

Correction - DS n°5bis (Centrale - Mines)

Samedi 24 janvier 2026 - Durée 4h

1 Mesure des variations du champ de gravitation terrestre

1. Les deux équations locales de Maxwell-Gauss et de Maxwell-Faraday dans le cadre du régime stationnaire s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{E} = \vec{0} \quad (1)$$

Les champs de gravitation et électrostatique jouent un rôle analogue. La masse volumique est remplacée par la charge volumique et on a $-4\pi G \longleftrightarrow 1/\varepsilon_0$.

2. Pour toute surface fermée S_F le flux du champ de gravitation à travers S_F vérifie l'équation ci-dessous :

$$\Phi(\vec{g}/S_F) = -4\pi G M_{\text{int}}$$

où M_{int} est la masse contenue à l'intérieur de S_F .

3. On considère une tranche de matière d'épaisseur h comprise entre les deux plans $z = -h/2$ et $z = +h/2$. Cette tranche est infinie dans les directions Ox et Oy et on suppose que la masse volumique ρ de la matière qui y est contenue est uniforme

- a) En un point M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) on peut écrire à priori :

$$\vec{g}(M) = g_x(x, y, z) \vec{e}_x + g_y(x, y, z) \vec{e}_y + g_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

- Les plans (Mxy) et (Myz) sont des plans de symétrie de la distribution de masses, contenant M . Il en résulte que :

$$\vec{g}(M) = g_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

- La tranche est invariante par toute translation de direction \vec{e}_x et toute translation de direction \vec{e}_y . On en déduit que :

$$\vec{g}(M) = g_z(z) \vec{e}_z \stackrel{\text{noté}}{=} g(z) \vec{e}_z$$

- b) Si M est un point du plan (xOy) , plan de symétrie de la tranche, alors $\vec{g}(M) = g(0) \vec{e}_z$ doit appartenir à ce plan. On en déduit que $g(0) = 0$.

De plus, si M' est le point symétrique de M par rapport au plan (xOy) , alors :

$$\vec{g}(M') = \text{sym}/xOy \vec{g}(M) = -\vec{g}(M)$$

On en déduit que $g(z)$ est une fonction impaire de z .

- c) Méthode 1 : par les équations locales.

$$\operatorname{div} \vec{g} = \frac{dg}{dz} = -4\pi G \rho(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < -h/2 \\ -4\pi G \rho & \text{si } -h/2 \leq z \leq h/2 \\ 0 & \text{si } z > h/2 \end{cases}$$

d'où :

$$g(z) = \begin{cases} C_1 & \text{si } z < -h/2 \\ -4\pi G \rho z + C_2 & \text{si } -h/2 \leq z \leq h/2 \\ C_3 & \text{si } z > h/2 \end{cases}$$

Comme $g(0) = 0$ on en déduit que $C_2 = 0$. De plus, la continuité de g en $z = \pm h/2$ (pas de masses surfaciques) entraîne que :

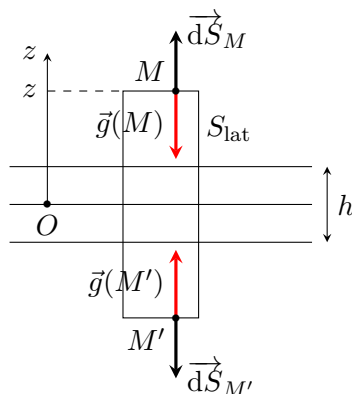
$$C_1 = 2\pi G \rho h \quad \text{et} \quad C_3 = -2\pi G \rho h$$

On a donc :

$$\vec{g}(M) = \begin{cases} 2\pi G \rho h \vec{e}_z & \text{si } z < -h/2 \\ -4\pi G \rho z \vec{e}_z & \text{si } -h/2 \leq z \leq h/2 \\ -2\pi G \rho h \vec{e}_z & \text{si } z > h/2 \end{cases}$$

Méthode 2 : par le théorème de Gauss.

La surface de Gauss (fermée) S_G est un cylindre de génératrices parallèles à Oz , dont les deux bases ont même surface S et sont placées symétriquement par rapport au plan xOy : la base supérieure étant d'abscisse $z > 0$ et la base inférieure d'abscisse $-z < 0$.



La contribution de la surface latérale S_{lat} au flux est nulle et les contributions des deux bases sont égales. On obtient donc :

$$\Phi(\vec{g}/S_G) = 2 \iint_{\text{Base Sup}} g(z) \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z dS_M = 2g(z)S$$

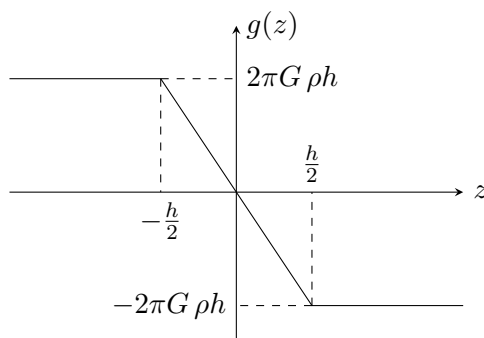
De plus :

$$M_{\text{int}} = \begin{cases} 2\rho S z & \text{si } 0 \leq z \leq h/2 \\ \rho S h & \text{si } h/2 < z \end{cases}$$

On applique le théorème de Gauss pour trouver :

$$g(z) = \begin{cases} -4\pi G \rho z & \text{si } 0 \leq z \leq h/2 \\ -2\pi G \rho h & \text{si } h/2 < z \end{cases}$$

On complète ensuite le résultat par imparité de $g(z)$ pour obtenir la même chose que dans la méthode 1.



