'une démonstration par récurrence

- $v_1 = \sqrt{1} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$  est vraie car c'est le résultat de la question 1.

- Supposons que  $v_n = \sqrt{n} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$  soit vraie. Alors

$$v_{n+1}^2 = n \frac{2eU_0}{m} + \frac{2eU_0}{m} = (n+1) \frac{2eU_0}{m}$$

et donc  $v_{n+1} = \sqrt{n+1} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$  ce qui montre que l'expression est vraie à l'ordre  $n+1$ .

En conclusion:  $v_n = \sqrt{n} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$  est vraie pour tout  $n \geq 1$  (et même  $n \geq 0$ )

4. Après  $N$  accélérations, la vitesse est  $v_N$  et le rayon de la trajectoire est :

$$R_N = \frac{v_N}{\omega} = \frac{m}{eB} \sqrt{N} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}}$$

où Pour  $R_N = R_{\max}$ ,  $v_N = v_{ej} = \omega R_{\max}$   
donc

$$v_{ej} = \frac{eB}{m} R_{\max} \stackrel{AN}{\approx} 40 \cdot 10^7 \text{ m.s}^{-1}$$

) On a aussi :

$$R_{\max} = \frac{m}{eB} \sqrt{N} \sqrt{\frac{2eU_0}{m}} = \frac{\sqrt{N}}{B} \sqrt{\frac{2mU_0}{e}}$$

donc

$$N = \frac{R_{\max}^2 B^2 e}{2mU_0} \stackrel{AN}{=} 8290$$

Il y a donc 8290 accélérations, donc 8290  $\frac{1}{2}$  tours ou encore 4145 tours complets.

Rem  $v_{ej}$  proche de  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$  : l'approximation de la mécanique relativiste peut être nécessaire

Calculons le temps mis pour arriver à cette vitesse :

$$\tau = N \Delta t = \frac{R_{\max}^2 B e}{2mU_0} \times \frac{m\pi}{eB} = \frac{\pi R_{\max}^2 B}{2U_0}$$

$$\stackrel{AN}{=} 52 \cdot 10^{-4} \text{ s. !!}$$

## 2 La structure interne de Jupiter (d'après e3a-MP-2020)

### Électrostatique et gravitation universelle

16. La force d'interaction gravitationnelle exercée par une distribution de masse  $\Sigma$  sur un point matériel P de masse  $m$  : 
$$\vec{F}_{\Sigma \rightarrow P} = m \vec{G}(P)$$
.

17. On donne :

- Équation de Maxwell-Gauss :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$  ;
- Équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire :  $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ .

Les masses sont des **grandes positives** donc la force d'interaction gravitationnelle est **toujours attractive** contrairement aux charges électriques pouvant être de même signe ou de signes contraires entraînant que la force d'interaction électrique peut être **répulsive ou attractive**.

18. L'équation  $\vec{\operatorname{rot}} \vec{G} = \vec{0}$  assure que  $\vec{G}$  **dérive d'un potentiel gravitationnel  $\Phi$** .

Dans ce cas de figure : 
$$\vec{G} = -\vec{\operatorname{grad}} \Phi$$
.

Sachant que  $\Delta \Phi = \operatorname{div}(\vec{\operatorname{grad}} \Phi)$  soit  $\Delta \Phi = -\operatorname{div} \vec{G}$  donc 
$$\Delta \Phi = 4\pi \mathcal{G} \rho$$
.

#### 19. Énoncé du théorème de Gauss :

Le flux du champ électrique à travers une surface fermée et orientée ( $\Sigma_G$ ) est égale au rapport de la charge électrique intérieure à cette surface et de la permittivité du vide  $\epsilon_0$  soit

$$\iint_{M \in \Sigma_G} \vec{E}(M) \cdot \vec{dS}_M = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}.$$

Sachant que l'analogue de  $\frac{1}{\epsilon_0}$  est  $-4\pi \mathcal{G}$  et l'analogue de la charge électrique est la masse, le théorème de

Gauss pour la gravitation stipule 
$$\iint_{M \in \Sigma_G} \vec{G}(M) \cdot \vec{dS}_M = -4\pi \mathcal{G} M_{\text{int}}$$
.

