

DS n°6 (CCINP-e3a)
 (Samedi 1 février 2025 – Durée 4 h)

PROBLEME 2 - Quelques aspects de l'interaction entre le champ électromagnétique et la matière.

Les notations et valeurs numériques des grandeurs utilisées dans ce problème sont résumées dans le tableau ci-dessous.

Grandeur	Notation	Valeur numérique
Célérité des ondes électromag. dans le vide	c	$3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Constante de Planck	h	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$
Permittivité du vide	ε_0	$8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Perméabilité du vide	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
Charge élémentaire	e	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Masse d'un électron	m_e	$9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$

On note j le nombre complexe de partie imaginaire positive vérifiant $j^2 = -1$. En régime sinusoïdal forcé de pulsation ω , on convient d'associer à toute grandeur sinusoïdale $a(t) = A \cos(\omega t + \varphi_a)$ deux grandeurs complexes :

- la première, notée $\underline{A} = A e^{j\varphi_a}$, appelée amplitude complexe associée à a ;
- la seconde, notée $\underline{a}(t) = A e^{j(\omega t + \varphi_a)} = \underline{A} e^{j\omega t}$, appelée grandeur sinusoïdale complexe associée à a .

Dans le cas où la grandeur sinusoïdale est un champ $a(M, t) = A \cos[\omega t + f(M) + \varphi_a]$, dépendant de la date t et de la position \overrightarrow{OM} d'un point M via une fonction f nulle lorsque M est confondu avec O , on note $\underline{a}(M, t) = \underline{A} e^{j[\omega t + f(M)]}$ la grandeur sinusoïdale complexe associée à a . À l'exception de j , les grandeurs complexes sont soulignées.

Les différentes parties de ce problème sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres. Néanmoins, des notions et notations utiles sont introduites au fil du sujet. Aussi est-il conseillé de lire et de résoudre les parties du problème dans l'ordre de présentation.

1 Généralités sur les ondes électromagnétiques dans le vide

On se place dans le vide, milieu supposé n'avoir ni charge ni courant. On introduit un repère cartésien orthonormé direct $(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Un point M quelconque de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) .

Q1. Citer les quatre équations de Maxwell vérifiées par les champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} dans ce milieu.

On rappelle que $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{\bullet}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{\bullet}) - \vec{\Delta} \vec{\bullet}$, où $\vec{\bullet}$ est un champ vectoriel et $\vec{\Delta}$ est l'opérateur laplacien vectoriel.

Q2. Obtenir l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ électrique \vec{E} . En déduire la relation entre c , ε_0 et μ_0 .

On considère une onde électromagnétique solution de l'équation de d'Alembert de type plane progressive monochromatique, de vecteur d'onde \vec{k} et de pulsation temporelle ω . On suppose qu'elle se propage dans la direction et le sens de \vec{e}_z .

Q3. Montrer que les champs électrique et magnétique de l'onde sont transverses à l'aide de la notation complexe.

On suppose le champ électrique \vec{E} de l'onde polarisé rectilignement selon \vec{e}_x . On note E_0 son amplitude et φ sa phase à l'origine du temps et de l'espace.

Q4. Donner l'expression du champ électrique réel de l'onde en un point M à l'instant de date t , noté $\vec{E}(M, t)$. On fera notamment apparaître E_0 , ω et k .

Q5. Établir la relation entre k et ω , appelée relation de dispersion.

Q6. Obtenir l'expression du champ magnétique réel de l'onde en un point M à l'instant de date t , noté $\vec{B}(M, t)$.

Q7. Exprimer le vecteur de Poynting de l'onde en un point M à l'instant de date t , noté $\vec{\Pi}(M, t)$.

Q8. Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point M à l'instant de date t , notée $w(M, t)$, en fonction de E_0 , ω , k , ε_0 , t et de z .

Q9. On note T la période temporelle de l'onde plane progressive monochromatique. Montrer que les valeurs moyennes temporelles de $\vec{\Pi}$ et de w vérifient $\langle \vec{\Pi} \rangle_T = c \langle w \rangle_T \vec{e}_z = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{e}_z$.