4. a) $g_T(r) > 0$ car, comme le poids, le champ gravitationnel converge vers le centre de la Terre.
- b) On applique le théorème de Gauss gravitationnel en choisissant comme surface de Gauss la sphère de centre O et de rayon $r > R_T$. Comme $M_{\text{int}} = m_T$ il vient :

$$\Phi(\vec{g}_T/S_G) = -4\pi r^2 g_T(r) = -4\pi G m_T \quad \text{d'où} \quad \boxed{g_T(r) = G \frac{m_T}{r^2}}$$

c) On a :

$$g_T(R_T + h) = G \frac{m_T}{(R_T + h)^2} = \underbrace{G \frac{m_T}{R_T^2}}_{=g_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_T}\right)^2} \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)$$

d'où :

$$\boxed{g_T(R_T + h) \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right)}$$

A.N. : $g_0 = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

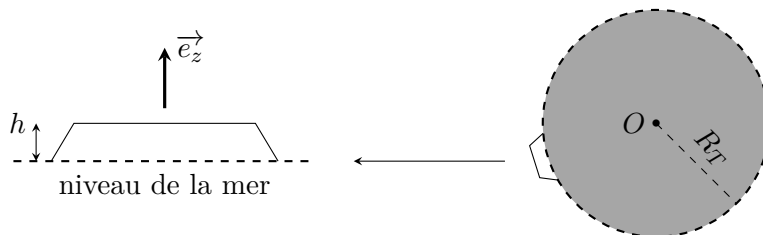


Figure 1: Modélisation du plateau chilien.

On se propose de calculer la variation du champ de gravitation terrestre telle qu'elle a été mesurée par Bouguer en 1738 sur un haut plateau chilien situé à l'altitude $h = 1000$ m par rapport au niveau de la mer (figure 1). On fait les hypothèses suivantes :

- le plateau est de masse volumique $\rho_P = 2670 \text{ kg.m}^{-3}$ uniforme;
- on le suppose suffisamment étendu dans les directions horizontales pour pouvoir l'assimiler à une tranche infinie d'épaisseur h pour les calculs qui nous intéressent.
- On note \vec{e}_z le vecteur unitaire ascendant dans la direction de la verticale locale au niveau du plateau.

5. À la surface du plateau, le champ de gravitation est la somme du champ de gravitation créé par la boule de rayon R_T et de celui créé par la tranche (théorème de superposition). D'après les questions précédentes on a donc :

$$\vec{g} = -g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) \vec{e}_z - 2\pi G \rho_P h \vec{e}_z = -g \vec{e}_z$$

et donc :

$$g = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R_T}\right) + 2\pi G \rho_P h$$

L'influence de l'éloignement du centre de la Terre a bien pour conséquence de diminuer la gravité, et celle du plateau de l'augmenter. Finalement :

$$\Delta g = g - g_0 = 2\pi G \rho_P h - g_0 \frac{2h}{R_T}$$

A.N. : $\Delta g = -1,96.10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$.

Remarque : $\Delta g < 0$ car le terme de gravitation de la boule $-g_0 2h/R_T$ l'emporte sur le terme dû par le plateau $2\pi G \rho_P h$.

6. (R.P.) La période d'un pendule simple est donnée par :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Au niveau de la mer, $g = g_0$ et $T = T_0 = 1\text{s}$. Sur le plateau chilien : $g = g_0 + \Delta g$ avec $|\Delta g| \ll g_0$ et la période devient :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0 + \Delta g}} = \underbrace{2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0}}}_{=T_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{\Delta g}{g_0}\right)^{1/2}} \approx T_0 \left(1 - \frac{\Delta g}{2g_0}\right) \quad (*)$$

On remarque que $T > T_0$.

Déterminons maintenant les intervalles dans lesquels il y a 100% de chance qu'une mesure de T (resp. de T_0) soit située.

- Comme $T_0 = 1\text{ s}$ (ce qui correspond à l'espérance mathématique de T_0), la demi-amplitude pour T_0 sera $\Delta_{T_0} = 1 \times 10^{-5}$. L'intervalle de confiance de T_0 sera donc :

$$I = [1 - 10^{-5}, 1 + 10^{-5}]$$

- L'espérance mathématique de T est donnée par la formule (*) ci-dessus; elle vaut 1,000100 s et la demi-étendue associée est $\Delta_T = 1,000100 \times 10^{-5}$. L'intervalle J dans lequel toute mesure de T a 100% de chance de tomber est donc :

$$J = [1,000100 \times (1 - 10^{-5}), 1,000100 \times (1 + 10^{-5})]$$

Afin que la mesure de l'écart entre les deux périodes soit significatif, il est nécessaire que les deux intervalles I et J soient *disjoints*. Or :

$$1 + 10^{-5} < 1,000100 \times (1 - 10^{-5})$$

car :

$$1,00001 < 1,000899$$

Les deux intervalles de confiance sont donc disjoints et on peut donc conclure, qu'avec ses moyens de l'époque, Bouguer était en capacité de mesurer l'écart entre les deux périodes et de déterminer la variation de g .