## Distribution sphérique de masse non homogène

20. La distribution des masses étant **invariante par toute rotation d'axe passant par O**,  $\vec{G}$  ne dépend que de  $r$ .

Tout plan contenant la droite (M) est **plan de symétrie** de la distribution des masses donc  $\vec{G}$  est radial.

En conclusion :  $\vec{G}(M) = -G(r)\vec{u}_r$  où  $G(r) > 0$ .

21. La masse  $\delta m$  d'une coquille sphérique de rayon compris entre  $r$  et  $r + dr$  étant :  $\delta m = \varrho(r) \times 4\pi r^2 dr$   
 alors  $M(r) = \int_0^r 4\pi \varrho(r') r'^2 dr'$  sous réserve d'une distribution de masse à **répartition sphérique** de masse.

22. La surface de Gauss étant une sphère de centre O et de rayon  $r > R$  :  $M_{\text{int}} = M_J = \int_0^{R_J} 4\pi \varrho(r) r^2 dr$  : masse de Jupiter.

On en déduit l'expression du champ gravitationnel à l'extérieur de la planète :  $G(r)4\pi r^2 = 4\pi G M_{\text{int}}$  donc  $G(r) = G \frac{M_J}{r^2}$ .

Le graphe de  $r \mapsto G(r)$  pour  $r \geq R_J$  :

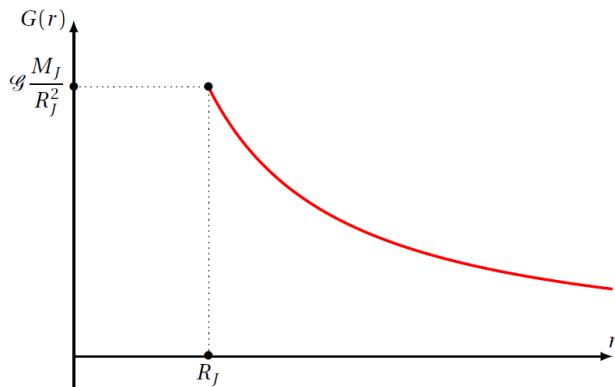


FIGURE 2 – Tracé du graphe  $r \mapsto G(r)$  pour  $r \geq R_J$

Sachant que  $\vec{G} = -\vec{\text{grad}}\Phi$  alors  $G(r) = \frac{d\Phi}{dr}$  donc pour  $r \geq R_J$  :  $\Phi(r) = -G \frac{M_J}{r}$  avec  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \Phi(r) = 0$ .

23. Chaque particule de fluide possédant dans le référentiel jupiterocentrique un mouvement circulaire uniforme de rayon  $r' = r \sin \theta$  alors l'accélération du centre d'inertie de cette particule de fluide est **centripète** et a pour expression  $\vec{a}_{P/\mathcal{R}} = -\omega_{\text{sid}}^2 r \sin \theta \vec{u}_{r'}$  où  $\vec{u}_{r'}$  est le vecteur radial des coordonnées cylindriques d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ .

24. Le référentiel lié à Jupiter n'est pas galiléen car en mouvement de rotation d'axe  $(O, \vec{u}_z)$  par rapport au référentiel jupiterocentrique galiléen.

Chaque particule de fluide est donc soumise en particulier à la force d'inertie d'entraînement  $\overrightarrow{\delta F_{ie}} = -\delta m \overrightarrow{a_{p/\mathcal{R}}}$  soit  $\boxed{\overrightarrow{\delta F_{ie}} = +\varrho \omega_{\text{sid}}^2 r \sin \theta \, d\tau \overrightarrow{u_r'}}$ .

Cette force étant **axifuge** et de norme d'autant plus importante que la particule de fluide est éloignée de l'axe de rotation, l'effet de cette force sera davantage ressenti par les particules de fluide situées au niveau de l'équateur et cet effet sera nul pour les particules de fluides situées aux pôles.

En adoptant un modèle élastique de la planète Jupiter, cette force est responsable d'un écrasement de la planète aux pôles et d'un allongement de celle-ci au niveau de l'équateur. D'où la forme ellipsoïdale de la planète.