2 Pression de radiation

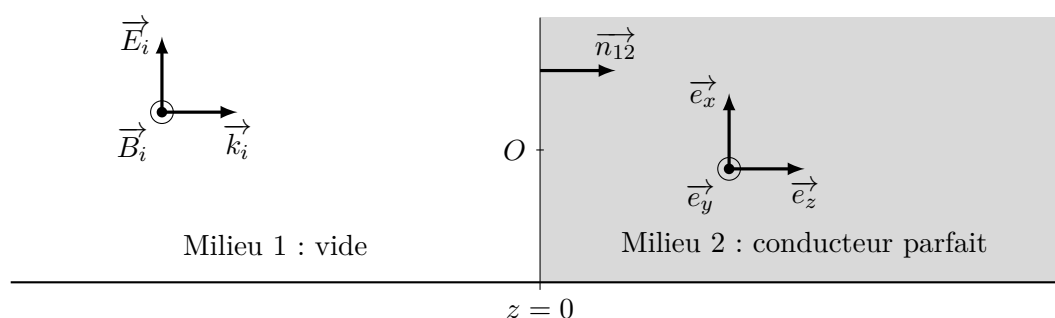


FIGURE 1 – Onde électromagnétique en incidence normale sur un conducteur parfait.

On considère la situation de la figure 1 où le demi-espace $z < 0$ est le vide et le demi-espace $z > 0$ est un conducteur parfait. Une onde incidente, identique à celle décrite dans les questions **Q4** à **Q6**, est réfléchiée sur la surface du conducteur. On notera respectivement \vec{k}_i , $\vec{E}_i(M, t)$ et $\vec{B}_i(M, t)$ le vecteur d'onde, le champ électrique et le champ magnétique de cette onde incidente en un point M à l'instant de date t . On donne les relations de passage utiles pour le problème. Entre deux milieux 1 et 2, on a :

$$\vec{n}_{12} \wedge (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{n}_{12} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \mu_0 \vec{j}_s$$

où \vec{n}_{12} est un vecteur unitaire orthogonal à l'interface, dirigé du milieu 1 vers le milieu 2, où les champs \vec{E}_1 et \vec{B}_1 (respectivement \vec{E}_2 et \vec{B}_2) sont les champs totaux dans le milieu 1 (respectivement dans le milieu 2) au voisinage de l'interface et où \vec{j}_s est le vecteur densité de

courant de surface. On rappelle que les champs électrique et magnétique sont nuls dans un conducteur parfait.

- Q21.** Déterminer l'expression du champ électrique réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$ en un point M à l'instant de date t . On supposera que l'onde électrique réfléchie conserve la même polarisation que l'onde incidente.
- Q22.** Déterminer l'expression du champ magnétique réfléchi $\vec{B}_r(M, t)$ en un point M à l'instant de date t .
- Q23.** Que vaut le champ magnétique total en $z = 0^-$ (dans le vide au voisinage du conducteur) ? En déduire l'expression du vecteur densité de courant de surface $\vec{j}_s(t)$ sur la surface du conducteur, à la date t .

On admet que $\vec{B}(z = 0, t) = \frac{1}{2} [\vec{B}(z = 0^-, t) + \vec{B}(z = 0^+, t)]$. En outre, en présence de courants surfaciques et d'un champ magnétique, la densité surfacique de la force de Laplace s'écrit $\vec{f}_s = \vec{j}_s \wedge \vec{B}$.

- Q24.** Exprimer la force de Laplace totale \vec{F}_L s'exerçant sur l'aire S de la surface du conducteur en fonction de ε_0 , E_0 , S , ω et de t .
- Q25.** Calculer la valeur moyenne de cette force sur une période temporelle T de l'onde. En déduire que l'on peut lui associer une pression p , dite pression de radiation, dont l'expression est $p = \varepsilon_0 E_0^2$.

On appelle intensité I du champ électromagnétique la norme de la valeur moyenne du vecteur de Poynting. On rappelle qu'en vertu de la relation démontrée dans la question **Q9**, on a $I = \frac{c\varepsilon_0 E_0^2}{2}$.

- Q26.** Calculer numériquement la pression de radiation pour la lumière venant du soleil (I_1 GW.m⁻²) et pour celle d'un laser de haute intensité ($I_2 = 1$ GW.m⁻²).

On veut désormais retrouver l'expression de la pression de radiation en décrivant la lumière de manière corpusculaire, en la modélisant par un ensemble de photons se déplaçant dans un faisceau cylindrique d'axe \vec{e}_z et de section S . On prendra une longueur d'onde λ de 600 nm et on appelle E_γ l'énergie d'un seul photon.