Remarque : pour en savoir plus sur l'aventure de Bouguer, on pourra se reporter aux sites :

- <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/pendule-pesanteur-altitude.xml#ref2>
- <http://www.annales.org/archives/cofrhigeo/bouguer.html>

2 Piéger une particule. Extrait Mines-Pont MP 2015

1. On sait que $\vec{F} = q \vec{E} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V$. En utilisant les coordonnées cartésiennes il vient :

$$a x = -q \frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad a y = -q \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad b z = -q \frac{\partial V}{\partial z} \quad (1)$$

Comme en dehors des charges, V satisfait à l'équation de Laplace, nous avons :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{a}{q} - \frac{a}{q} - \frac{b}{q} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{b = -2a}$$

Si on reprend les équations (1) on obtient alors par intégration :

$$V(x, y, z) = -\frac{a}{q} (x^2 + y^2) - \frac{b}{q} z^2 + \alpha = \alpha - \frac{a}{q} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

d'où en posant $\beta = -a/q$, on obtient le résultat demandé.

De plus, l'énoncé indique que (sachant que $z_0 = r_0/\sqrt{2}$) :

$$V(0, 0, z_0) = \alpha - 2\beta z_0^2 = \alpha - \beta r_0^2 = 0 \quad \text{et pour } x^2 + y^2 = r_0^2 \text{ et } z = 0, \quad \alpha + \beta r_0^2 = V_0$$

d'où :

$$\begin{cases} \alpha - \beta r_0^2 &= 0 \\ \alpha + \beta r_0^2 &= V_0 \end{cases}$$

donc :

$$\boxed{\alpha = \frac{V_0}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{V_0}{2r_0^2}}$$

2. Équipotentielles dans le plan xOz :

Le plan xOz est tel que $y = 0$, le potentiel a pour expression :

$$V(x, 0, z) = \frac{V_0}{2r_0^2} (x^2 - 2z^2 + r_0^2)$$

Cherchons l'équation de l'équipotentielle $V(x, 0, z) = V_1$. En posant $k = 2V_1/V_0$ nous obtenons l'équation :

$$(k - 1) r_0^2 = x^2 - 2z^2$$

Plusieurs cas se présentent :

- Si $k = 1$ on obtient les deux droites $x = \pm\sqrt{2}z$.
- Si $k < 1$ alors on met l'équation précédente sous la forme : $2z^2 = x^2 + r_0^2(1 - k)$, c'est à dire :

$$z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x^2 + r_0^2(1 - k)} = f_k(x)$$

L'axe Oz est axe de symétrie de la courbe équipotentielle (parité de la fonction f_k), de même que l'axe Ox . Les courbes ont pour asymptote $z = \pm x/\sqrt{2}$ lorsque $x \rightarrow \pm\infty$.

- Si $k > 1$ alors :

$$x = \pm \sqrt{2z^2 + (k - 1)r_0^2} = g_k(z)$$

L'axe Oz est axe de symétrie (à cause du \pm), de même que l'axe Ox par parité de la fonction $g_k(z)$. Les courbes ont pour asymptote les droites $x = \pm\sqrt{2}z$.

On obtient la représentation de la figure 2 à gauche. Les lignes de champ sont perpendiculaires aux équipotentielles.

Équipotentielles du plan xOy

C'est ici plus facile car le plan xOy est tel que $z = 0$ et le potentiel a pour expression :

$$V(x, y, 0) = \frac{V_0}{2r_0^2} (x^2 + y^2 + r_0^2)$$

L'équipotentielle $V(x, y, 0) = V_1$ a pour équation :

$$x^2 + y^2 = (k - 1)r_0^2 \quad \text{avec} \quad k = \frac{2V_1}{V_0}$$

Seules les valeurs $k > 1$ sont permises et on obtient alors des cercles de centre O et de rayon $\sqrt{k - 1}$. Les lignes de champ sont orthogonales à ces cercles et ce sont donc des droites passant par O : figure 2 à droite.

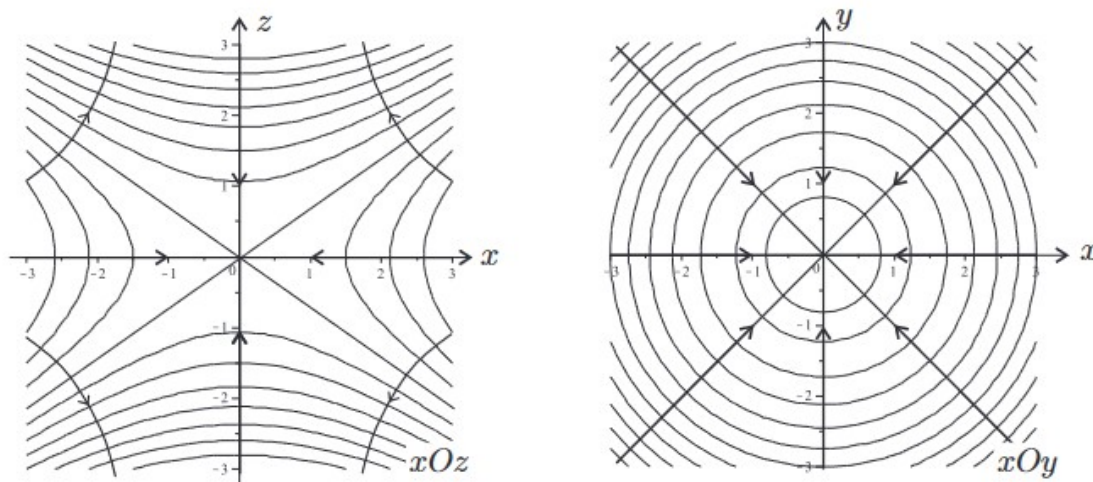


Figure 2: Équipotentielles et lignes de champ du piège électrostatique

3. On a :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{V_0}{r_0^2} (-x \vec{u}_x - y \vec{u}_y + 2z \vec{u}_z) \quad \text{et} \quad \vec{F} = q \vec{E}$$

