

DS n°5bis (Centrale - Mines)
Samedi 24 janvier 2026 - Durée 4h

Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté et à la précision de la rédaction. Tout commentaire pertinent sera valorisé.

Tous les résultats devront être mis en évidence. Une application numérique qui ne respecte pas le nombre de chiffres significatifs des données de l'énoncé ou qui est sans unité ne donnera pas lieu à une attribution de points.

1 Mesure des variations du champ de gravitation terrestre

Données numériques :

Constante de la gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$

Masse de la Terre : $m_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Rayon terrestre moyen (au niveau de la mer) : $R_T = 6371 \text{ km}$

*Lorsqu'une question est marquée **(R.P.)** (résolution de problème), elle n'est pas guidée et demande de l'initiative de la part du candidat. Les pistes de recherche doivent être consignées ; si elles sont pertinentes, elles seront valorisées. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.*

On s'intéresse au champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ créé en un point M par une distribution de masse volumique ρ qui satisfait les équations locales suivantes:

$$\text{div } \vec{g} = -4\pi G \rho \quad \text{et} \quad \text{rot } \vec{g} = \vec{0} \quad (1)$$

1. Dresser une analogie entre les équations (1) et celles de l'électrostatique.
2. Énoncer le théorème de Gauss gravitationnel.
3. On considère une tranche de matière d'épaisseur h comprise entre les deux plans $z = -h/2$ et $z = +h/2$. Cette tranche est infinie dans les directions Ox et Oy et on suppose que la masse volumique ρ de la matière qui y est contenue est uniforme

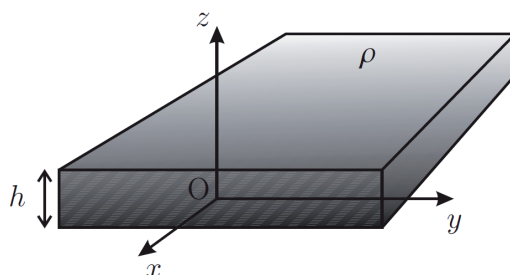


Figure 1: Tranche de matière d'épaisseur h .

- a) Déterminer soigneusement par une étude de symétries la direction de $\vec{g}(M)$ en un point M quelconque ainsi que les coordonnées dont il dépend.

- b) Que dire de la valeur du champ de gravitation en un point M du plan (xOy) ? En deux points M et M' symétriques par rapport au plan (xOy) ?
- c) Par une méthode de votre choix, déterminer l'expression du champ de gravitation créé par la tranche en tout point M de l'espace. En donner une représentation en fonction de z .
4. Dans cette question la Terre est assimilée à une boule de centre O et de rayon R_T , dont la répartition de masses est à symétrie sphérique. Sa masse totale est m_T .

Le champ de gravitation $\vec{g}_T(M)$ créé par cette boule en un point M tel que $OM = r > R_T$ est de la forme $\vec{g}_T(M) = -g_T(r) \vec{e}_r$ où $\vec{e}_r = \overrightarrow{OM}/r$.

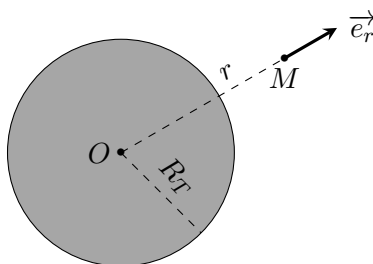


Figure 2: Modèle sphérique de la Terre.

- a) Quel est le signe de $g_T(r)$?
- b) Déterminer l'expression de $g_T(r)$ en fonction des paramètres G et m_T .
- c) Le champ de gravitation au niveau de la mer ($r = R_T$) est $g_0 > 0$. Déterminer une expression approchée de g_T à une altitude h au dessus du niveau de la mer en fonction de g_0 et du rapport h/R_T . On supposera h petit devant R_T pour se contenter d'une expression à l'ordre 1 en h/R_T .

Application numérique : calculer g_0 .

