PROBLÈME 2 - Quelques aspects de l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière (d'après e3a-MP-2024).

I Généralités sur les ondes électromagnétiques dans le vide

Q1. Dans un milieu sans charges ni courants, la densité volumique de charge ρ et la densité volumique de courant $\vec{j}$ sont nulles. Ainsi, les équations de Maxwell sont :

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \quad \text{Maxwell-Gauss} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Faraday}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \quad \text{Maxwell-flux} \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad \text{Maxwell-Ampère}$$

Q2. On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{rot}}\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{B}}{\partial t}$$

Ensuite, d'après l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Or, $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{E} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\operatorname{div}\vec{E} - \vec{\Delta}\vec{E} = -\vec{\Delta}\vec{E}$ d'après l'équation de Maxwell-Gauss ainsi :

$$\boxed{\vec{\Delta}\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

À partir de l'équation de d'Alembert

$$\vec{\Delta}\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

on identifie la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}}$$

Q3. On considère la forme complexe du champ électrique correspondant à une onde progressive monochromatique se propageant dans la direction $+\vec{e_z}$:

$$\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t) = \underline{\vec{E_0}}\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz\right)\right]$$

D'après l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div}\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t) = 0$$

comme $\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t)$ ne dépend que de la coordonnée z :

$$\operatorname{div}\underline{\vec{E}}(\mathrm{M},t) = \frac{\partial\underline{E}_z}{\partial z} = -\mathrm{j}k\underline{E}_{0z}\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz\right)\right]$$

Ainsi, on a forcément $\underline{E}_{0z} = 0$: la composante longitudinale du champ électrique est nulle, autrement dit **le champ électrique est transverse.**
On réalise le même raisonnement sur le champ magnétique en considérant l'équation de Maxwell-flux et $\underline{\vec{B}}(\mathrm{M},t) = \underline{\vec{B_0}}\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz\right)\right]$: on obtient que **le champ magnétique est également transverse.**

Q4. Le champ électrique est polarisé rectilignement suivant $\overrightarrow{e_x}$: $\underline{\overrightarrow{E_0}} = \underline{E_0}\overrightarrow{e_x}$. Donc :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(\mathrm{M},t) = \underline{E_0}\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz\right)\right]\overrightarrow{e_x}$$

avec $\underline{E_0} = E_0 e^{\mathrm{j}\varphi}$:

$$\underline{\overrightarrow{E}}(\mathrm{M},t) = E_0\exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t - kz + \varphi\right)\right]\overrightarrow{e_x}$$

D'où, comme $\overrightarrow{E}(\mathrm{M},t) = \Re\left(\underline{\overrightarrow{E}}(\mathrm{M},t)\right)$:

$$\boxed{\overrightarrow{E}(\mathrm{M},t) = E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_x}}$$

Q5. On utilise l'équation de d'Alembert. On évalue d'une part :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\overrightarrow{e_x}$$

car $\overrightarrow{E}$ ne dépend que de z et n'a de composante que selon $\overrightarrow{e_x}$. Ainsi :

$$\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E} = -k^2 E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_x}$$

D'autre part :

$$\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_x}$$

Ainsi :

$$-k^2 E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right) = -\frac{1}{c^2}\omega^2 E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right) \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

Q6. On utilise l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\overrightarrow{e_y} = kE_0\sin\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_y}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t} = -kE_0\sin\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_y}$$

Soit :

$$\overrightarrow{B}(\mathrm{M},t) = \frac{k}{\omega}E_0\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_y} + \overrightarrow{B_c}$$

Le champ magnétique étant de moyenne nulle ; et comme $\omega/k = c$:

$$\boxed{\overrightarrow{B}(\mathrm{M},t) = \frac{E_0}{c}\cos\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_y}}$$

Q7. On a :

$$\overrightarrow{\Pi}(\mathrm{M},t) = \frac{\overrightarrow{E}(\mathrm{M},t)\wedge\overrightarrow{B}(\mathrm{M},t)}{\mu_0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\overrightarrow{\Pi}(\mathrm{M},t) = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right)\overrightarrow{e_z}}$$

Q8. On a

$$w(\mathrm{M},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\overrightarrow{E}(\mathrm{M},t)^2 + \frac{\overrightarrow{B}(\mathrm{M},t)^2}{2\mu_0}$$

Avec ce que l'on a montré :

$$w(\mathrm{M},t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right) + \frac{1}{2\mu_0 c^2}E_0^2\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right)$$