**25.** Si Jupiter était assimilable en l'absence de rotation propre à une boule pleine, homogène, de masse volumique uniforme, alors  $I = \frac{8\pi}{15} \times \frac{3}{4\pi} \frac{M_J}{R_J^3} \times R_J^5 = \frac{2}{5} M_J R_J^2$  et donc  $\boxed{K = \frac{2}{5}}$ .

**26.** La connaissance de  $K$  permettra d'obtenir une première indication sur la répartition des masses à l'intérieur de Jupiter. Par exemple, si  $K < \frac{2}{5}$ , la matière est davantage concentrée au centre de la planète.

**27.** On pose  $g(x) = x^2 \exp\left(-\frac{m x^2}{2 k_B T}\right)$  alors  $g'(x) = 0 \iff 2x - \frac{m x^3}{k_B T} = 0$  donc  $x = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}}$ .

La vitesse la plus probable d'agitation thermique est donc  $\boxed{v_c = \sqrt{\frac{2 k_B T}{m}}}$ .

**28.** La vitesse de libération à la surface de Jupiter est estimée selon  $\boxed{v_{\ell,J} = \sqrt{\frac{2 \mathcal{G} M_J}{R_J}}}$ .

**Application numérique :** : Estimation des vitesses les plus probables :

- On prendra pour la température à la surface de la Terre :  $T_{T,\text{surf}} = 293$  K;
- On prendra pour la température à la surface de Jupiter :  $T_{J,\text{surf}} = 170$  K (cf. **figure 6**).

	$v_c$ (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	$v_{\ell}$ (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )
<b>Terre</b>	Hydrogène : $v_{c,\text{H}} = 2,2 \cdot 10^3$ Hélium : $v_{c,\text{He}} = 1,1 \cdot 10^3$	$v_{\ell,T} = 1,1 \cdot 10^4$
<b>Jupiter</b>	Hydrogène : $v_{c,\text{H}} = 1,7 \cdot 10^3$ Hélium : $v_{c,\text{He}} = 8,4 \cdot 10^2$	$v_{\ell,J} = 6,0 \cdot 10^4$

On constate que l'**écart entre la vitesse la plus probable et la vitesse de libération** est plus important dans le cas de Jupiter que dans le cas de la Terre.

Cela signifie que la distribution des vitesses est davantage écrétée du côté des valeurs élevées des vitesses dans le cas de la Terre et donc l'atmosphère de la Terre est moins riche en dihydrogène et en hélium gazeux que celle de Jupiter.

### 3 Moteur synchrone

#### Partie I. – Structure du champ magnétique produit par des bobines

1. Voir le cours. On trouve :

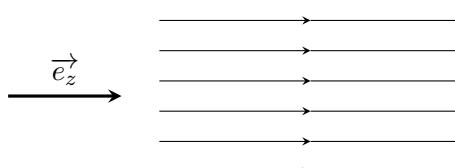
$$\boxed{\overrightarrow{B}(M) = \mu_0 n I \overrightarrow{e_z}}$$

Ce champ magnétique est **uniforme** à l'intérieur du solénoïde.

- 2.

$$\overrightarrow{B}(M) = B(x, y, z) \overrightarrow{e_z}$$

- Ces sont des droites parallèles à  $\overrightarrow{e_z}$ . On a donc :



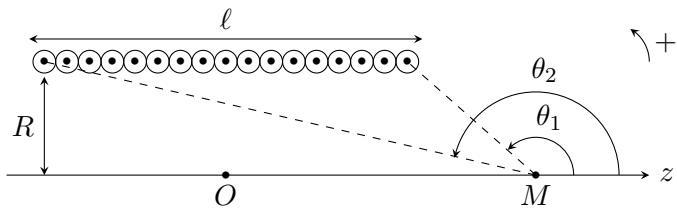
b) On a :

$$\operatorname{div} \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{\partial B}{\partial z} = 0 \implies B \text{ indép. de } z$$

De plus, en dehors des courants et en régime stationnaire, l'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \vec{0} \implies \frac{\partial B}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial B}{\partial x} \vec{e}_y = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial B}{\partial y} = 0$$

$B$  ne dépend donc pas non plus ni de  $x$ , ni de  $y$ . Il s'ensuit que  $B$  ne dépend d'aucune coordonnées : il s'agit bien d'un champ uniforme.