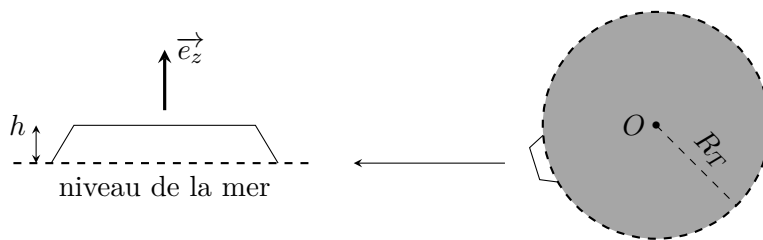


Figure 3: Modélisation du plateau chilien.

On se propose de calculer la variation du champ de gravitation terrestre telle qu'elle a été mesurée par Bouguer en 1738 sur un haut plateau chilien situé à l'altitude $h = 1000$ m par rapport au niveau de la mer (figure 3). On fait les hypothèses suivantes :

- le plateau est de masse volumique $\rho_P = 2670 \text{ kg.m}^{-3}$ uniforme;
- on le suppose suffisamment étendu dans les directions horizontales pour pouvoir l'assimiler à une tranche infinie d'épaisseur h pour les calculs qui nous intéressent.

- On note \vec{e}_z le vecteur unitaire ascendant dans la direction de la verticale locale au niveau du plateau.
5. Soit g ($g > 0$) le champ de gravitation terrestre à la surface du plateau chilien. Établir l'expression de $\Delta g = g - g_0$ en fonction de G , ρ_P , g_0 , h et R_T .

Application numérique : calculer Δg .

6. **(R.P.)** Bouguer disposait d'un pendule simple dont la longueur L avait été ajustée pour que celui-ci ait une période $T_0 = 1$ s au niveau de la mer et il savait mesurer une période d'oscillation avec une précision de 10^{-5} .

Était-il capable avec ce dispositif de mesurer l'écart Δg du champ de gravitation terrestre entre le niveau de la mer et le plateau ?

2 Piéger une particule

Données générales :

Charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C

Masse d'un proton : $m_p = 1,7 \times 10^{-27}$ kg

Laplacien scalaire : $\Delta f = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$

L'objectif est de piéger une particule chargée en vue de la garder stockée le plus longtemps possible. L'idée la plus simple consiste à piéger cette particule dans un puits de potentiel.

Le dispositif de piégeage est représenté sur la figure 4; il compte trois électrodes métalliques présentant une symétrie de révolution autour d'un axe (Oz). La première, notée E_B , est en forme d'anneau de rayon interne r_0 et d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 = r_0^2$; elle est portée à un potentiel V_0 positif. Les deux autres, notées E_{A1} et E_{A2} , sont en forme de coupelles et correspondent aux deux nappes de l'hyperboloïde d'équation $x^2 + y^2 - 2z^2 = -2z_0^2$; elles sont reliées à la masse.

La distance minimale entre les deux coupelles est telle que $2z_0 = \sqrt{2}r_0$. On note $V(x, y, z)$ le potentiel régnant dans le piège à l'intérieur duquel on a fait le vide. Ce potentiel est donc tel que $V(0, 0, z_0) = 0$ d'une part et d'autre part si $x^2 + y^2 = r_0^2$ alors $V(x, y, 0) = V_0$.