Comme $\varepsilon_0 = 1/\left(\mu_0 c^2\right)$:

$$\boxed{w(\mathrm{M},t) = \varepsilon_0 E_0^2\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right)}$$

Q9. Comme $\left\langle\cos^2\left(\omega t - kz + \varphi\right)\right\rangle_T = 1/2$:

$$\left\langle\overrightarrow{\Pi}(\mathrm{M},t)\right\rangle_T = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\overrightarrow{e_z} = c\frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2}\overrightarrow{e_z} = c\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\overrightarrow{e_z}$$

De même :

$$\left\langle w(\mathrm{M},t)\right\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2$$

Ainsi, on a bien montré que :

$$\boxed{\left\langle\overrightarrow{\Pi}(\mathrm{M},t)\right\rangle_T = c\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\overrightarrow{e_z} = c\left\langle w(\mathrm{M},t)\right\rangle\overrightarrow{e_z}}$$

III Pression de radiation

Q21. Le champ électromagnétique correspondant à l'onde réfléchie a la même polarisation que l'onde incidente, et se propage dans le sens des z décroissants : $\overrightarrow{E_r} = E_r \cos(\omega t + kz + \varphi)\,\overrightarrow{e_x}$. Ainsi :

$$\vec{E}\left(z=0^-\right) = \overrightarrow{E_i}\left(z=0^-\right) + \overrightarrow{E_r}\left(z=0^-\right) = E_0 \cos(\omega t + \varphi)\,\overrightarrow{e_x} + E_r \cos(\omega t + \varphi)\,\overrightarrow{e_x} = (E_0 + E_r)\cos(\omega t + \varphi)\,\overrightarrow{e_x}$$

Ensuite, comme le champ est nul dans le conducteur $\vec{E}\left(z=0^+\right) = 0$. Ainsi :

$$\overrightarrow{e_z} \wedge \left(\vec{E}\left(z=0^+\right) - \vec{E}\left(z=0^-\right)\right) = -(E_0 + E_r)\cos(\omega t + \varphi)\,\overrightarrow{e_y}$$

On utilise la relation de passage $\overrightarrow{e_z} \wedge \left(\vec{E}\left(z=0^+\right) - \vec{E}\left(z=0^-\right)\right) = \vec{0}$. Comme la relation est vraie quelque soit t :

$$E_r = -E_0$$

D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{E_r} = -E_0 \cos(\omega t + kz + \varphi)\,\overrightarrow{e_x}}$$

Q22. On procède comme à la question **Q6** en utilisant l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E_r} = \frac{\partial E_{rx}}{\partial z}\overrightarrow{e_y} = kE_0 \sin(\omega t + kz + \varphi)\,\overrightarrow{e_y}$$

Ainsi :

$$\frac{\partial \overrightarrow{B_r}}{\partial t} = -kE_0 \sin(\omega t + kz + \varphi)\,\overrightarrow{e_y}$$

Le champ magnétique réfléchi étant de moyenne nulle également ; et on utilise $\omega/k = c$:

$$\boxed{\overrightarrow{B_r} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t + kz + \varphi)\,\overrightarrow{e_y}}$$

Q23. Par ailleurs :

$$\vec{B_i} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz + \varphi)\,\vec{e_y}$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{B}\left(z=0^-\right) = \vec{B_i}\left(z=0^-\right) + \vec{B_r}\left(z=0^-\right) = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t + \varphi)\,\vec{e_y}}$$

Ensuite, comme le champ est nul dans le conducteur $\vec{B}\left(z=0^+\right) = 0$. On utilise la relation de passage :

$$\mu_0\vec{j_s} = \vec{e_z} \wedge \left(\vec{B}\left(z=0^+\right) - \vec{B}\left(z=0^-\right)\right) = \vec{e_z} \wedge \left(-\frac{2E_0}{c}\cos(\omega t+\varphi)\,\vec{e_y}\right) = \frac{2E_0}{c}\cos(\omega t+\varphi)\,\vec{e_x}$$

Soit :

$$\boxed{\vec{j_s} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t+\varphi)\,\vec{e_x}}$$

Q24. La force de Laplace par unité de surface est d'après l'énoncé :

$$\vec{f_s} = \frac{2E_0}{\mu_0 c}\cos(\omega t+\varphi)\,\vec{e_x} \wedge \left(\frac{E_0}{c}\cos(\omega t+\varphi)\,\vec{e_y}\right) = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2}\cos^2(\omega t+\varphi)\,\vec{e_z}$$