- a) Tout plan contenant  $(Oz)$  est un plan d'antisymétrie de la distribution de courants et donc un plan de symétrie de  $\vec{B}$  contenant  $M \in (Oz)$ . On en déduit que  $\vec{B}(M)$  doit appartenir à tous ces plans, donc à leur intersection qui est l'axe  $(Oz)$ . On a donc  $\vec{B}(M) // \vec{e}_z$

b) On fait  $\theta_1 \rightarrow 0$  et  $\theta_2 \rightarrow \pi$  tout en maintenant constant  $n = N/\ell$ . On retrouve bien  $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$ .

c) On remarque que :

$$\cos(\pi - \theta_1) = \frac{z - \ell/2}{\sqrt{R^2 + (z - \ell/2)^2}} = -\cos \theta_1 \quad \text{et} \quad \cos(\pi - \theta_2) = \frac{z + \ell/2}{\sqrt{R^2 + (z + \ell/2)^2}} = -\cos \theta_2$$

On en déduit que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 NI}{2\ell} \left[ \frac{z + \ell/2}{\sqrt{R^2 + (z + \ell/2)^2}} - \frac{z - \ell/2}{\sqrt{R^2 + (z - \ell/2)^2}} \right] \vec{e}_z$$

- d) En  $z = 0$  on obtient :

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 N I}{2 \sqrt{R^2 + (\ell/2)^2}}$$

Application numérique :  $I \approx 8,5$  A. C'est une valeur élevée du courant. La température du fil risque d'augmenter fortement par effet Joule. Pour baisser la valeur de  $I$  tout en maintenant  $B$  constant il faut augmenter  $N$  mais il se pose un problème d'encombrement (on peut toutefois bobiner le fil sur plusieurs couches). On peut aussi vouloir baisser la résistivité du fil en prenant un matériau plus conducteur, voir supraconducteur.

$\|\vec{B}(z = 10 \text{ cm})\| = 8,1 \text{ mT}$ . L'intensité du champ magnétique diminue donc très fortement et rapidement dès qu'on sort de la bobine.

3. a) Le plan  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est un plan d'antisymétrie des courants donc un plan de symétrie contenant  $M$ . On a donc  $B_\theta = 0$ .

D'autre part, il y a invariance des courants par toute rotation autour de  $Oz$ . On a donc  $B_r = B_r(r, z)$  et  $B_z = B_z(r, z)$  indépendants de  $\theta$ .

- b) Le plan  $(Oxy)$  est un plan de symétrie des courants, donc un plan d'antisymétrie de  $\vec{B}$ . Si on considère deux points  $M(r, \theta, z)$  et  $(M, \theta, -z)$  symétriques par rapport à ce plan, alors :

$$\vec{B}(M') = -\text{sym}_{Oxy} \vec{B}(M)$$

d'où :

$$B_r(r, -z) \vec{e}_r + B_z(r, -z) \vec{e}_z = -\{ B_r(r, z) \vec{e}_r - B_z(r, z) \vec{e}_z \}$$

et donc  $B_z(r, -z) = B_z(r, z)$ .

- c) Non car  $(Oxy)$  est un plan de symétrie des courants et donc un plan d'antisymétrie de  $\vec{B}$ . En tout point  $M$  de ce plan  $\vec{B}(M) \perp (Oxy)$ . Aucune ligne de  $\vec{B}$  ne peut donc appartenir au plan  $(Oxy)$ .

