Ondes planes électromagnétiques dans un milieu matériel. Conducteurs ohmiques. Plasmas. Absorption. Dispersion

Dans tout le chapitre on note $(\mathscr{R})$ le référentiel d'étude et on le munit d'un repère d'espace $R = (Oxyz)$ dont la base cartésienne associée $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est orthonormale directe.

Table des matières

I. Électromagnétisme dans un conducteur ohmique

1) Introduction

On étudie un conducteur ohmique, c'est à dire un milieu matériel dans lequel est vérifiée la *loi d'Ohm locale* en tout point M du milieu et à chaque instant t :

$$\boxed{\vec{j}(M,t) = \gamma \, \vec{E}(M,t)}$$

où la constante $\gamma > 0$ est la **conductivité électrique** du milieu.

En pratique le conducteur ohmique sera un métal. Rappelons que dans les métaux, l'ordre de grandeur de γ est 10^7 S.m^{-1}.

On suppose que les constantes électromagnétiques du conducteur sont identiques à celles du vide : ε_0, μ_0.

2) Densité volumique de charges dans le conducteur

On va voir que si, pour une raison ou pour une autre, il existe une densité volumique de charges initiale $\rho(M, t = 0) \neq 0$ à un instant origine $t = 0$ en tout point M d'un conducteur ohmique, celle-ci va obligatoirement disparaître au cours du temps avec une constante de temps $\tau = \varepsilon_0/\gamma$.

Conclusion et hypothèse d'étude

On supposera dans toute la suite du cours qu'on se place à des instants t tels que $\rho(M,t) = 0$ en tout point M du conducteur ohmique. On aura donc $\operatorname{div} \overrightarrow{E}(M,t) = 0$.

3) Courant de déplacement

Supposons qu'il existe dans le conducteur ohmique un champ électrique qui oscille de façon sinusoïdale avec le temps, avec une pulsations ω :

$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E_m} \cos(\omega t + \varphi)$$

.

Conclusion

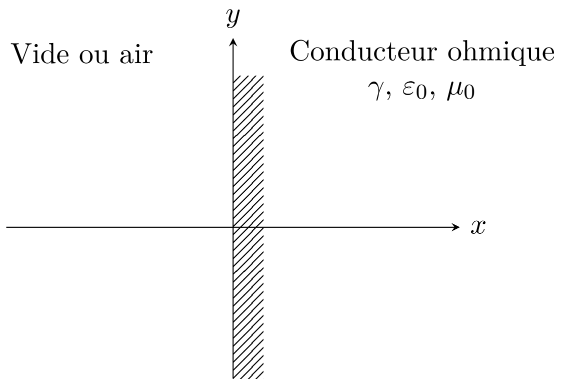
Lorsqu'un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$ au sein d'un conducteur ohmique oscille sinusoïdalement dans le temps avec une pulsation $\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$ (c'est à dire $\tau\omega \ll 1$, où τ est la constante de temps de relaxation de ρ), alors on peut négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction.

4) Équation de diffusion pour le champ électromagnétique

.

5) Exemple de solution. Effet de peau

On considère une situation dans laquelle un conducteur ohmique occupe le demi-espace $x \geqslant 0$ tandis que le demi-espace $x < 0$ est constitué de vide ou d'air (dont les propriétés électromagnétiques sont celles du vide : mêmes constantes ε_0 et μ_0).



On impose en tout point de la surface du conducteur, c'est à dire en $x = 0^-$ un champ électrique qui varie sinusoïdalement dans le temps avec une pulsation ω, de la forme :

$$\overrightarrow{E}(0^-, t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)\, \overrightarrow{e_y}$$

Pour $x \geqslant 0$ on cherche une solution particulière de l'équation de diffusion du champ électrique indépendante des coordonnées y et z du point M et qui s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \overrightarrow{E}(x,t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\overrightarrow{E}}(x,t)\right) \quad \text{avec} \quad \underline{\overrightarrow{E}}(x,t) = \underline{f}(x)\, e^{i\omega t}\, \overrightarrow{e_y}$$

où $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ est une application à valeur complexe dont on cherche l'expression et qui ne dépend que de x.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{f}(x)$.
2. En donner la solution compte-tenu des conditions aux limites en $x = 0$ et à l'infini. Exprimer cette solution en fonction d'une distance caractéristique δ à exprimer en fonction de μ_0, γ et ω.
3. En déduire l'expression de $\overrightarrow{E}(x,t)$ pour $x \geqslant 0$ et interpréter son expression. Déterminer de même l'expression de $\overrightarrow{B}(x,t)$.