- Q27.** On note n_γ^* la densité volumique de photons dans le faisceau (on se place dans le cadre d'un modèle simple où cette densité est uniforme). Exprimer n_γ^* en fonction de E_γ , c et de I puis calculer sa valeur numérique dans le cas du laser d'intensité I_2 .
- Q28.** Exprimer la quantité de mouvement \vec{p}_γ d'un photon en fonction de son énergie E_γ .
- Q29.** Déterminer l'expression vectorielle de la variation $\Delta\vec{p}_\gamma$ de la quantité de mouvement d'un photon lors d'un rebond sur la surface métallique en fonction de E_γ et de c . On fait l'hypothèse d'un rebond élastique, c'est-à-dire sans perte d'énergie cinétique.
- Q30.** Exprimer la variation de quantité de mouvement $\Delta\vec{p}_{dt}$ de l'ensemble des photons qui rebondissent sur la surface métallique d'aire S pendant une durée infinitésimale dt en fonction de I , S , dt et de c .
- Q31.** En déduire la force exercée par les photons sur l'aire S pendant une durée dt et retrouver l'expression de la pression de radiation.

3 Notion de force pondéromotrice

Le principe de la force pondéromotrice est qu'un électron oscillant dans un champ électrique harmonique uniforme subit en moyenne, sur une période, une force électrique résultante nulle. En revanche, avec un champ non uniforme, la force moyenne résultante n'est pas nulle. C'est ce

qu'on appelle la force pondéromotrice. Celle-ci a de nombreuses applications, comme le piégeage ou l'accélération de particules chargées.

On considère un électron libre placé dans un champ électrique oscillant $\vec{E}(t) = \vec{E}_m \cos(\omega t)$ et on s'intéresse à son mouvement. On ne prend en compte que la seule composante électrique de la force de Lorentz. Pour simplifier, on considère un modèle à une dimension : $\vec{E}(x, t) = E_m(x) \cos(\omega t) \vec{e}_x$, le mouvement de l'électron étant lui aussi selon l'axe (Ox) . Tout d'abord, on considère $E_m(x) = E_0$ constant.

Q32. Obtenir une valeur numérique limite de E_0 permettant de négliger le poids de l'électron par rapport à la force de Lorentz électrique. On fera intervenir l'accélération de pesanteur g .

Q33. Vérifier que la force moyenne sur une période exercée par le champ électrique sur l'électron est nulle.

En régime sinusoïdal forcé établi, la vitesse de l'électron à la date t est de la forme $v(t)\vec{e}_x = V_m \cos(\omega t + \varphi_v) \vec{e}_x$.

Q34. Exprimer V_m en fonction de e , E_0 , m_e et de ω . Préciser la valeur du déphasage φ_v entre la vitesse et le champ électrique.

On note $x(t)\vec{e}_x = X_m \cos(\omega t + \varphi_x) \vec{e}_x$ le vecteur déplacement de l'électron.

Q35. Exprimer X_m en fonction de e , E_0 , m_e et de ω . Préciser la valeur du déphasage φ_x entre la position et le champ électrique.

On considère désormais un champ non uniforme en adoptant un modèle affine simple : $E_m(x) = E_0 + \alpha x$, où α et E_0 sont deux constantes positives.

Q36. Quelle est l'unité de α ? Dans quel sens est orienté $\overrightarrow{\text{grad}}(E_m^2)$? Donner son expression en fonction de E_0 et de α , en supposant que $|\alpha x| \ll E_0$.

On admet que, à l'échelle d'une période, le mouvement de l'électron autour de $x = 0$ reste le même que celui décrit dans la question **Q35**.

Q37. Représenter le champ électrique et la force subie par l'électron lorsque $x = X_m$ et lorsque $x = -X_m$, en utilisant le fait que la position et le champ électrique sont en phase. Dans quel sens est la résultante de ces deux forces ? Que peut-on en déduire quant au sens de la force pondéromotrice ?

Q38. Calculer la force pondéromotrice subie par l'électron, définie comme la force moyenne sur une période exercée par le champ électrique sur l'électron. On l'exprimera en fonction de e , m_e , ω , E_0 et de α .