La force de Laplace sur une surface S est $\vec{f_s}S$; et comme $\varepsilon_0 = 1/\left(\mu_0 c^2\right)$:

$$\boxed{\vec{F_L} = 2\varepsilon_0 S E_0^2 \cos^2(\omega t+\varphi)\,\vec{e_z}}$$

Q25. La moyenne sur une périod de cette force est, comme $\left\langle\cos^2(\omega t+\varphi)\right\rangle_T = 1/2$: :

$$\boxed{\left\langle\vec{F_L}\right\rangle_T = \varepsilon_0 S E_0^2 \vec{e_z}}$$

La pression de radiation est :

$$p = \frac{\left\langle\vec{F_L}\right\rangle_T \cdot \vec{e_z}}{S} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p = \varepsilon_0 E_0^2}$$

Q26. D'après la **Q9**, on a $c\varepsilon_0 E_0^2/2 = I$ ainsi :

$$\boxed{p = \frac{2I}{c}}$$

Application numérique :
- pour $I_1 = 1\ \mathrm{kW\cdot m^{-2}}$: $p = 6{,}7\times10^{-6}$ Pa ;
- pour $I_1 = 1\ \mathrm{GW\cdot m^{-2}}$: $p = 6{,}7$ Pa.

Q27. Entre t et $t+\mathrm{d}t$, les photons contenus à t dans le cyclindre de surface S et de longueur $c\mathrm{d}t$ vont frapper la surface S. Ils sont au nombre de $n_\gamma^* S c\mathrm{d}t$, leur énergie est :

$$n_\gamma^* S c\mathrm{d}t \times E_\gamma$$

Cette énergie est également $IS\mathrm{d}t$ donc :

$$n_\gamma^* S c\mathrm{d}t E_\gamma = IS\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{n_\gamma^* = \frac{I}{cE_\gamma}}$$

Application numérique : $n_\gamma^* = 1{,}0\times10^{19}$ photons $\cdot\,\mathrm{m^{-3}}$.

Q28. La quantité de mouvement d'un photon est :

$$\vec{p_\gamma} = \hbar\vec{k} = \hbar\frac{2\pi}{\lambda}\vec{e_z} = \frac{h}{\lambda}\vec{e_z}$$

Comme $E_\gamma = hc/\lambda$, on a :

$$\boxed{\vec{p_\gamma} = \frac{E_\gamma}{c}\vec{e_z}}$$

Q29. Lorsqu'il rebondit, sa quantité de mouvement passe de $\vec{p_\gamma}$ à $-\vec{p_\gamma}$, la variation de quantité de mouvement du photon est :

$$\boxed{\Delta\vec{p_\gamma} = -\frac{2E_\gamma}{c}\vec{e_z}}$$

Q30. L'ensemble des photons contenus dans le cylindre de surface S et de largeur $c dt$ rebondissent, la variation de quantité de mouvement totale est :

$$\Delta \overrightarrow{p_{\mathrm{dt}}} = -n_\gamma^* S c \mathrm{d}t \frac{2E_\gamma}{c} \overrightarrow{e_z} \qquad \text{soit, d'après } \mathbf{Q27} \qquad \boxed{\Delta \overrightarrow{p_{\mathrm{dt}}} = -\frac{2I}{c} S \mathrm{d}t \overrightarrow{e_z}}$$

Q31. La force exercée par les photons sur la plaque est l'opposée de la force exercée par la plaque sur les photons, cette dernière étant $\Delta \overrightarrow{p_{\mathrm{dt}}}/\mathrm{d}t$ d'après le principe fondamental de la dynamique. Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \frac{2I}{c} S \overrightarrow{e_z}}$$

On retrouve, en identifiant p à partir de $\overrightarrow{F} = pS\overrightarrow{e_z}$:

$$\boxed{p = \frac{2I}{c}}$$

IV Notion de force pondéromotrice

Q32. La force subie par l'électron est de norme $\left\|\overrightarrow{F_e}\right\| = eE_0$. Son poids est de norme $m_e g$. Pour négliger le poids de l'électron, il faut que :

$$\boxed{E_0 \gg \frac{m_e g}{e} = 5{,}6 \times 10^{-11}\ \mathrm{V \cdot m^{-1}}}$$

Q33. On a :

$$\left\langle \overrightarrow{F} \right\rangle_T = \langle -eE_m(x)\cos(\omega t)\rangle_T \overrightarrow{e_x} = -eE_m(x)\langle \cos(\omega t)\rangle_T \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{0}$$

La force est bien de moyenne nulle.