Quelques ordres de grandeur pour δ

Prenons l'exemple du métal cuivre $\mathrm{Cu}_{(s)}$: $\gamma = 5{,}96 \times 10^7$ S.m^{-1}. Avec la fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ on a :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma\, 2\pi\nu}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \gamma \pi}}\,\frac{1}{\sqrt{\nu}} = \frac{6{,}52 \times 10^{-2}}{\sqrt{\nu}}$$

ν (Hz)	10^6 (Onde radio)	10^9 (Onde radio)	10^{14} (Visible)
δ	65 μm	2 μm	6,5 nm

Remarque :

6) Pseudo-OPPS électromagnétiques

Plusieurs milieux matériels (dont les conducteurs ohmiques) permettent une propagation en leur sein d'ondes électromagnétiques tout en les atténuant de façon exponentielle au fur et à mesure de leur propagation dans le milieu.

Le bon outil mathématique pour décrire des ondes de ce type est la *pseudo-OPPS électromagnétique* : il s'agit d'une OPPS EM mais avec **un vecteur d'onde complexe** $\underline{\vec{k}}$.

Définition. Pseudo-OPPS vectorielle

On appelle *pseudo-OPPS vectorielle* tout champ vectoriel de la forme :

$$\vec{a}(M,t) = \mathrm{Re}\left(\underline{\vec{a}}(M,t)\right) \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{a}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{A}}_m \, e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}}.\vec{r})}$$

où $\overrightarrow{\underline{A}}_m$ est le vecteur amplitude complexe et où $\underline{\vec{k}}$ est le vecteur d'onde complexe.

Interprétation

7) Règles de calcul avec les pseudo-OPPS

Règles de calcul

Si $\underline{\vec{a}} = \underline{\overrightarrow{A_m}}\, e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}}.\vec{r})}$ alors $\dfrac{\partial \underline{\vec{a}}}{\partial t} = i\omega\, \underline{\vec{a}}$; $\mathrm{div}\, \underline{\vec{a}} = -i\, \underline{\vec{k}}.\underline{\vec{a}}$ et

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \underline{\vec{a}} = -i\, \underline{\vec{k}} \wedge \underline{\vec{a}} \quad ; \quad \Delta \underline{\vec{a}} = -\left(\underline{\vec{k}}.\underline{\vec{k}}\right) \underline{\vec{a}}$$

Remarques :

8) Application : propagation d'une onde électromagnétique dans un métal réel. Milieu dispersif.

On étudie la propagation d'une pseudo-OPPS dans un conducteur ohmique de conductivité γ et dont les constantes électromagnétiques sont ε_0 et μ_0. On suppose que cette pseudo-OPPS se propage dans la direction $+\overrightarrow{e_x}$ et qu'elle est rectilignement polarisée selon $\overrightarrow{e_y}$. Son champ électrique complexe s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = E_m\, \overrightarrow{e_y}\, e^{i(\omega t - \underline{\vec{k}}.\vec{r})} \quad \text{avec} \quad E_m > 0 \quad \text{et} \quad \underline{\vec{k}} = \underline{k}\, \overrightarrow{e_x}$$

1. En partant de l'équation de diffusion vérifiée par le champ électrique, déterminer l'équation vérifiée par $\underline{k}$.
2. En déduire l'epxression de $\underline{k}$ en fonction de ω, μ_0 et γ.
3. Déterminer l'expression du champ magnétique complexe $\overrightarrow{\underline{B}}$. En déduire $\overrightarrow{B} = \mathrm{Re}\left(\overrightarrow{\underline{B}}\right)$. L'onde est-elle transverse magnétique ?
4. Déterminer la vitesse de phase v_φ de cette pseudo-OPPS.