- d)  $\vec{B}$  est à flux conservatif donc  $\text{div } \vec{B} = 0$ . En coordonnées cylindriques cela donne :

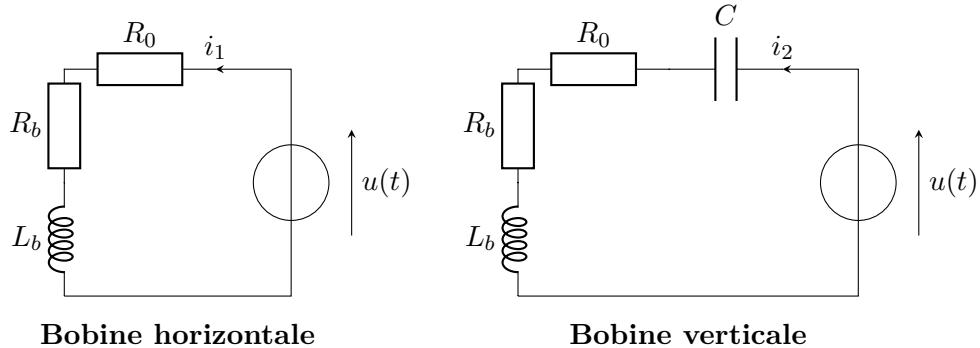
$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r B_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \iff 2 B(O) \alpha z - B(O) \frac{2z}{D^2} = 0$$

d'où :

$$\alpha = \frac{1}{D^2}$$

## Partie II. – Étude d'un champ magnétique tournant

4. On peut dessiner deux schémas équivalents : une pour le circuit de la bobine horizontale et l'autre pour le circuit de la bobine verticale :



5. Déterminer :

a) On passe dans le domaine complexe :

$$\underline{u}(t) = (R_0 + R_b + jL_b\omega_0) \underline{i}_1(t) \quad \text{d'où} \quad \frac{\underline{i}_1(t)}{\underline{u}(t)} = \frac{1}{R_0 + R_b + jL_b\omega_0}$$

On veut  $\arg\left(\frac{\underline{i}_1(t)}{\underline{u}(t)}\right) = -\pi/4$  (retard de phase), ce qui donne :

$$-\arctan\left(\frac{L_b\omega_0}{R_0 + R_b}\right) = -\frac{\pi}{4} \quad \text{d'où} \quad L_b\omega_0 = R_0 + R_b$$

et donc :

$$R_0 = L_b\omega_0 - R_b$$

b) De la même façon :

$$\underline{u}(t) = (R_0 + R_b + jL_b\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0}) \underline{i}_2(t) \quad \text{d'où} \quad \frac{\underline{i}_2(t)}{\underline{u}(t)} = \frac{1}{R_0 + R_b + jL_b\omega_0 + \frac{1}{jC\omega_0}}$$

On veut  $\arg\left(\frac{\underline{i}_2(t)}{\underline{u}(t)}\right) = +\pi/4$  (avance de phase), ce qui donne :

$$-\arctan\left(\frac{L_b\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0}}{R_0 + R_b}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{d'où} \quad L_b\omega_0 - \frac{1}{C\omega_0} = -(R_0 + R_b)$$

ce qui donne :

$$C = \frac{1}{\omega_0(L_b\omega_0 + R_0 + R_b)} = \frac{1}{2L_b\omega_0^2}$$

en utilisant la valeur de  $R_0$  trouvée à la question précédente.

- c) Application numérique :  $R_0 = 125 \Omega$  et  $C = 6,3 \mu\text{F}$ , ce qui sont des valeurs tout à fait convenables et qu'on peut facilement obtenir au laboratoire.

d) Avec les valeurs trouvées aux questions précédentes on obtient :

$$I_{m1} = |i_1(t)| = \frac{|\underline{u}(t)|}{|L_b\omega_0(1+j)|} = \frac{U}{\sqrt{2}L_b\omega_0}$$

et

$$I_{m2} = |i_2(t)| = \frac{|\underline{u}(t)|}{|R_0 + R_b - j(R_0 + R_b)|} = \frac{|\underline{u}(t)|}{|L_b\omega_0(1+j)|} = \frac{U}{\sqrt{2}L_b\omega_0}$$

Ainsi les intensités parcourant les deux bobines ont bien la même amplitude lorsque les conditions précédentes sont remplies. Dans la suite on posera  $I_{m1} = I_{m2} = I_m$  et donc :

$$i_1(t) = I_m \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I_m \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