On remarque que $\vec{F} = \vec{0}$ en $O(0, 0, 0)$, ce qui correspond bien à une position d'équilibre. Le principe fondamental de la dynamique (noté PFD par la suite) conduit aux trois équations (on note m la masse de la particule) :

$$\ddot{x} + \frac{qV_0}{mr_0^2} x = 0 \quad ; \quad \ddot{y} + \frac{qV_0}{mr_0^2} y = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} - \frac{2qV_0}{mr_0^2} z = 0$$

- Si $qV_0 > 0$ alors les équations en x et y sont des oscillateurs harmoniques (noté OH par la suite) mais pas celle en z : il y aura donc une instabilité selon l'axe Oz puisque z sera une combinaison linéaire de ch et de sh.
- Si $qV_0 < 0$ alors c'est l'équation en z qui est un OH mais pas les deux autres. Cette fois c'est x et y qui seront des combinaisons linéaires de ch et de sh.

4. Il faut ajouter à la force électrique la force magnétique :

$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B}_0 = -eB_0 (-\dot{x} \vec{u}_y + \dot{y} \vec{u}_x)$$

Le PFD conduit à :

$$\ddot{x} - \frac{eV_0}{m_p r_0^2} x + \frac{eB_0}{m_p} \dot{y} = 0 \quad ; \quad \ddot{y} - \frac{eV_0}{m_p r_0^2} y - \frac{eB_0}{m_p} \dot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} + \frac{2eV_0}{m_p r_0^2} z = 0$$

c'est à dire :

$$\ddot{x} - \omega_0^2 x + \omega_c \dot{y} = 0 \quad ; \quad \ddot{y} - \omega_0^2 y - \omega_c \dot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} + 2\omega_0^2 z = 0$$

En posant $\xi = x + iy$ on obtient les deux équations différentielles :

$$\boxed{\ddot{\xi} - i\omega_c \dot{\xi} - \omega_0^2 \xi = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{z} + 2\omega_0^2 z = 0}$$

L'équation en z est un OH ce qui assure le confinement de l'antiproton dans la direction de Oz . Cherchons les solutions de pour ξ ; l'équation caractéristique s'écrit :

$$X^2 - i\omega_c X - \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = -\omega_c^2 + 4\omega_0^2$$

Afin d'assurer le confinement selon les axes Ox et Oy , il faut des solutions sinusoïdales en $x(t)$ et $y(t)$, ce qui implique que les racines de l'EC soient imaginaires pures. Il est donc nécessaire que :

$$\Delta < 0 \iff 2\omega_0 < \omega_c \quad \text{d'où} \quad \frac{2m_p \omega_0}{e} < B_0 \quad \text{soit} \quad \boxed{B_{\min} = \frac{2m_p \omega_0}{e}}$$

A.N. : $B_{\min} = 8,2 \cdot 10^{-2}$ T. Le champ magnétique $B_0 = 1$ T appliqué est donc largement suffisant.

5. On calcule $\omega_c = 9,4 \cdot 10^7$ rad.s⁻¹ et $\omega_0 = 3,8 \cdot 10^6$ rad.s⁻¹. On a donc $2\omega_0 \ll \omega_c$ et la condition de la question précédente est bien vérifiée. Les deux racines de l'équation caractéristique sont donc :

$$X_1 = i \frac{\omega_c}{2} + i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 4\omega_0^2}}{2} \approx i\omega_c$$

et

$$X_2 = i \frac{\omega_c}{2} - i \frac{\sqrt{\omega_c^2 - 4\omega_0^2}}{2} = i \frac{\omega_c}{2} - i \frac{\omega_c}{2} \sqrt{1 - 4 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}} \approx i \frac{\omega_c}{2} - i \frac{\omega_c}{2} \left(1 - 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_c^2}\right) = i \frac{\omega_0^2}{\omega_c}$$

On pose alors $\omega_1 = \frac{\omega_0^2}{\omega_c} \ll \omega_0 \ll \omega_c$, ce qui donne pour solutions :

$$\xi(t) = a_1 e^{i\omega_c t} + b_1 e^{i\omega_1 t} \quad \text{et} \quad z(t) = a_2 \cos(\sqrt{2}\omega_0 t) + b_2 \sin(\sqrt{2}\omega_0 t)$$

Le mouvement dans le plan (xOy) est donc une superposition d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_c donc rapide et d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_1 très lent. Le mouvement sur l'axe Oz est un mouvement sinusoïdal de pulsation $\sqrt{2}\omega_0$ lent.

3 À propos de champs magnétiques. D'après Mines Ponts PSI 2016 et MP 2019

Partie I – Réalisation d'un champ magnétique uniforme

1. Voir le cours
2. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie des courants, donc un plan de symétrie de \vec{B} contenant M . Le champ magnétique en M appartient donc à ce plan de symétrie ce qui implique $B_\theta = 0$.

De plus, il y a invariance de la distribution de courant par toute rotation autour de Oz , ce qui entraîne que les fonctions B_{hr} et B_{hz} ne dépendent pas de l'angle θ .