Définition

On dit qu'un milieu matériel est *dispersif* lorsque la vitesse de phase des OPPS ou des pseudo-OPPS qui se propagent dans ce milieu dépend de la pulsation ω de l'onde :

$$v_\varphi = v_\varphi(\omega)$$

II. Électromagnétisme dans un plasma

1) Définition d'un plasma

Un plasma est un milieu matériel constitué de cations (ions chargés positivement) et d'électrons totalement dissociés de leur atome d'origine. Cations et électrons sont libres de se déplacer les uns par rapport aux autres : il s'agit d'un état de la matière proche d'un gaz.

On l'observe :

- à haute température dans une étoile (plasma chaud) ;
- à basse température (plasma froid) dans l'ionosphère (couche de l'atmosphère située entre 75 km et 250 km au dessus du niveau de la mer). Dans ce cas ce sont les rayonnements visibles et UV du Soleil qui provoquent l'ionsiation des atomes et molécules.

  On peut aussi obtenir un plasma froid dans les écrans à plasma : ici c'est un champ électrique qui est appliqué et qui est suffisamment important pour ioniser les molécules.

2) Propagation d'une OPPS EM dans un plasma

On considère un plasma dont les caractéristiques sont :

- **Cations** : charge élec. q, masse m_C, densité particulaire n_c (nombre de cations par unité de volume) supposée uniforme.
- **Électrons** : charge élec. $-e$, masse m_e, densité particulaire n_e supposée uniforme aussi.

On suppose que le plasma est localement électriquement neutre : la densité volumique de charges y est nulle en tout point et à chaque instant :

Ordre de grandeur : pour l'ionosphère : $10^{10} \leqslant n_e \leqslant 10^{12}$ m^{-3}

On étudie la possibilité de propagation dans le plasma d'une pseudo-OPPS avec un vecteur d'onde éventuellement complexe $\vec{\underline{k}} = \underline{k}\,\vec{u}$, où $\vec{u}$ est un vecteur à composantes réelles qui indique la direction de propagation de l'onde :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = \mathrm{Re}\left(\overrightarrow{\underline{E}}(M,t)\right) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{E}}_m\, e^{i(\omega t - \vec{\underline{k}}.\vec{r})}$$
$$\overrightarrow{B}(M,t) = \mathrm{Re}\left(\overrightarrow{\underline{B}}(M,t)\right) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{B}}_m\, e^{i(\omega t - \vec{\underline{k}}.\vec{r})}$$

On se donne ω (donc la fréquence de l'onde) et on souhaite déterminer l'expression de $\underline{k}$ ainsi que les propriétés de $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.

3) Relation constitutive du plasma

Le passage de l'onde électromagnétique dans le plasma va mettre les cations et les électrons en mouvement (force de lorentz) ce qui va créer un vecteur densité de courant électrique $\vec{j}$. On cherche la relation entre $\vec{j}$ et $\overrightarrow{E}$, appelée *relation constitutive du plasma.*

Cette partie du cours est à prendre sur feuille libre.

4) Relation de dispersion

Partie à prendre sur feuille libre.

5) Expressions du champ électromagnétique dans le plasma. Onde stationnaire évanescente

Plaçons-nous dans le cas particulier où le champ électrique de l'onde s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(x,t) = \mathrm{Re}\left(\overrightarrow{\underline{E}}(x,t)\right) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{\underline{E}}(x,t) = E_m\,\overrightarrow{e_y}\, e^{i(\omega t - \underline{k}x)} \quad E_m > 0$$

1. Déterminer $\overrightarrow{E}(x,t)$ dans le cas où $\omega > \omega_p$ et dans le cas où $\omega < \omega_p$. Qualifier l'onde dans chacun de ces cas.
2. Déterminer le champ magnétique complexe $\overrightarrow{\underline{B}}(x,t)$, puis $\overrightarrow{B}(x,t) = \mathrm{Re}\left(\overrightarrow{\underline{B}}(x,t)\right)$ dans les deux cas précédents.