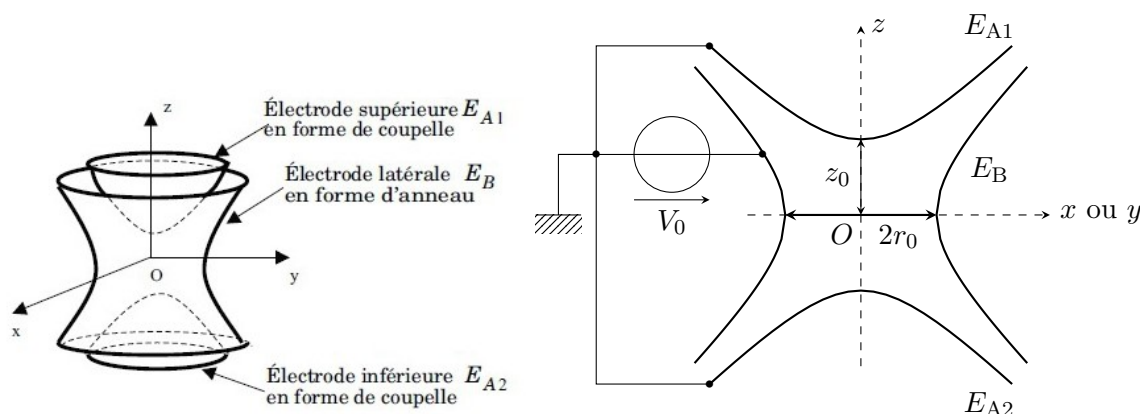


Figure 4: Dispositif de piégeage à trois électrodes

On admet qu'une particule ponctuelle de charge q placée dans le piège est soumise à une force électrique de la forme $\vec{F} = a(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y) + bz\vec{u}_z$ où a et b sont deux paramètres réels.

1. En écrivant l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel $V(x, y, z)$ obtenir une relation entre a et b . Montrer que le potentiel s'écrit sous la forme :

$$V(x, y, z) = \alpha + \beta(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

puis, exprimer α en fonction de V_0 et β en fonction de r_0 et V_0 .

2. Tracer les équipotentielles dans les plans xOz et xOy . En déduire les lignes de champ orientées dans ces mêmes plans.

3. En écrivant le principe fondamental de la dynamique montrer que le point $O(0, 0, 0)$ est un équilibre. Montrer que cet équilibre est globalement instable quel que soit le signe de la charge placée dans ce potentiel.

Afin d'éliminer l'instabilité démontrée à la question 3., une solution est d'ajouter un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$ avec $B_0 = 1,0$ T dans le dispositif électrostatique. Le piège devient ainsi une trappe de Penning; le mérite de sa mise en œuvre concrète est du à H. G. Dehmelt qui reçut le prix Nobel de physique en 1989 pour cette réalisation, l'idée originale de F.M. Penning datant de 1936.

4. La particule piégée dans la trappe de Penning est un antiproton \bar{p} de masse m_p et de charge $q = -e$. Établir les équations différentielles vérifiées par les fonctions $z(t)$ et $\xi(t) = x(t) + iy(t)$, où x , y et z sont les coordonnées cartésiennes de l'antiproton.

On introduira les constantes $\omega_c = \frac{eB_0}{m_p}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{m_p r_0^2}}$. Montrer qu'il existe un champ B_{\min} , tel que si $B_0 > B_{\min}$ conduit au confinement de l'antiproton. Calculer la valeur de B_{\min} pour un piège tel que $V_0 = 5,0$ V et $r_0 = 5,7$ mm.

5. Calculer la valeur numérique de ω_0 et ω_c pour la trappe de Penning considérée. En déduire que le mouvement confiné de l'antiproton dans cette trappe est la composition d'un mouvement rapide et de deux mouvements plus lents. On donnera une estimation simple des pulsations de ces trois mouvements en fonction de ω_0 et ω_c .

3 À propos de champs magnétiques

Donnée générale pour tout le problème

Perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$

Dans le système des coordonnées cylindriques (r, θ, z) de vecteurs de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, pour tout champ vectoriel $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z$, on donne :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

et

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial z} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

Partie I – Réalisation d'un champ magnétique uniforme

On considère un solénoïde cylindrique de longueur ℓ comportant N spires jointives identiques, circulaires de rayon R . Ce solénoïde est parcouru par un courant d'intensité I constante.

1. On se place dans le cadre de l'approximation du solénoïde infini. Établir l'expression du champ magnétique \vec{B} créé par le solénoïde à l'intérieur de celui-ci. On pourra admettre que le champ extérieur est nul.