Enfin, le plan $(Oxy) \perp Oz$ est un plan de symétrie des courants, donc un plan d'antisymétrie de \vec{B} . Si $M(r, \theta, z)$ et $M'(r, \theta, -z)$ sont deux points symétriques par rapport à ce plan, alors :

$$\vec{B}_h(M') = -\text{sym}_{Oxy} \vec{B}_h(M)$$

d'où :

$$B_{rh}(r, -z) \vec{e}_r + B_{hz}(r, -z) \vec{e}_z = - [B_{rh}(r, z) \vec{e}_r - B_{hz}(r, z) \vec{e}_z]$$

Il en résulte que (projection sur \vec{e}_z) $B_{hz}(r, -z) = B_{hz}(r, z)$. La fonction $B_{hz}(r, z)$ est bien paire par rapport à la coordonnée z .

On montre qu'en un point M situé sur l'axe Oz , à l'abscisse z , le champ magnétique $\vec{B}_h(z)$ créé par les bobines d'Helmholtz s'écrit :

$$\vec{B}_h(z) = N \vec{B}_0 \left\{ \left[1 + \left(\frac{z}{R} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{z}{R} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}$$

3. Le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant I est donné par (théorème d'Ampère) : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$. Par analogie dimensionnelle, la quantité $B_0 = \|\vec{B}_0\|$ est donc donnée par :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

4. On pose $X = z/R$. Les termes en X et en X^3 se compensent et il ne reste dans le développement limité que :

$$\vec{B}_h(z) = NB_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[2 - \frac{288}{125} \frac{z^4}{R^4} \right] \vec{e}_z$$

(Sur l'axe (Oz) , le champ magnétique est bien sûr colinéaire à \vec{e}_z car si M est sur cet axe, le plan $(M, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est un autre plan d'antisymétrie des courants de sorte que $B_{rh} = 0$).

En O , $z = 0$ et on a donc :

$$B_h(z = 0) = NB_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \times 2$$

Il s'ensuit que la variation relative du $B_h(z)$ au voisinage de $z = 0$ s'écrit :

$$\left| \frac{B_h(z) - B_h(0)}{B_h(0)} \right| = \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^4} < 2/100$$

ce qui implique :

$$|z| < R \left(\frac{125}{72 \times 100} \right)^{1/4} \stackrel{AN}{=} 5,4 \text{ cm}$$

Il s'agit donc d'une zone relativement étendue de part et d'autre de O .

On calcule $B_h(z = 0) = NB_0 \frac{16}{5\sqrt{5}} = 1,2 \text{ mT}$

5. Il y a N tours de fil par bobine donc $2N$ tours de fil au total. La longueur totale de fil est donc $2N \times 2\pi R = 94 \text{ m}$ et la résistance totale du fil est donc :

$$R_{\text{tot}} = \frac{2N \times 2\pi R}{\gamma a^2} = 0,39 \Omega$$

On en déduit que la puissance dissipée par effet Joule dans les deux bobines s'écrit :

$$P_J = R_{\text{tot}} I^2 \approx 6 \text{ W}$$

6. Manifestement $b_0(z) = B_h(z)$ (valeur sur l'axe Oz) et $c_0(z) = 0$ puisque la composante radiale de \vec{B}_h s'annule sur l'axe.

En utilisant $\text{div } \vec{B}_h = 0$ et $\vec{\text{rot}} \vec{B}_h = \vec{0}$ on obtient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 c_1(z))}{\partial r} + \frac{\partial(B_h + r b_1(z) + r^2 b_2(z))}{\partial z} = 0 \quad \text{donc} \quad 2c_1(z) + \frac{dB_h}{dz} + r \frac{db_1}{dz} + r^2 \frac{db_2}{dz} = 0$$

et

$$\frac{\partial B_{hr}}{\partial z} - \frac{\partial B_{hz}}{\partial r} = 0 \quad \text{d'où} \quad r \frac{dc_1}{dz}(z) - b_1(z) - 2r b_2(z) = 0 \quad (2)$$

Ces équations étant valables pour tout r et z (à condition que r soit suffisamment petit), on fait tendre r vers 0 pour obtenir :

$$b_1(z) = 0 \quad \text{et} \quad c_1(z) = -\frac{1}{2} \frac{dB_h}{dz}(z)$$

Finalement, sachant que $b_1(z) = 0$, l'équation (2) conduit à :

$$\frac{dc_1}{dz}(z) - 2b_2(z) = 0 \quad \text{soit} \quad b_2(z) = \frac{1}{2} \frac{dc_1}{dz}(z) = -\frac{1}{4} \frac{d^2 B_h}{dz^2}(z)$$

7. Applications numériques. $B_{rh}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_h}{dz}(z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2B_h}{dz^2}(z)$. Or $B_h(z) = NB_0 \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[2 - \frac{288}{125} \frac{z^4}{R^4} \right]$, donc $B_{rh}(r, 0) = 0$. On retrouve bien que la composante radiale est nulle en O (en effet, d'après Q.2, $B_{rh}(r, z)$ est impaire par rapport à z).