III. Paquet d'onde. Vitesse de phase et vitesse de groupe

1) Intérêt des OPPS

Une OPPS n'a pas de réalité physique car elle existe en tout point de l'espace : elle est d'extension infinie aussi bien le long de son axe de propagation Δ que dans chaque plan d'onde $\mathscr{P}\perp\Delta$.

Leur intérêt est que dans beaucoup de situations physiques, une onde $s(M,t)$ peut être considérée comme une somme d'OPPS. Cependant, cette somme n'est pas finie : un théorème dû à Joseph Fourier montre que toute onde solution de l'équation de d'Alembert :

$$\Delta s - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

peut s'écrire sous la forme :

$$s(\vec{r},t) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \underline{A}_m(\vec{k})\, e^{i(\omega t - \vec{k}.\vec{r})}\, \mathrm{d}^3 k$$

2) Paquet d'onde électromagnétique unidimensionnel

Dans le cas des ondes électromagnétiques, l'aspect vectoriel de l'onde peut rapidement rendre les calculs compliqués. Afin de simplifier la situation on étudie un cas où le champ électrique de l'onde s'écrit sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = E(M,t)\,\overrightarrow{e_y}$$

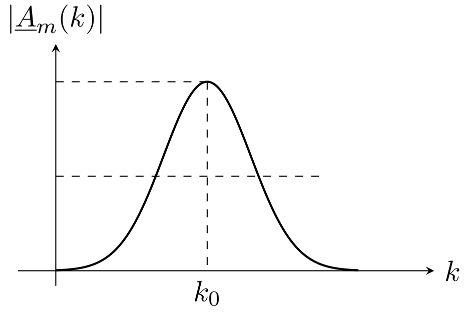
De plus (toujours dans le but de simplifier les choses), on va se placer dans le cas où $E(M,t)$ est un paquet d'ondes qui se propagent toutes dans la direction $\overrightarrow{e_x}$: les vecteurs d'onde s'écriront donc $\vec{k} = k\,\overrightarrow{e_x}$. Comme $\vec{k}.\vec{r} = kx$ on a :

$$E(M,t) = \mathrm{Re}(\,\underline{E}(M,t)\,) \quad \text{avec} \quad \underline{E}(M,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{A}_m(k)\,e^{i(\omega t - kx)}\,\mathrm{d}k$$

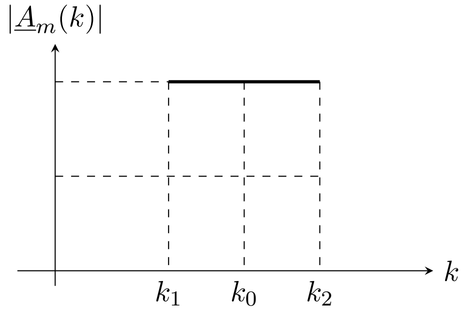
On dit que $E(x,t)$ est un *paquet d'onde unidimensionnel* (1 seule coordonnée d'espace).

Deux exemples courants :

Paquet d'onde gaussien
$\underline{A}_m = \underline{A}_0\,e^{-(k-k_0)^2/2\sigma^2}$



Paquet d'onde rectangulaire
$\underline{A}_m = \underline{A}_0$ Cste si $k \in [k_1, k_2]$
$\underline{A}_m = 0$ sinon



.

Enfin, l'onde se propage dans un milieu caractérisé par une **relation de dispersion** :

$$\omega = \omega(k) \quad \text{ou} \quad k = k(\omega)$$

Exemples :

On va supposer que pour exprimer $\omega(k)$ dans l'intégrale du paquet d'onde, on peut se contenter d'un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de k_0. On parle de paquet d'onde **dans une approximation à l'ordre 1**.