Une autre méthode classique de production d'un champ magnétique uniforme est l'utilisation des bobines de HELMHOLTZ. Les questions suivantes vont permettre d'explicitier leurs caractéristiques.

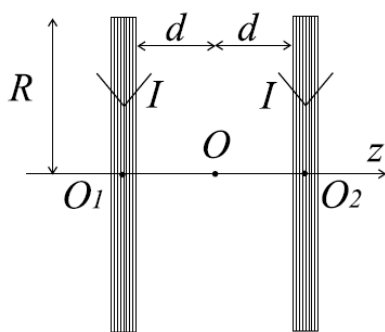


Figure 1 : Bobines de HELMHOLTZ

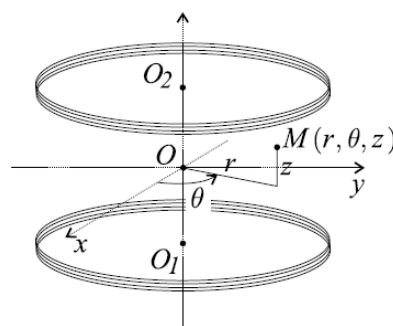


Figure 2 : Coordonnées cylindriques

On considère le montage de la Figure 1 constitué de deux bobines plates d'épaisseur négligeable, composées chacune de N spires circulaires de rayon R , de même axe de symétrie Oz . Ces deux bobines ont pour centres de symétrie respectifs O_1 et O_2 et elles sont parcourues par des courants identiques d'intensité I constante. Les extrémités de ces bobines sont séparées d'une distance $2d$. La configuration d'HELMHOLTZ est obtenue lorsque $d = R/2$.

On note \vec{B}_h le champ magnétique créé par la configuration d'Helmholtz et $(B_{hr}, B_{h\theta}, B_{hz})$ les composantes de \vec{B}_h dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ des coordonnées cylindriques (voir Figure 2).

2. Justifiez que $B_{h\theta} = 0$, $B_{hr} = B_{hr}(r, z)$, $B_{hz} = B_{hz}(r, z)$ et que la fonction $B_{hz}(r, z)$ est paire par rapport à la coordonnée z .

On montre qu'en un point M situé sur l'axe Oz , à l'abscisse z , le champ magnétique $\vec{B}_h(z)$ créé par les bobines d'Helmholtz s'écrit :

$$\vec{B}_h(z) = N \vec{B}_0 \left\{ \left[1 + \left(\frac{z}{R} - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\frac{z}{R} + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}$$

3. La quantité $B_0 = \|\vec{B}_0\|$ s'exprime en fonction de μ_0 , R et I . Par comparaison avec d'autres champs magnétiques, choisir en justifiant précisément ce choix, l'expression de B_0 parmi les suivantes :

$$B_0 = \frac{\mu_0 R}{2I} ; \quad B_0 = \frac{\mu_0 I R}{2} ; \quad B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} ; \quad B_0 = \frac{IR}{2\mu_0}$$

4. Les bobines ont un rayon $R = 15$ cm. On donne le développement limité suivant :

$$\left[1 + \left(X \pm \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{-3/2} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \left[1 \mp \frac{6}{5}X \pm \frac{32}{25}X^3 - \frac{144}{125}X^4 + o(X^4) \right]$$

En déduire l'expression approchée $\vec{B}_h(z)$ au voisinage de $z = 0$.

Dans quelle zone située sur l'axe Oz , peut-on considérer que la variation relative de la norme du champ magnétique est inférieure à 2%? Préciser la valeur numérique de cette norme sachant que $N = 50$ spires et $I = 4$ A.

5. Le fil conducteur utilisé est du cuivre de conductivité $\gamma = 6.10^7$ S.m⁻¹ avec une section carrée de côté $a = 2$ mm. Calculer la longueur totale de fil utilisé dans les bobines de Helmholtz, la résistance électrique de ce fil ainsi que la puissance dissipée par effet JOULE avec les valeurs numériques de la question 4. On rappelle que la résistance d'un fil de conductivité γ , de longueur ℓ et de section S est donnée par $R = \frac{\ell}{\gamma S}$.