En $z = 1$ cm, calculons tout d'abord la valeur numérique du terme du premier ordre (1) en r de la composante radiale. D'après la question précédente :

$$B_{hr}^{(1)}(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_h}{dz}(z) = \frac{\mu_0 N I r}{2R} \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{288 \times 4}{125} \frac{z^3}{R^4}$$

On trouve $B_{hr} = 5,5 \times 10^{-5}$ mT. La composante du second ordre (2) en r s'écrit :

$$B_{hr}^{(2)}(r, z) = -\frac{r^2}{4} \frac{d^2B_h}{dz^2}(z) = \frac{\mu_0 N I r^2}{2R} \frac{8}{4} \frac{288 \times 4 \times 3}{125} \frac{z^2}{R^4} = \frac{3r}{2z} B_{hr}^{(1)}(r, z)$$

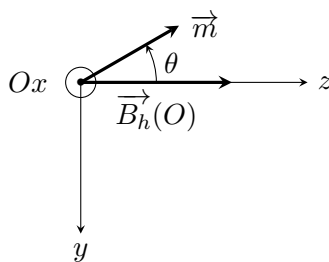
Finalement,

$$\boxed{B_{hr}(r, z) = 1.4 \times 10^{-4} \text{ mT}} \ll 1,2 \text{ mT}$$

On peut donc conclure que la composante radiale de \vec{B} est nulle ou bien négligeable devant la composant longitudinale B_{hz} . Autour du point O , le champ magnétique est donc quasiment dirigé selon \vec{e}_z en tout point.

Partie II – Mesure des caractéristiques d'une boussole

8. C'est lorsque le moment magnétique \vec{m} est colinéaire au champ magnétique $\vec{B}(O)$ et de même sens. \vec{m} est donc dirigé selon $+\vec{e}_z$ (en supposant $I > 0$).
9. On a le schéma suivant :



On a :

$$\vec{m} = m (\cos \theta \vec{e}_z - \sin \theta \vec{e}_y) \quad \text{donc} \quad \vec{\Gamma} = -m N B_0 \frac{16}{5\sqrt{5}} \sin \theta \vec{e}_x$$

Le théorème du moment cinétique (TMC) appliqué à la boussole donne alors, dans la limite des petits mouvements où $\sin \theta \approx \theta$:

$$J \ddot{\theta} = -m N B_0 \frac{16}{5\sqrt{5}} \theta \quad \text{donc} \quad \ddot{\theta} + \frac{16 m N B_0}{5\sqrt{5} J} \theta = 0$$

Il s'agit d'un oscillateur harmonique de période propre :

$$\boxed{\tau_{\text{osc}} = 2\pi \sqrt{\frac{5\sqrt{5}J}{16 m N B_0}}}$$

10. On sait que $[m] = \text{A.m}^2$ et $J = \text{kg.m}^2$. On en déduit que $[\kappa] = \text{A.kg}^{-1}$. On a d'autre part :

$$\kappa = \frac{4\pi^2}{\tau_{osc}^2} \frac{5\sqrt{5}}{16NB_0} \stackrel{AN}{=} 3,6 \times 10^5 \text{ A.kg}^{-1}$$

Partie III. – Principe du moteur synchrone

11. Si on remarque que :

$$\cos\left(\omega_0 t \pm \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}} \mp \sin(\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

on obtient :

$$\|\vec{B}(O, t)\|^2 = \frac{B_0^2}{2} [(\cos(\omega_0 t) + \sin(\omega_0 t))^2 + (\cos(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 t))^2] = B_0^2$$

et, en notant $\varphi(t)$ l'angle que fait le vecteur $\vec{B}(O, t)$ avec \vec{e}_y à l'instant t , on a :

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{\pi}{4}$$

On peut donc écrire plus simplement :

$$\vec{B}(O, t) = B_0 [\sin(\varphi) \vec{e}_z + \cos(\varphi) \vec{e}_y]$$

Ainsi le vecteur $\vec{B}(O, t)$ est un vecteur tournant dans le sens trigonométrique, avec la vitesse angulaire ω_0 . Sa norme reste constante au cours de la rotation.

$\vec{B}(O, t)$ peut être généré à partir de 2 bobines d'axes respectifs \vec{e}_z et \vec{e}_y , et alimentées par des courants sinusoïdaux déphasés de $\frac{\pi}{2}$.

12. a) À l'instant t on a :

$$\vec{m} = m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) \vec{e}_y + m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha\right) \vec{e}_z$$

On calcule produit vectoriel avec le champ magnétique tournant dont l'expression est donnée à la question 6. et on utilise le formulaire donné en début d'énoncé pour trouver ;

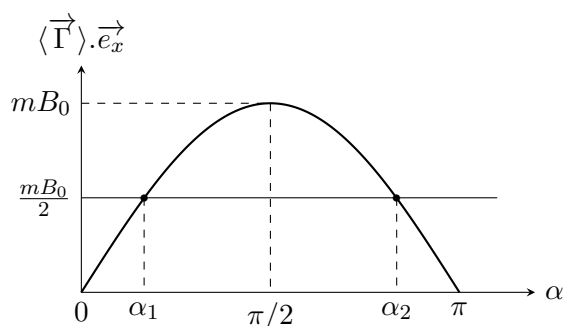
$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}(t) = \frac{mB_0}{2} & \left[\cos((\omega + \omega_0)t - \alpha) + \cos\left((\omega - \omega_0)t + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right. \\ & \left. - \sin\left((\omega + \omega_0)t + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin((\omega - \omega_0)t - \alpha) \right] \vec{e}_x \end{aligned}$$

- b) Si $\omega \neq \omega_0$ les valeurs moyennes de tous les cos et sin sont nulle. La seule possibilité pour qu'elles ne soient pas nulles est $\omega = \omega_0$. Les valeurs moyennes des termes en $\cos((\omega + \omega_0)t + \dots)$ et $\sin((\omega + \omega_0)t + \dots)$ restant nulles, il ne reste alors que :

$$\omega = \omega_0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Gamma} \rangle = mB_0 \sin \alpha \vec{e}_x$$

- c) On veut que $\langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x > 0$ et il s'ensuit que $\sin \alpha > 0$, ce qui impose $\alpha \in]0, \pi[$

13. a) Le schéma est donné ci-dessous :



Si on applique le théorème du moment cinétique à la boussole, sachant que $\omega = \text{Cste}$, on obtient (en désignant par J le moment d'inertie de la boussole par rapport à l'axe de rotation Ox) :

$$J\dot{\omega} = 0 = \langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x - \frac{mB_0}{2} \quad \text{d'où} \quad \sin \alpha = \frac{1}{2}$$

ce qui donne les deux solutions $\alpha_1 = \pi/6$ et $\alpha_2 = \pi - \pi/6 = 5\pi/6$.

b) Provisoirement on a donc $\omega < \omega_0$ puisque la boussole est ralentie, donc la boussole va "prendre du retard" par rapport au champ tournant, et α va donc légèrement augmenter.