Q34. On étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel du laboratoire galiléen. Le poids est négligeable, la seule force s'exerçant sur l'électron est $\overrightarrow{F} = -eE_m(x)\cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$. D'après le PFD appliqué à l'électron :

$$m_e \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -eE_0 \cos(\omega t)\overrightarrow{e_x}$$

On note $v = \dot{x}$ la composante x de la vitesse. On projette le PFD sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$m_e \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -eE_0\cos(\omega t)$$

En RSF, on considère $\underline{v}(t) = V_m \exp\left[\mathrm{j}\left(\omega t + \varphi\right)\right] = \underline{V}_m \exp\left(\mathrm{j}\omega t\right)$. Ainsi :

$$\mathrm{j}\omega m_e \underline{V}_m = -eE_0 \qquad \text{donc} \qquad \underline{V}_m = -\frac{eE_0}{\mathrm{j}\omega m_e} = \mathrm{j}\frac{eE_0}{m_e \omega}$$

L'amplitude de $v(t)$ est $|\underline{V}_m|$ et la phase est $\arg\left(\underline{V}_m\right)$:

$$\boxed{V_m = \frac{eE_0}{m_e\omega}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\varphi_v = \frac{\pi}{2}}$$

Q35. $\underline{V}_m = \mathrm{j}\omega \underline{X}_m$ donc :

$$\underline{X}_m = \frac{eE_0}{m_e\omega^2}$$

Ainsi :

$$\boxed{X_m = |\underline{X}_m| = \frac{eE_0}{m_e\omega^2}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\varphi_x = 0}$$

La position de l'électron et le champ électrique sont en phase.

Q36. Le champ électrique s'exprime en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ dans les unités du système international, x en mètres donc α **s'exprime en** $\mathrm{V \cdot m^{-2}}$ **dans les unités S.I.**

Ensuite :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E_m^2\right) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\left(E_0 + \alpha x\right)^2\right) = 2\alpha\left(E_0 + \alpha x\right)\overrightarrow{e_x}$$

Le gradient est dans la direction $\overrightarrow{e_x}$ (il indique la zone de champ électrique fort). Dans la limite où $|\alpha x| \ll E_0$:

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E_m^2\right) = 2\alpha E_0 \overrightarrow{e_x}}$$

Q37. À gauche, la situation où $x = X_m$: le champ électrique ressenti est vers la droite (car en phase avec la position), donc la force vers la gauche. À droite, la situation où $x = -X_m$: la force vers la droite par le même argument, d'amplitude moindre car $\left\|\vec{E}\left(X_m\right)\right\| > \left\|\vec{E}\left(-X_m\right)\right\|$.

La somme de ces deux forces est vers la gauche : la force moyenne est donc non nulle est orientée dans la direction $-\vec{e_x}$.

Q38. On exprime la force ressentie par l'électron :

$$\vec{F} = -eE_m(x)\vec{e_x} = -e\left(E_0\cos\left(\omega t\right) + \alpha\frac{eE_0}{m_e\omega^2}\cos^2\left(\omega t\right)\right)\vec{e_x}$$

Ainsi :

$$\boxed{\left\langle\vec{F}\right\rangle_T = -\alpha\frac{e^2E_0}{2m_e\omega^2}\vec{e_x}}$$

Q39. On substitue $\alpha E_0\vec{e_x}$ par $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E_m^2\right)/2$ dans l'expression ci-dessus (d'après **Q36**). On a bien :

$$\boxed{\vec{f_p} = -\frac{e^2}{4m_e\omega^2}\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(E_m^2\right)/2}$$

Q40. Le travail de la force motrice est, d'après le TEC, en négligeant toute autre force :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{f_p}\right) = \Delta E_c$$

avec $\Delta E_c = 2$ GeV et $W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{f_p}\right) = f_pD$ ($D = 2$ cm). Ainsi :

$$\boxed{f_p = \frac{\Delta E_c}{D} = 1{,}6\times10^{-8}\ \mathrm{N}}$$

Q41. L'intensité est le rapport de la puissance du faisceau sur sa surface :

$$I = \frac{4P}{\pi d^2}$$

où $d = 0{,}1$ mm est le diamètre du faisceau. Or $I = \varepsilon_0 cE_0^2/2$ donc :

$$\boxed{E_0 = \sqrt{\frac{8P}{\pi d^2\varepsilon_0 c}} = 9{,}8\times10^{12}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\alpha = \sqrt{\frac{2m_e\omega^2f_p}{e^2E_0}} = 1{,}7\times10^{8}\ \mathrm{V\cdot m^{-2}}}$$

PROBLÈME 3 - Communication avec un satellite relais (d'après CCS-MP-2022).

