Corrigé du DM n°11

1 L'expérience de Stern et Gerlach (d'après Mines-Ponts PC 2008)

1. $$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} \overset{AN}{=} 1{,}7.10^3 \text{ m.s}^{-1}}$$

   Ainsi, $v_0 \ll c$ et les atomes ne sont pas relativistes. On peut donc appliquer la mécanique newtonienne pour étudier leur mouvement.

2. L'énergie potentielle d'un dipôle dans le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ s'écrit $E_p = -\overrightarrow{\mathcal{M}}.\overrightarrow{B} = -\overrightarrow{\mathcal{M}}.(az\,\overrightarrow{e_z}) = -\mathcal{M}_z\,az$. La force associée s'écrit :
$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,E_p = \mathcal{M}_z a\,\overrightarrow{e_z}}$$
qui est une façon valable de calculer la force car le vecteur moment magnétique $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ est constant, toujours dirigé selon $\overrightarrow{e_z}$.

   Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un atome s'écrit, en négligeant la force de pesanteur :
$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z a\,\overrightarrow{e_z}$$
soit en projection sur la base cartésienne :
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathcal{M}_z a}{m}$$
   Les atomes entrent dans la zone où règne le champ magnétique au point O avec une vitesse $v_0\,\overrightarrow{e_x}$, donc les équations du mouvement s'intègrent en :
$$x(t) = v_0 t \quad ; \quad y(t) = 0 \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m}t^2$$

   Le mouvement se fait dans le plan Oxz et la trajectoire s'obtient en éliminant le temps entre $x(t)$ et $z(t)$:
$$\boxed{z = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m}t^2 = \frac{\mathcal{M}_z a}{2m}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{\mathcal{M}_z a}{4E_c}x^2}$$

3. Les atomes sortent de la région où règne le champ magnétique à la côte $z(\ell) = \mathcal{M}_z a\ell^2/(4E_c)$, et la pente de leur trajectoire par rapport à l'axe x vaut $(dz/dx)(\ell) = \mathcal{M}_z a\ell/(2E_c)$.

   Leur trajectoire est ensuite rectiligne, de pente égale à la pente précédente. Par conséquent, on peut écrire :
$$\frac{z_0 - z(\ell)}{D} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(\ell) \iff z_0 = z(\ell) + D\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(\ell)$$
et donc :
$$\boxed{z_0 = \frac{\mathcal{M}_z a\ell^2}{4E_c} + D\,\frac{\mathcal{M}_z a\ell}{2E_c} = \frac{\mathcal{M}_z a\ell}{2E_c}\left(D + \frac{\ell}{2}\right)}$$

4. Les deux taches correspondent à deux valeurs opposées de z_0. Dans l'expression précédente, toutes les grandeurs sont positives sauf $\mathcal{M}_z$, dont le signe dépend du sens du vecteur $\overrightarrow{\mathcal{M}}$ par rapport à l'axe z. Par conséquent la projection selon $\overrightarrow{e_z}$ du moment magnétique du lithium ne peut prendre que deux valeurs opposées $\pm\mathcal{M}$. Le moment magnétique *est donc quantifié*.

5. De la relation
$$z_0 = \frac{\mathcal{M}_z a\ell}{2E_c}\left(D + \frac{\ell}{2}\right)$$
on déduit
$$\boxed{\mathcal{M}_z = \frac{2E_c z_0}{a\ell(D + \ell/2)} = 0{,}955.10^{-23}\text{A.m}^2}$$

6. Aux deux valeurs possibles de M_z correspondent deux valeurs possibles de S_z, qui valent numériquement :

$$S_z = \pm\, 0{,}5\hbar$$

On trouve donc que le spin de l'électron vaut donc $\pm\dfrac{\hbar}{2}$.