6. Les deux bobines étant identiques et le point  $A$  étant situé à la même distance  $d$  de  $O_1$  ou de  $O_2$ , on en déduit que les champs magnétiques créés par la bobine horizontale et par la bobine verticale s'écrivent respectivement :

$$\vec{B}_1(A, t) = \alpha i_1(t) \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(A, t) = \alpha i_2(t) \vec{e}_y$$

où  $\alpha$  est un facteur géométrique qui dépend de  $d$ ,  $R$ ,  $N$  et  $\mu_0$ . En posant  $B_0 = \alpha I_m$  et en utilisant le théorème de superposition on en déduit que :

$$\boxed{\vec{B}(A, t) = B_0 \left[ \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_z + \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right) \vec{e}_y \right]}$$

7. Si on remarque que :

$$\cos\left(\omega_0 t \pm \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}} \mp \sin(\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on obtient :

$$\|\vec{B}(A, t)\|^2 = \frac{B_0^2}{2} \left[ (\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t))^2 + (\cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t))^2 \right] = B_0^2$$

et, en notant  $\varphi(t)$  l'angle que fait le vecteur  $\vec{B}(A, t)$  avec  $\vec{e}_y$  à l'instant  $t$ , on a :

$$\boxed{\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{4}}$$

Ainsi le vecteur  $\vec{B}(A, t)$  est un vecteur tournant dans le sens trigonométrique, avec la vitesse angulaire  $\omega_0$ . Sa norme reste constante au cours de la rotation.

### Partie III. – Principe du moteur synchrone

8. a) À l'instant  $t$  on a :

$$\vec{m} = m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) \vec{e}_y + m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) \vec{e}_z$$

On calcule produit vectoriel avec le champ magnétique tournant dont l'expression est donnée à la question 6. et on utilise le formulaire donné en début d'énoncé pour trouver ;

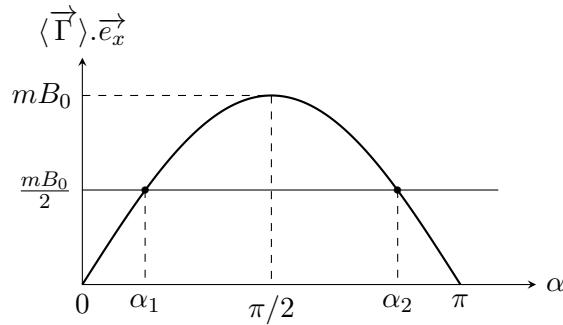
$$\begin{aligned} \vec{I}(t) &= \frac{mB_0}{2} \left[ \cos((\omega + \omega_0)t - \alpha) + \cos\left((\omega - \omega_0)t + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right. \\ &\quad \left. - \sin\left((\omega + \omega_0)t + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin((\omega - \omega_0)t - \alpha) \right] \vec{e}_x \end{aligned}$$

- b) Si  $\omega \neq \omega_0$  les valeurs moyennes de tous les cos et sin sont nulle. La seule possibilité pour qu'elles ne soient pas nulles est  $\omega = \omega_0$ . Les valeurs moyennes des termes en  $\cos((\omega + \omega_0)t + \dots)$  et  $\sin((\omega + \omega_0)t + \dots)$  restant nulles, il ne reste alors que :

$$\boxed{\omega = \omega_0 \text{ et } \langle \vec{\Gamma} \rangle = mB_0 \sin \alpha \vec{e}_x}$$

c) On veut que  $\langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x > 0$  et il s'ensuit que  $\sin \alpha > 0$ , ce qui impose  $\alpha \in ]0, \pi[$

9. a) Le schéma est donné ci-dessous :



Si on applique le théorème du moment cinétique à la boussole, sachant que  $\omega = \text{Cste}$ , on obtient (en désignant par  $J$  le moment d'inertie de la boussole par rapport à l'axe de rotation  $Ox$ ) :

$$J \dot{\omega} = 0 = \langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x - \frac{mB_0}{2} \quad \text{d'où} \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

ce qui donne les deux solutions  $\alpha_1 = \pi/6$  et  $\alpha_2 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$ .

- b) Provisoirement on a donc  $\omega < \omega_0$  puisque la boussole est ralentie.