Q 16. Rappeler les équations de Maxwell dans le vide et établir l'équation de propagation du champ électrique dans le vide, en l'absence de charge et de courant.

MG $\mathrm{div}(\vec{E}) = 0$ car $\rho = 0$

MT $\mathrm{div}(\vec{B}) = 0$

MA $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ car $\vec{j} = \vec{0}$

MF $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

or $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \vec{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

$\vec{\mathrm{rot}}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = -\mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

d'où $\boxed{\Delta\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$

Q 17. Établir la relation de dispersion de l'onde de champ électrique complexe $\underline{\vec{E}}(M,t)$ dans le vide. Le vide est-il un milieu dispersif ?

$\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - kx)}\, \vec{u_y}$

donc $\Delta\underline{\vec{E}} = \dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial x^2} = -k^2 \underline{\vec{E}}$

de plus, $\dfrac{\partial^2 \underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}}$

L'équation d'onde devient alors $k^2 \underline{\vec{E}} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \underline{\vec{E}}$

soit $k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$ d'où $k = \pm\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\omega$

Ici a priori, $k > 0$ car on s'intéresse à une onde se propageant dans le sens des x croissants

donc $\boxed{k = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\omega \text{ est la relation de dispersion attendue.}}$

1/c

Q 18. Déterminer, en notation complexe, le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$ associé au champ électrique $\underline{\vec{E}}(M,t)$.

On a ici $\vec{E}$ qui est une Onde Plane Progressive Harmonique, on peut donc utiliser la relation de structure

$\underline{\vec{B}} = \dfrac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \dfrac{k}{\omega}\, \vec{u_x} \wedge E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u_y}$

$\boxed{\underline{\vec{B}} = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\, E_0\, e^{i(\omega t - kx)}\, \vec{u_z}}$

1/c

Q 19. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant ceux de la partie électrique.

Dans le vide, $\|\vec{B}\| = \dfrac{\|\vec{E}\|}{c}$ d'après la question précédente.

Comparons les composantes magnétiques et électriques de la force de Lorentz s'exerçant sur une particule de charge q

Comparons les composantes magnétiques et électriques de la force de Lorentz s'exerçant sur une particule de charge q

$$\frac{\|\vec{f}_{mag}\|}{\|\vec{f}_{elec}\|} = \frac{\|q\vec{v}\wedge\vec{B}\|}{\|q\vec{E}\|} \# \frac{\cancel{q}\,\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{B}\|}{\cancel{q}\,\|\vec{E}\|} \# \frac{\|\vec{v}\|}{c} \ll 1 \quad \text{car } \|\vec{v}\| \ll c$$

ordre de grandeur

(particules non relativistes)

Donc $\boxed{\|\vec{f}_{mag}\| \ll \|\vec{f}_{elec}\|}$

Q 20. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par $\frac{\partial \underline{\vec{v}}_e}{\partial t}$, déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe $\underline{\vec{v}}_e$ d'un électron, positionné en M à l'instant t, en fonction de m_e, e, ω et $\underline{\vec{E}}(M,t)$. De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_c$ d'un cation. Que peut-on dire de $\|\underline{\vec{v}}_c\|$ par rapport à $\|\underline{\vec{v}}_e\|$?

système $\{$électron$\}$
référentiel géocentrique galiléen
2ème loi de Newton

$$m_e\vec{a} = \sum \vec{f}_{ext} = \vec{f}_{elec} = -e\vec{E}$$

donc $m_e \frac{\partial \underline{\vec{v}}_e}{\partial t} = -e\underline{\vec{E}}$

or, en régime sinusoïdal forcé : $\frac{\partial \underline{\vec{v}}_e}{\partial t} = i\omega\,\underline{\vec{v}}_e$