- Si le point de fonctionnement était situé en α_1 , d'après la figure, le fait qu' α augmente va conduire à une augmentation du couple moteur Γ , de sorte que la boussole va "rattraper son retard".
- Si le point de fonctionnement était situé en α_2 , d'après la figure, le fait qu' α augmente va conduire à une diminution du couple moteur Γ , de sorte que la boussole va "prendre encore davantage de retard" et va se désynchroniser avec le champ magnétique. La boussole va rapidement s'arrêter de tourner dans ce cas.

Finalement, seul α_1 est donc une position de fonctionnement moteur stable.

Partie III – Pôles géographiques et magnétiques

14. C'est parce que le moment magnétique de la boussole s'aligne sur la composante horizontale du champ magnétique local qui est dirigé vers le nord magnétique. Cet équilibre est stable si \vec{M} est dans le même sens que \vec{B}

15. On utilise la formule donnée par l'énoncé pour obtenir :

$$\vec{M} = M_0 \vec{e}_z = M_0 \cos \theta \vec{e}_r - M_0 \sin \theta \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{R} = R_T \vec{e}_r$$

ce qui conduit à :

$$B_r = \vec{B} \cdot \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{R} \cdot \vec{e}_r)(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R_T^2 (\vec{M} \cdot \vec{e}_r)}{R_T^5} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \frac{2 \cos \theta}{R_T^3}$$

$$B_\theta = \vec{B} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta)(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R_T^2 (\vec{M} \cdot \vec{e}_\theta)}{R_T^5} = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi} \frac{\sin \theta}{R_T^3}$$

et $B_\varphi = \vec{B} \cdot \vec{e}_\varphi = 0$. On retrouve donc la formule du cours :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

16. Les lignes de champ magnétique étant dirigées du Sud vers le Nord, on a (en se souvenant de l'allure des ligne de champ d'un dipôle données dans le cours) : $M_0 < 0$. Pour s'en convaincre, on peut aussi regarder la direction et le sens de \vec{B} à l'équateur, c'est à dire pour $\theta = \pi/2$:

$$\vec{B}_E = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_\theta(\theta = \pi/2) = -\frac{\mu_0 M_0}{4\pi R_T^3} \vec{e}_z$$

Or ce champ doit être dirigé vers le nord, ce qui impose $M_0 < 0$. On en déduit que :

$$B_E = \frac{\mu_0 |M_0|}{4\pi R_T^3} \quad \text{d'où} \quad M_0 = -\frac{4\pi R_T^3 B_E}{\mu_0} \stackrel{AN}{=} -7,9 \times 10^{22} \text{ A.m}^2$$

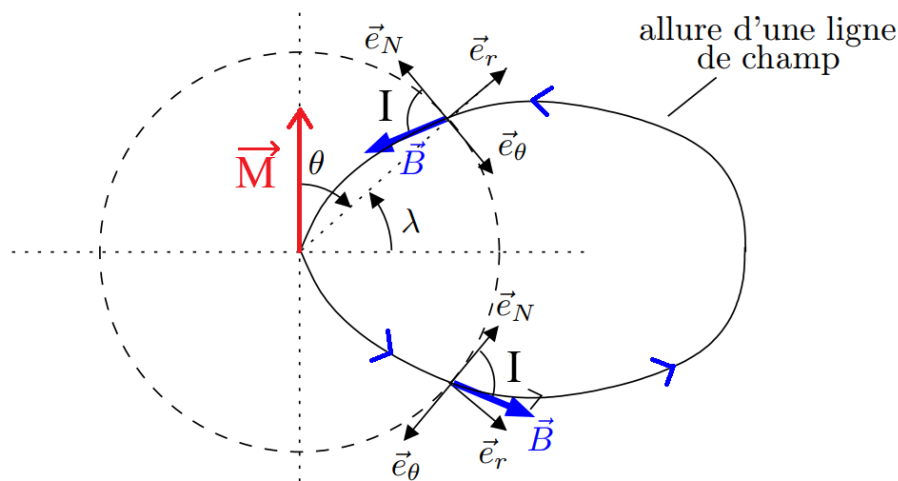
- Au pôle magnétique nord, $\theta = 0$ et :

$$|B_N| = \frac{2\mu_0 |M_0|}{4\pi R_T^3} = 2B_E = 6,0 \times 10^{-5} \text{ T}$$

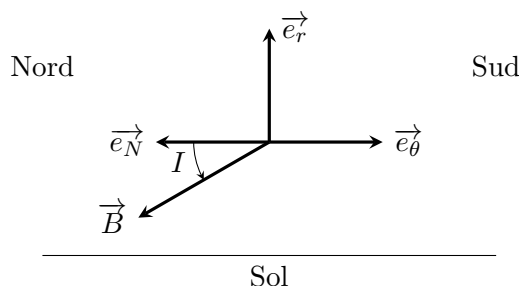
- Au pôle magnétique sud, $\theta = \pi$ et l'intensité du champ magnétique est la même (en valeur absolue) :

$$|B_S| = \frac{2\mu_0 |M_0|}{4\pi R_T^3} = 2B_E = 6,0 \times 10^{-5} \text{ T}$$

17. On peut faire un schéma global avec les lignes de champ. Attention, sur ce schéma, \vec{M} est orienté vers le haut, ce qui définit l'axe z et l'angle θ , mais comme $\vec{M} = -M_0 \vec{e}_z$, les lignes de champ magnétiques partent "vers le bas"!