6. On s'intéresse maintenant à l'expression de \vec{B}_h au voisinage de l'axe Oz (mais pas sur l'axe). Un développement limité des deux composantes B_{hz} et B_{hr} s'écrit :

$$B_{hz}(r, z) = b_0(z) + r b_1(z) + r^2 b_2(z) + o(r^2) \quad \text{et} \quad B_{hr}(r, z) = c_0(z) + r c_1(z) + o(r)$$

On se place dans la région au voisinage de O , de sorte que l'expression approchée de $B_h(z)$ (sur l'axe Oz) déterminée à la question 4. soit valable.

Que valent les fonctions $b_0(z)$ et $c_0(z)$?

En utilisant les équations de Maxwell, montrer que $b_1(z) = 0$, $c_1(z) = -\frac{1}{2} \frac{db_0}{dz}(z)$ et $b_2(z) = -\frac{1}{4} \frac{d^2 b_0}{dz^2}(z)$.

7. Applications numériques. On reprend les données numériques de la question 4. en y ajoutant $r = 1$ cm. Calculer $B_{hr}(r, 0)$ et $B_{hr}(r, z = 1$ cm). Conclure.

Partie II – Mesure des caractéristiques d’une boussole

Une boussole est formée d’un aimant permanent, solide en forme d’aiguille équivalente à un petit dipôle magnétique \vec{m} de norme constante m , la direction du vecteur \vec{m} étant indiquée sur la Figure 3. Sur cette figure, le vecteur \vec{m} a été volontairement placé à côté de la boussole pour plus de lisibilité. En réalité on le placera au centre de la boussole.

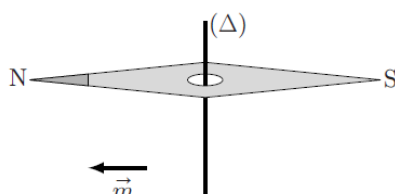


Figure 3

Cette aiguille aimantée peut librement tourner autour d’un axe (Δ) formant une liaison pivot à faible frottement.

Les interactions d’un dipôle magnétique rigide de moment dipolaire \vec{m} soumis à un champ magnétique extérieur \vec{B} sont décrites par l’énergie potentielle $E_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ et par le couple des actions électromagnétiques $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$.

8. La boussole est placée en O dans le dispositif des bobines de Helmholtz étudié dans la partie I., l’axe (Δ) étant confondu avec l’axe Ox de la figure 2. Quelle est la position d’équilibre stable de la boussole ?
9. On note J le moment d’inertie de l’aiguille aimantée relativement à son axe de rotation (Δ) . Légèrement écartée de sa position d’équilibre stable, l’aiguille aimantée oscille avec une période τ_{osc} . Déterminer la relation entre τ_{osc} , J , m , N et B_0 .
10. La valeur mesurée de la période des petites oscillations de l’aiguille aimantée est $\tau_{\text{osc}} = 0,30$ s avec $N = 50$ spires, $I = 4$ A et $R = 15$ cm. Déterminer l’unité et calculer la valeur numérique du rapport $\kappa = m/J$ pour cette boussole.

Partie III. – Principe du moteur synchrone

On retire les bobines de Helmholtz et on place la boussole de la partie précédente dans un nouveau champ magnétique $\vec{B}(O, t)$ défini par :

$$\vec{B}(O, t) = B_0 \left[\cos \left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4} \right) \vec{e}_z + \cos \left(\omega_0 t + \frac{\pi}{4} \right) \vec{e}_y \right]$$

où B_0 est une constante et où O correspond au centre de la boussole, cette dernière pouvant librement tourner autour de l’axe (Ox) .