D'où $m_e i\omega\,\underline{\vec{v}}_e = -e\underline{\vec{E}}$

$$\boxed{\underline{\vec{v}}_e = \frac{-e}{m_e i\omega}\underline{\vec{E}}}$$

Pour un cation de charge $+e$ et de masse m_c, la même démarche donne $\boxed{\underline{\vec{v}}_c = \frac{+e}{m_c i\omega}\underline{\vec{E}}}$

$m_c \gg m_e$ donne $\boxed{\|\underline{\vec{v}}_c\| \ll \|\underline{\vec{v}}_e\|}$

Q 21. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant $\vec{j}(M,t)$. En déduire, en utilisant les résultats précédents, que l'expression de la conductivité complexe du plasma notée $\underline{\gamma}$ s'écrit de façon approchée

$$\underline{\gamma} \simeq -i\frac{n_e e^2}{m_e\omega}.$$

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_{cations} = \rho_e\vec{v}_e + \rho_{ions}\vec{v}_{ions}$$

$= n_e$

$$= -n_e e\,\underline{\vec{v}}_e + n_c e\,\underline{\vec{v}}_c$$

$$= -n_e e\,(\underline{\vec{v}}_e - \underline{\vec{v}}_c) \simeq -n_e e\,\underline{\vec{v}}_e \quad \text{car } \|\underline{\vec{v}}_c\| \ll \|\underline{\vec{v}}_e\|$$

D'où $\boxed{\vec{\underline{j}} = \frac{+n_e e^2}{m_e i\omega}\vec{\underline{E}} = -i\frac{n_e e^2}{m\omega}\vec{\underline{E}}}$

$\underline{\gamma}$

Q 22. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

$$\langle p_v\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{\underline{j}}\cdot\vec{\underline{E}}^*\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{\gamma}\,\vec{\underline{E}}\,\vec{\underline{E}}^*\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\Big(\underbrace{\|\vec{\underline{E}}\|^2}_{\in\mathbb{R}} * \underline{\gamma}\Big) = 0$$

imaginaire pur

$\boxed{\langle p_v\rangle = 0}$

Aucune puissance n'est dissipée dans le plasma.

Cela est dû au fait que les charges vibrent en quadrature par rapport au champ électrique (comme dans une inductance ou une capacité).

Q 23. Établir l'équation de propagation du champ $\vec{E}(M,t)$ dans le plasma.

plasma neutre.

MG : $\mathrm{div}(\vec{\underline{E}}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$

MT : $\mathrm{div}(\vec{\underline{B}}) = 0$

MF : $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\underline{E}}) = -\frac{\partial\vec{\underline{B}}}{\partial t}$

MA : $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\underline{B}}) = \mu_0\underline{\gamma}\vec{\underline{E}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{\underline{E}}}{\partial t}$

$\vec{\mathrm{rot}}$(MF) : $\vec{\mathrm{rot}}(\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\underline{E}}) = \vec{\mathrm{grad}}(\cancel{\mathrm{div}\,\vec{\underline{E}}}) - \Delta\vec{\underline{E}}$ ($\mathrm{div}\,\vec{\underline{E}} = 0$)

$$\vec{\mathrm{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{\underline{B}}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\underline{B}} = -\mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\vec{\underline{E}}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{\underline{E}}}{\partial t^2}$$

D'où $\boxed{\Delta\vec{\underline{E}} = \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\vec{\underline{E}}}{\partial t} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{\underline{E}}}{\partial t^2}}$

Q 24. En déduire l'expression de $\underline{k}^2$ dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée ω_p dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi c, e, ε_0, m_e et n_e.

$$\vec{\underline{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - \underline{k}x)}\,\vec{u_y}$$

d'où $\Delta\vec{\underline{E}} = \frac{\partial^2\vec{\underline{E}}}{\partial x^2} = -\underline{k}^2\vec{\underline{E}}$

$\frac{\partial\vec{\underline{E}}}{\partial t} = i\omega\vec{\underline{E}}$ et $\frac{\partial^2\vec{\underline{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\vec{\underline{E}}$

L'équation d'onde de MCO devient alors

$$-\underline{k}^2 \cancel{\underline{\vec{E}}} = \mu_0 \underline{\gamma}\, i\omega \cancel{\underline{\vec{E}}} - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \cancel{\underline{\vec{E}}}$$