2 Mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre. D'après Centrale TSI

1. On a $\overrightarrow{r} = r\,\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{m_T} = -\,m_T\,\overrightarrow{e_z}$. Il faut projeter $\overrightarrow{e_z}$ sur la base sphérique :

$$\overrightarrow{e_z} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$$

d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{B} = -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi\, r^3}\,\left(3(\overrightarrow{e_z}.\overrightarrow{e_r})\,\overrightarrow{e_r} - \overrightarrow{e_z}\,\right) = -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi\, r^3}\,\left(2\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\,\right)}$$

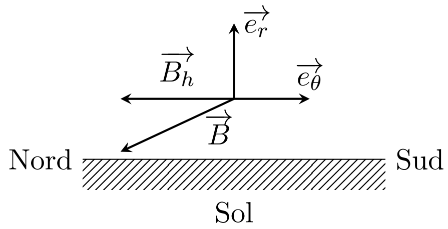
2. À Châtenay-Malabry, $r = R_T + h$, la latitude est $\lambda = 48{,}75°$ donc $\theta = 90 - \lambda = 41{,}25°$ et $\varphi = 2{,}26°$ (c'est la longitude). On a :

$$\|\overrightarrow{B}\| = \frac{\mu_0 m_T}{4\pi(R_T+h)^3}\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2(\theta)}$$

d'où :

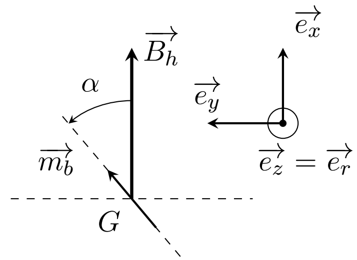
$$\boxed{m_T = \frac{4\pi(R_T+h)^3\,\|\overrightarrow{B}\|}{\mu_0\,\sqrt{3\cos^2\theta + 1}} \overset{\text{AN}}{=} 7{,}5\times 10^{22}\ \text{A.m}^2}$$

3. Voir le cours pour le tracé des lignes de champ.
4. Localement au voisinage de la surface terrestre (sol), la verticale est selon le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ et l'horizontale selon le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$, comme indiqué sur la figure ci-dessous :



Il faut faire attention au fait que, dans l'hémisphère nord $\theta_P \in [0, \pi/2]$, donc $\cos(\theta_P) > 0$ et $\sin(\theta_P) > 0$, ce qui conduit à deux composantes $B_r < 0$ et $B_\theta < 0$. Ainsi, la composante horizontale B_h du champ magnétique (que l'on prendra positive $B_h > 0$) est égale à $-\,B_\theta$ et elle est bien dirigée vers le nord. De plus, le champ magnétique local est dirigé vers le sol.

Le schéma ci-dessous indique la situation de la boussole vue du dessus. Celle-ci tourne autour de l'axe vertical Gz passant par son barycentre G, l'angle de rotation étant α. On définit un repère $(G, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, de sorte que $\overrightarrow{B_h} = B_h\,\overrightarrow{u_x}$, plus adapté à l'étude du mouvement de la boussole.



L'équilibre de la boussole correspond au cas où le moment magnétique est aligné avec le champ magnétique. Dans le cas d'une boussole avec un axe de rotation vertical, il faut que celle-ci soit alignée avec la composante horizontale $\overrightarrow{B_h}$.

Pour étudier la stabilité de l'équilibre, il est plus simple d'utiliser l'énergie potentielle magnétique du dipôle :

$$E_p = -\overrightarrow{m_b}.\overrightarrow{B} = -\,\overrightarrow{m_b}.\overrightarrow{B_h} = -\,m_b B_h \cos\alpha$$

La position d'équilibre stable correspond à un minimum de E_p ce qui donne $\alpha = 0$.

5. On applique le théorème du moment cinétique à la boussole. La boussole tourne autour d'un axe vertical Gz passant par son barycentre G. Son moment cinétique est donc $J\dot{\alpha}\,\overrightarrow{e_z}$. On obtient :

$$J\ddot{\alpha}\,\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{m_b} \wedge \overrightarrow{B} + \underbrace{\overrightarrow{M_G}(\text{Poids})}_{=\overrightarrow{0}} + \underbrace{\overrightarrow{M_G}(\text{Pivot})}_{\perp \overrightarrow{e_z}}$$

En projection sur $\overrightarrow{e_z}$, on obtient :

$$\boxed{J\ddot{\alpha} = -\,m_b B_h \sin\alpha}$$

6. Pour de petites oscillations autour de la position d'équilibre stable $\alpha_{\text{éq}} = 0$, $\sin\alpha \approx \alpha$. On obtient un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega = \sqrt{m_b B_h / J}$, donc de période :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_b B_h}}}$$

7. On doit supposer que $B_e > B_h$. On obtient les deux périodes T_1 et T_2 en remplaçant dans le résultat de la question précédente B_h par $B_h + B_e$, puis par $B_e - B_h$. On obtient donc :

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_b(B_h + B_e)}} \quad \text{et} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_b(B_e - B_h)}}$$

d'où on tire que :

$$\boxed{B_h = B_e\,\frac{1 - (T_1/T_2)^2}{1 + (T_1/T_2)^2}}$$

Application numérique : $B_h \approx 25\ \mu$T.