11. Montrer que la norme de $\vec{B}(O, t)$ est constante. Expliciter l’angle que fait le vecteur $\vec{B}(O, t)$ avec \vec{e}_y et conclure sur la caractéristique du champ magnétique ainsi produit en O . Proposer un montage qui permettrait de générer un tel champ magnétique.

On donne à l’aiguille un mouvement de rotation autour de (Δ) avec une vitesse angulaire ω , de sorte que l’angle $\beta(t) = \widehat{(\vec{e}_y, \vec{m})}$ s’écrive $\beta(t) = \omega t + \frac{\pi}{4} - \alpha$ à l’instant t , avec $\alpha \in]-\pi, \pi]$.

12. a) Calculer la valeur du couple $\vec{\Gamma}(t)$ exercé par le champ magnétique sur la boussole.
 b) À quelle condition sur ω sa valeur moyenne au cours du temps $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ est-elle non nulle ? Lorsque cette condition est réalisée, donner l'expression de $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ en fonction de α , B_0 et m .
- On suppose que la condition sur ω est réalisée dans la suite du problème. Comme le champ magnétique tourne à une fréquence élevée, on admettra que seule la valeur moyenne $\langle \vec{\Gamma} \rangle$ du couple intervient pour étudier la rotation de la boussole.
- c) En déduire pour quelles valeurs de α ce dispositif fonctionne en moteur, c'est à dire lorsque l'action du champ magnétique est d'entraîner une rotation de l'aiguille dans le même sens.
13. En pratique, la constance de la vitesse angulaire ω de l'aiguille est assurée par les frottements sur son axe de rotation (Ox). Ces frottements solides créent un couple résistant $\vec{\Gamma}_r$ constant, dont on supposera la norme égale à $\Gamma_r = \frac{mB_0}{2}$, qui contrebalance le couple des actions électromagnétiques.

- a) Représenter $\langle \vec{\Gamma} \rangle \cdot \vec{e}_x$ en fonction de α , pour α variant dans la zone où le dispositif fonctionne en moteur.

Faire figurer les deux points de fonctionnement possibles sur ce schéma, qui assurent que la vitesse angulaire ω de la boussole reste constante en régime permanent. Préciser les valeurs α_1 et α_2 correspondantes.

- b) Un expérimentateur curieux freine la rotation de l'aiguille à l'aide d'un stylo pendant une fraction de seconde, puis laisse le système évoluer à nouveau sous l'effet du couple électromagnétique moyen et des frottements. Montrer que seule une des deux valeurs de α précédentes permet à la boussole de reprendre sa rotation à la vitesse angulaire ω_0 à la suite de cette perturbation. *On dit que le fonctionnement moteur est stable dans ce cas.*

Partie IV – Pôles géographiques et magnétiques

Données numériques

Champ magnétique terrestre à l'équateur $B_E = 3,0 \times 10^{-5}$ T
 Rayon terrestre $R_T = 6,4 \times 10^3$ km

*Les pôles géographiques sont assez proches des pôles magnétiques. Dans tout ce qui suit, on pourra confondre les deux axes reliant les pôles opposés de chaque type, c'est à dire que la **déclinaison magnétique** sera supposée négligeable. La recherche des pôles magnétiques s'est d'abord appuyée sur la mesure du champ magnétique terrestre (ou champ géomagnétique), et en particulier de sa direction. L'intensité croissante du champ géomagnétique à l'approche des pôles contribue enfin à expliquer un phénomène optique spectaculaire : les aurores polaires.*

Coordonnées sphériques et géographiques

On notera ($Oxyz$) les axes cartésiens associés à la base orthonormée et directe $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Les coordonnées sphériques d'un point P sont notées (r, θ, φ) avec la base locale associée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, cf. fig. 4 à gauche. On note aussi φ (longitude) et λ la latitude d'un point P de la surface terrestre ; le point A est situé sur l'équateur dans le méridien origine ($\varphi = 0$); celui-ci passe par l'observatoire de Greenwich G , cf. fig. 4 à droite.