On trouve généralement comme expression de la force pondéromotrice :

$$\vec{f}_p = -\frac{q^2}{4m_e\omega^2} \overrightarrow{\text{grad}}(E_m^2)$$

Q39. Vérifier, sur la situation simple de variation linéaire de l'amplitude du champ décrite ci-dessus et avec le résultat de la question **Q36**, que l'on retrouve bien le résultat de la question précédente.

On trouve sur une page Wikipedia à propos de l'accélération plasma, la phrase suivante : "The Texas Petawatt laser facility at the University of Texas at Austin accelerated electrons to 2 GeV over about 2 cm". Sa longueur d'onde est $\lambda = 632 \text{ nm}$.

Q40. Avec un modèle simple d'énergie cinétique initiale nulle et de force constante, évaluer la valeur de la force pondéromotrice nécessaire pour obtenir cette accélération.

- Q41.** On considère que la puissance du laser $P = 1 \text{ PW} = 1 \times 10^{15} \text{ W}$ est répartie sur un faisceau de diamètre de 0,1 mm. Estimer le champ moyen E_0 de ce laser et en déduire la valeur de α requise pour produire la force calculée à la question précédente. On pourra utiliser la relation démontrée dans la question **Q9**.

PROBLEME 3 - Communication avec un satellite relais.

Afin de lutter contre les cyberattaques, mais surtout de profiter d'un refroidissement optimal et "gratuit", une start-up californienne projette de stocker des données dans des satellites en orbite à basse altitude autour de la Terre. Le projet prévoit la mise en orbite de 10 satellites en tout.

Après avoir étudié l'énergie thermique libérée lors du stockage de données, on montre dans une partie non traitée ici que la communication directe avec des satellites à basse altitude (comme l'ISS) est impossible car le temps pendant lequel ceux-ci sont visibles dans le ciel est beaucoup trop court pour réaliser les transferts de données.

On envisage donc l'utilisation de satellite relais à haute altitude (en orbite géostationnaire par exemple).

Vis-à-vis de la propagation des ondes électromagnétiques, les premières couches de l'atmosphère peuvent être assimilées au vide. À partir de 80 km d'altitude, dans l'ionosphère, il y a présence d'un gaz ionisé, très dilué, appelé plasma. Le vide et le plasma ont pour permittivité diélectrique ϵ_0 et pour perméabilité magnétique μ_0 .

II.B.2) Propagation dans le plasma

L'onde de communication doit ensuite traverser l'ionosphère. Le plasma ionosphérique se caractérise par une densité volumique d'électrons libres n_e de charge $-e$, de masse m_e , et une densité volumique de cations $n_c = n_e$ de charge $+e$, de masse m_c ; l'ensemble est donc localement neutre. L'onde étudiée est maintenant notée

$$\underline{\underline{E}}(M, t) = E_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}x)) \vec{u}_y$$

où on pose $\underline{k} = k' + i k''$. On considère que n_e , n_c , E_0 , ω , k' et k'' sont réels, uniformes et constants. De plus, on s'intéresse uniquement à la situation où $k' \geq 0$ et $k'' \leq 0$.

Dans le plasma, les électrons et les ions sont soumis à la force de Lorentz due aux champs électrique et magnétique de l'onde. On négligera toute autre action et on supposera, en outre, que les particules possèdent des vitesses très petites devant c .

Q 19. En admettant que le rapport des amplitudes du champ électrique et du champ magnétique dans le plasma soit assimilable à celui dans le vide, montrer que les effets de la partie magnétique de la force de Lorentz sont négligeables devant ceux de la partie électrique.

Q 20. En admettant que l'accélération d'un électron du plasma soit donnée par $\frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t}$, déterminer l'expression du vecteur vitesse complexe $\underline{\vec{v}}_e$ d'un électron, positionné en M à l'instant t , en fonction de m_e , e , ω et $\underline{\underline{E}}(M, t)$. De la même façon, donner l'expression du vecteur vitesse $\underline{\vec{v}}_c$ d'un cation. Que peut-on dire de $\|\underline{\vec{v}}_c\|$ par rapport à $\|\underline{\vec{v}}_e\|$?

Q 21. Justifier qu'il existe dans le plasma une densité de courant $\underline{j}(M, t)$. En déduire, en utilisant les résultats précédents, que l'expression de la conductivité complexe du plasma notée $\underline{\gamma}$ s'écrit de façon approchée

$$\underline{\gamma} \simeq -i \frac{n_e e^2}{m_e \omega}.$$

Q 22. Calculer la puissance volumique moyenne fournie par le champ électromagnétique aux électrons libres. Commenter.