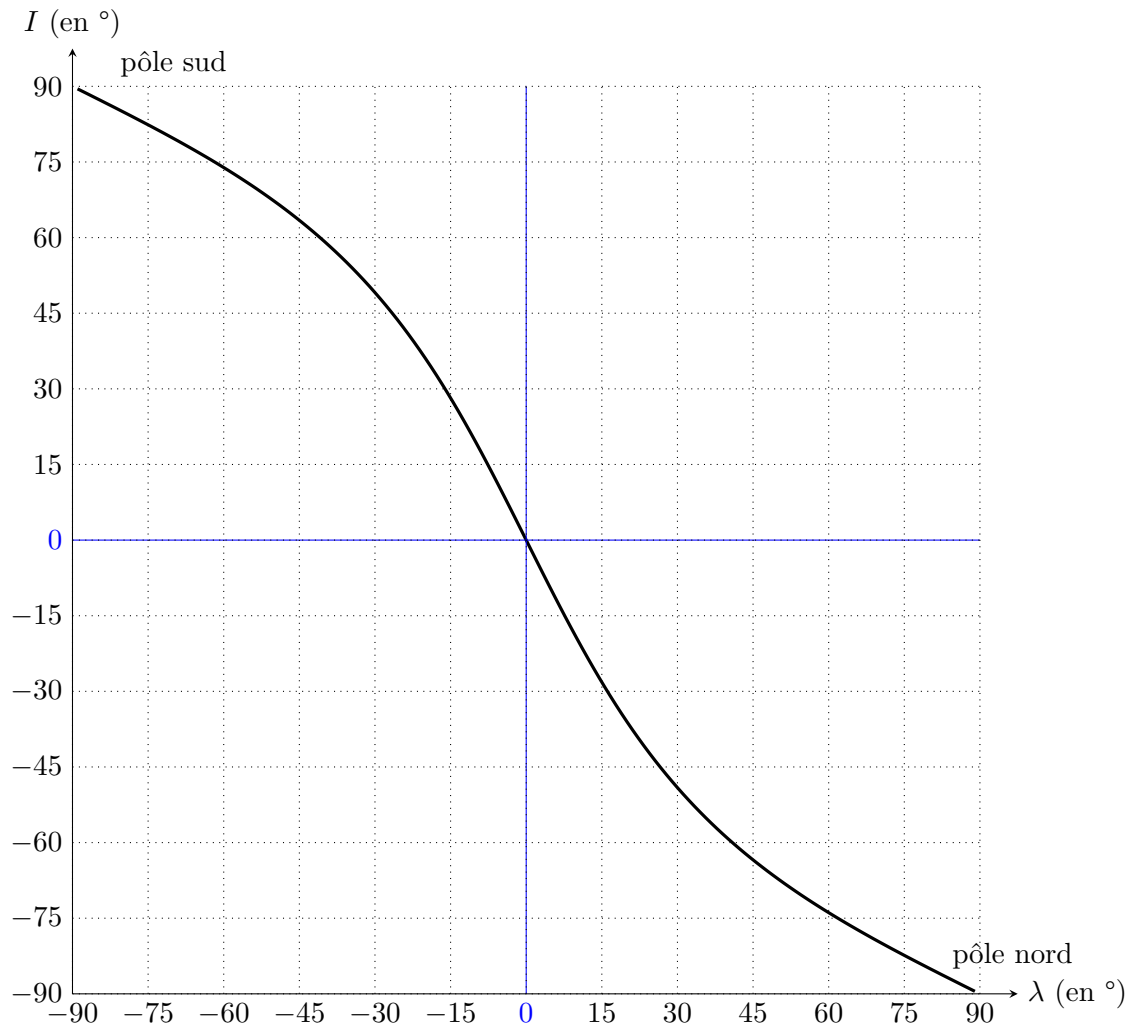


On fait un schéma pour l'hémisphère nord, localement au voisinage du sol. On a donc $\theta \in]0 \pi/2[$, donc $\cos \theta > 0$ et $\sin \theta > 0$. Cependant nous avons $M_0 < 0$, ce qui conduit au schéma ci-dessous :



On voit donc que $I < 0$ dans l'hémisphère nord. On a de plus :

$$\tan(I) = -\frac{B_r}{B_\theta} = -\frac{2 \cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{2 \cos(\pi/2 - \lambda)}{\sin(\pi/2 - \lambda)} = -2 \tan \lambda$$



À proximité des pôles, la composante horizontale devient très faible devant la composante verticale et la stabilité de la direction n'est plus assurée par fluctuation du champ horizontal très sensible eu égard à la faiblesse de sa valeur. Si le soleil est visible, on peut déterminer avec une boussole si on est dans l'hémisphère nord (en particulier aux latitudes grandes et moyennes : le soleil est du côté sud alors que c'est l'inverse dans l'autre hémisphère).