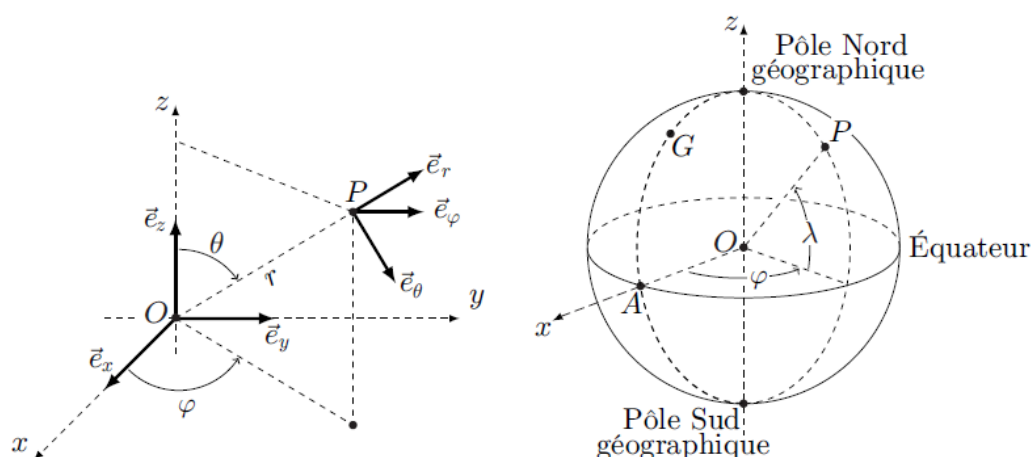


Figure 4 Coordonnée sphériques et géographiques

Donnée relative à un dipôle magnétique

Le champ magnétique créé par un dipôle de moment dipolaire \vec{M} placé à l'origine O des coordonnées est donné au point P par :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{R}(\vec{M} \cdot \vec{R}) - R^2 \vec{M}}{R^5} \quad \text{où } \vec{R} = \overrightarrow{OP} \text{ et } R = \|\vec{R}\|$$

14. Pourquoi une boussole à l'équilibre indique-t-elle le nord ? Cet équilibre est-il stable ?

On étudie un modèle de champ géomagnétique créé par un dipôle magnétique $\vec{M} = M_0 \vec{e}_z$ disposé au centre O de la Terre (assimilée à une sphère de rayon R_T), l'axe (Oz) étant l'axe polaire géographique dirigé du pôle sud de cet axe vers son pôle nord (cf. fig. 4). On rappelle d'une part qu'un point de la surface est caractérisé par ses coordonnées géographiques φ (longitude) et $\lambda = \pi/2 - \theta$ (latitude) et d'autre part qu'à l'équateur le champ magnétique terrestre est horizontal, dirigé vers le pôle nord géographique et y a pour intensité B_E .

15. Exprimer, en un point de la surface de la Terre et en coordonnées sphériques, le champ géomagnétique en fonction de μ_0 , M_0 et R_T .
16. Préciser le signe de M_0 puis estimer sa valeur numérique. Quelles sont la direction et l'intensité du champ géomagnétique aux pôles magnétiques nord et sud ?

En un point P de la surface terrestre, on appelle nord magnétique local la direction \vec{e}_N du champ géomagnétique, projeté dans le plan horizontal, et **inclinaison magnétique** l'angle I formé par \vec{B} avec le nord magnétique local ; l'inclinaison magnétique est positive si \vec{B} est dirigé vers le haut (vers le ciel) et négative s'il est dirigé vers le bas (vers le sol).

17. Dans l'hémisphère nord, quel est le signe de I ? Calculer $\tan(I)$ en fonction de la latitude λ puis tracer l'allure de la courbe donnant I en fonction de λ pour toutes les valeurs de λ du pôle sud au pôle nord. Pourquoi lisait-on parfois que les boussoles "s'affolent à proximité des pôles" ? Peut-on déterminer, au moyen d'une boussole, si on se trouve dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud ?

FIN DU DEVOIR