Q 23. Établir l'équation de propagation du champ $\underline{\underline{E}}(M, t)$ dans le plasma.

Q 24. En déduire l'expression de \underline{k}^2 dans le plasma. Mettre en évidence une pulsation caractéristique, dite pulsation plasma, notée ω_p dont on fournira l'expression en fonction des grandeurs utiles parmi c , e , ε_0 , m_e et n_e .

On suppose dans un premier temps $\omega < \omega_p$.

Q 25. Expliciter l'expression de \underline{k} et en déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$. On fera apparaître une épaisseur caractéristique δ_p que l'on définira et que l'on exprimera en fonction de ω , ω_p et c .

Q 26. Représenter l'évolution spatiale à un instant quelconque des profils des champs électrique et magnétique de l'onde et décrire leur évolution temporelle.

Q 27. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting associé à cette onde. Caractériser l'onde obtenue. On suppose désormais que $\omega > \omega_p$.

Q 28. De la même façon que pour le premier cas, expliciter l'expression de \underline{k} . En déduire les expressions des champs réels $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$, puis établir l'expression de la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

Q 29. Déterminer l'expression de la vitesse de phase v_φ ainsi que celle de la vitesse de groupe v_g en fonction de ω_p , ω et c . Tracer v_g et v_φ en fonction de ω . Le milieu est-il dispersif ? Comparer ces vitesses à c et commenter.

En réalité, la densité électronique n_e dans l'ionosphère varie dans le temps et en fonction de l'altitude. La figure 6 présente son évolution.

Q 30. Calculer la valeur numérique de la fréquence minimale que doit posséder l'onde pour atteindre un satellite relais géostationnaire à partir de la surface de la Terre. À quel domaine du spectre électromagnétique appartient cette fréquence ?

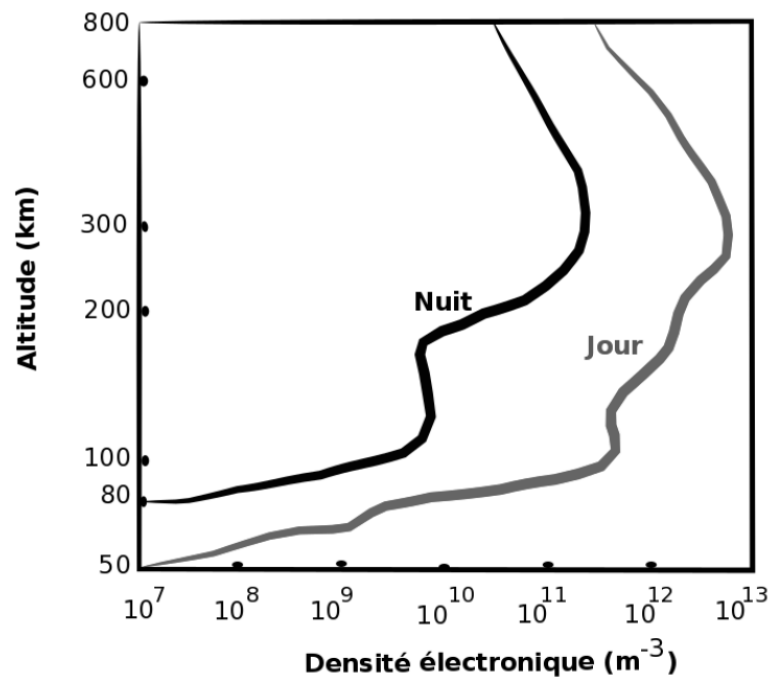


Figure 6 Évolution de la densité électronique dans l'ionosphère en fonction de l'altitude (d'après Culture Sciences - Physique, ENS Lyon)

Données

Perméabilité magnétique du vide
 Permittivité diélectrique du vide
 Vitesse de la lumière dans le vide
 Charge élémentaire
 Masse de l'électron
 Masse du proton
 Constante d'Avogadro

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 1,257 \times 10^{-6} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \\ \varepsilon_0 &= 8,854 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \\ c &= 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ e &= 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \\ m_e &= 9,109 \times 10^{-31} \text{ kg} \\ m_p &= 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg} \\ \mathcal{N}_A &= 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}\end{aligned}$$