$\underline{\gamma} = -i \dfrac{n_e e^2}{m_e \omega}$

Donc $-\underline{k}^2 = \mu_0 \dfrac{n_e e^2}{m_e} - \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2$

soit $\underline{k}^2 = \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{1/c^2} \left(\omega^2 - \underbrace{\dfrac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \omega_p^2}\right)$ donc $\boxed{\underline{k}^2 = \dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\dfrac{n_e e^2}{m_e \varepsilon_0}}}$

Q 25. Expliciter l'expression de $\underline{k}$ et en déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$. On fera apparaître une épaisseur caractéristique δ_p que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de ω, ω_p et c.

ici $\omega < \omega_p$ donc $\underline{k}^2 < 0$ donc $\underline{k} = \pm i \dfrac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}$

donc $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i\left(\omega t \mp i \frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c} x\right)} \vec{u_y}$

$= E_0\, e^{\pm \frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c} x}\, e^{i\omega t}\, \vec{u_y}$

$\underline{k} = +i \dfrac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{\omega}$ mène donc à un champ $\underline{\vec{E}}$ qui diverge lorsque $x \to \infty$, ce qui est une solution non physiquement acceptable.

$\rightsquigarrow$ on garde donc $\boxed{\underline{k} = -i \dfrac{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}{c}}$

On déduit $\boxed{\vec{E} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{E}}) = E_0\, e^{-\frac{\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}}{c} x} \cos(\omega t)\, \vec{u_y}}$

(NB le signe de $\mathrm{Im}(\underline{k})$ était de plus imposé par l'énoncé : la justification n'était donc pas nécessaire)

$e^{-x/\delta}$ avec $\boxed{\delta = \dfrac{c}{\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}}$

(NB) onde stationnaire spatialement amortie $\Rightarrow$ "onde évanescente"

$\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i(\omega t - \underline{k} x)} \vec{u_y}$ étant une pseudo OPPH ($\underline{k} \in \mathbb{C}$), on peut utiliser la relation de structure dans $\mathbb{C}$:

$$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega} = \frac{-i/\delta\, \vec{u_x} \wedge E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u_y}}{\omega}$$

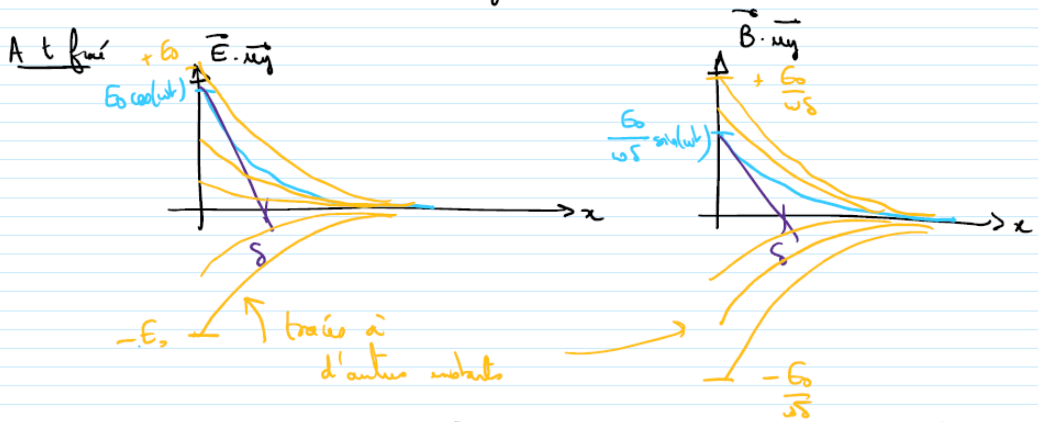
$$\underline{\vec{B}} = \underbrace{\frac{-i}{\omega\delta}}_{e^{-i\pi/2}} E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u_z} = \frac{E_0}{\omega\delta} e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - \pi/2)} \vec{u_z}$$

d'où $\vec{B} = \mathrm{Re}(\underline{\vec{B}}) = \dfrac{E_0}{\omega\delta} e^{-x/\delta} \cos(\omega t - \pi/2)\, \vec{u_z}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0}{\omega\delta} e^{-x/\delta} \sin(\omega t)\, \vec{u_z}}$$

Q 26. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\, e^{-x/\delta}\, \vec{u_y}$$



En un point donné, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vibrent sinusoïdalement, en quadrature.

Q 27. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue.