3 Champ magnétique dans un supraconducteur. CCINP MP

1. L'équation de Maxwell - Ampère, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0\,\overrightarrow{j}$, conduit à l'équation aux dimensions (ou L représente une longueur) :

$$\frac{[B]}{L} = [\mu_0]\,[j] \Longrightarrow [B] = [\mu_0]\,L\,[j]$$

et donc :

$$\frac{[j]}{L} = [\Lambda]\,[B] = [\Lambda]\,[\mu_0]\,L\,[j]$$

d'où :

$$\boxed{[\Lambda] = \frac{1}{[\mu_0]\,L^2} = H^{-1}.m^{-1}}$$

2. Partons de l'équation de Maxwell - Ampère et appliquons-lui le rotationnel. l vient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}\right) = \mu_0\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{j} = \mu_0\Lambda\,\overrightarrow{B}$$

D'autre, part : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\overrightarrow{B} - \Delta\,\overrightarrow{B} = -\,\Delta\,\overrightarrow{B}$, et donc :

$$\Delta\,\overrightarrow{B} - \mu_0\Lambda\,\overrightarrow{B} = \overrightarrow{0}$$

d'où :

$$\boxed{\delta = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\Lambda}}} \tag{1}$$

qui est homogène à une longueur.

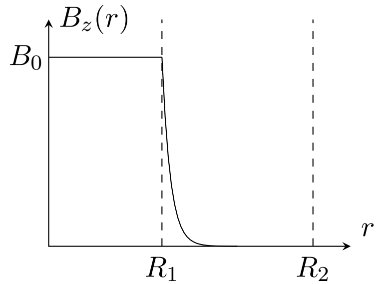
3. Le problème est invariant par toute translation le long de Oy et de Oz ce qui conduit à l'indépendance de $\overrightarrow{B}$ vis à vis des coordonnées y et z.

4. On projette l'équation (1) sur la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ pour obtenir les trois équations scalaires :

$$\frac{\mathrm{d}^2 B_x}{\mathrm{d}x^2} - \frac{B_x}{\delta^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}^2 B_y}{\mathrm{d}x^2} - \frac{B_y}{\delta^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^2 B_z}{\mathrm{d}x^2} - \frac{B_z}{\delta^2} = 0$$

dont les solutions sont :

$$B_x(x) = \lambda_x\, e^{-x/\delta} + \mu_x\, e^{x/\delta}$$
$$B_y(x) = \lambda_y\, e^{-x/\delta} + \mu_y\, e^{x/\delta}$$
$$B_y(x) = \lambda_z\, e^{-x/\delta} + \mu_z\, e^{x/\delta}$$



où λ_x,λ_y, λ_z, μ_x, μ_y et μ_z sont six constantes. Comme $\overrightarrow{B}$ ne doit pas diverger lorsque $x \to -\infty$, nous avons nécessairement : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$ et comme $B_x(0) = B_y(0) = 0$ et que $B_z(0) = B_0$, il vient : $\mu_x = \mu_y = 0$ et $\mu_z = B_0$. Cela conduit donc à :

$$\boxed{\forall\, x \leqslant 0,\ B_x(x) = B_y(x) = 0 \quad \text{et} \quad B_z(x) = B_0\, e^{x/\delta}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{j} = \frac{\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}}{\mu_0} = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}x}\,\overrightarrow{e_y} = -\frac{1}{\mu_0\delta}\,B_0\, e^{x/\delta}\,\overrightarrow{e_y}}$$

5. δ est une distance caractéristique d'atténuation de $\overrightarrow{B}$ et de $\overrightarrow{j}$ dans le supraconducteur. Au bout d'une distance de l'ordre de 5δ, nous pouvons considérer que $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{j}$ sont nuls. Cela signifie donc que $\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{j}$ s'annulent quasiment tout de suite dans le volume du supraconducteur et n'existent qu'au voisinage de la surface.
6. On peut supposer une décroissance exponentielle avec une constante de longueur δ, de la forme :