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*}{\mu_0}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{E_0 e^{-x/\delta} e^{i\omega t}\, \vec{u_y} \wedge \frac{E_0}{\omega\delta} e^{-x/\delta} e^{-i(\omega t - \pi/2)}\, \vec{u_z}}{\mu_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\underbrace{\left(\frac{E_0^2}{\mu_0\omega\delta} e^{-2x/\delta} \underbrace{e^{i\pi/2}}_{"i"} \vec{u_x}\right)}_{\text{imaginaire pur}} = \boxed{0 = \langle\vec{\Pi}\rangle}$$

Pas de déplacement de puissance dans le milieu (on retrouve le caractère stationnaire de l'onde évanescente).

Q 28. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de $\underline{k}$. En déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$, puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} > 0 \longrightarrow \underline{k} = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$$

On s'intéresse à une onde se propageant dans le sens des $x \nearrow$ alors on garde $k > 0$ (car $v_\varphi = \frac{\omega}{k} > 0$)

d'où $\boxed{\underline{k} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}}$

Donc $\underline{\vec{E}} = E_0\, e^{i\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c} x\right)}\, \vec{u_y}$

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} x\right) \vec{u_y}}$$

OPPH $\Rightarrow$ $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\omega c}\, \vec{u_x} \wedge E_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} x\right) \vec{u_y}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{E_0\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\omega c} \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} x\right) \vec{u_z}.}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\mu_0 \omega c} \cos^2\left(\omega t - \frac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c} x\right) \vec{u_x}$$

d'où $$\boxed{\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0\omega c}\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}\, \vec{u_x}}$$

Q 29. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_φ ainsi que celle de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_p, ω et c. Tracer v_g et v_φ en fonction de ω. Le milieu est-il dispersif ? Comparer ces vitesses à c et commenter.

$\boxed{v_\varphi \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{\omega c}{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}}$ dépend de ω $\rightarrow$ $\boxed{\text{milieu dispersif.}}$

$v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ or $k = \dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{c}$ donc $k^2c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$

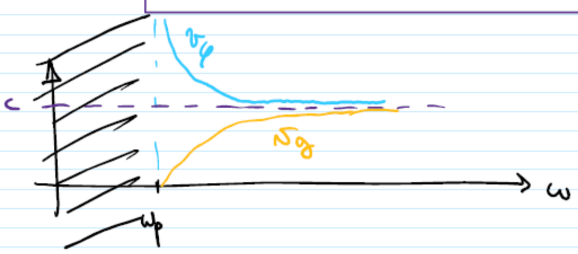
$\downarrow$ différencions.

$$\cancel{2} k\, dk\, c^2 = \cancel{2}\omega\, d\omega$$

d'où $$\frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega}c^2 = \frac{c^2}{v_\varphi}$$

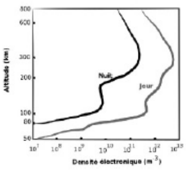
$$\boxed{v_g = \frac{c^2}{v_\varphi} = \frac{c\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}}{\omega}}$$

on a donc $\boxed{v_g v_\varphi = c^2 \quad \text{avec} \quad v_\varphi > c,\ v_g < c}$



v_φ étant la vitesse d'une OPPH, et celle-ci n'ayant pas de réalité physique (extensions temporelle et spatiale ∞), il n'est pas gênant d'avoir $v_\varphi > c$.
La vitesse de groupe, qui correspond à la vitesse d'un paquet d'onde, est bien inférieure à c.

Q 30. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence ?



- L'orbite géostationnaire est à une altitude de 36000 km (extrait article "Le Monde"). (et résultat classique d'exercice)

- or n_e dépend de l'altitude donc ω_p dépend de l'altitude.

Pour communiquer avec le satellite, il faut traverser la ionosphère $\forall$ altitude $h \leqslant 36000$ km

donc il faut que la pulsation ω de l'onde vérifie

$$\omega > \omega_p(h) \quad \forall h \leqslant 36000 \text{ km}.$$

soit
$$\boxed{\omega > \omega_p^{max} = \sqrt{\frac{n_e^{max} e^2}{m_e \varepsilon_0}}}$$

avec $n_{e,max} \# 0{,}8.10^{13}\ m^{-3}$ (300 km le jour sur figure 6)

__AN__
$$\boxed{\omega > 0{,}2.10^9 \text{ rad/s}}$$
$$\boxed{\text{soit } f > 0{,}03 \text{ GHz}.}$$

cohérent (radio AM # 100 kHz ne traverse pas ionosphère, FM # 100 MHz traverse)