Cette partie du cours est à prendre sur feuille libre.

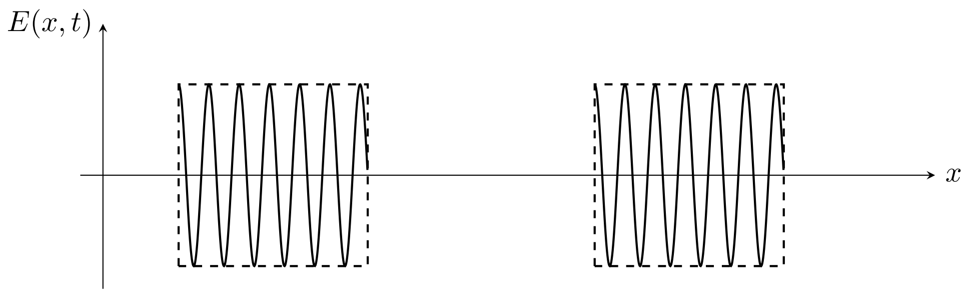
Conclusion :

Pour tout paquet d'onde unidimensionnel, c'est à dire quelle que soit l'expression de $\underline{A}_m(k)$ et pourvu qu'une approximation à l'ordre 1 soit pertinente, c'est à dire lorsque $\Delta k/k_0 \ll 1$ ou lorsque le milieu n'est pas dispersif, on a les propriétés suivantes :

- Le paquet d'onde est le produit d'une enveloppe $\mathscr{E}(x,t)$ par une OPPS de la forme $\cos(\omega_0 t - k_0 x + \varphi)$ avec $\omega_0 = \omega(k_0)$.
- L'enveloppe $\mathscr{E}(x,t)$ (dont la forme exacte dépend de la fonction $\underline{A}_m(k)$) est d'entension limitée selon Ox, de l'ordre de Δx, et se propage à la vitesse de groupe :

$$\boxed{v_g(k_0) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k_0)}$$

- L'OPPS se propage à la vitesse de phase : $\boxed{v_\varphi(k_0) = \dfrac{\omega(k_0)}{k_0} = \dfrac{\omega_0}{k_0}}$
- En ordre de grandeur on a toujours : $\boxed{\Delta x \times \Delta k \approx 2\pi}$



Le point important pour ne pas contedire la théorie de la relativité restreinte est que :

$$\boxed{\forall\, k,\ v_k(k) \leqslant c}$$

3) Exemples de vitesses de groupe

Bilan de ce chapitre

Points du cours à connaître :

- Établir l'équation différentielle temporelle d'évolution de la densité volumique de charges dans un métal ohmique. Solution, constante de temps et conséquences.
- Justifier la simplification de l'équation de Maxwell - Ampère dans un milieu conducteur ohmique. Établir les équations de diffusion pour $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$.
- Connaître la notion de pseudo-OPPS et son vecteur d'onde complexe $\vec{k} = \underline{k}\,\vec{u}$. Savoir interpréter sa partie réelle et sa partie imaginaire.
- Connaître les règles de calculs avec les pseudo-OPPS.
- Une pseudo-OPPS se propage dans un milieu conducteur de conductivité γ avec un vecteur d'onde complexe $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\,\vec{u}$. Établir la relation de dispersion reliant $\underline{k}$ et ω. En déduire la valeur de $\underline{k}$ et introduire l'épaisseur de peau δ.
- Définir un plasma et établir la relation constitutive reliant $\underline{\overrightarrow{j}}$ (en précisant toutes les hypothèses de travail) et $\underline{\overrightarrow{E}}$ (en notation complexe et en régime sinusoïdal forcé) avec toutes les hypothèses. En déduire l'expression de la conductivité complexe $\underline{\gamma}$.
- Connaissant la relation $\underline{\overrightarrow{j}} = \underline{\gamma}\underline{\overrightarrow{E}}$ et l'expression de $\underline{\gamma}$, établir la relation de dispersion reliant $\underline{k}$ et ω dans le plasma. Expression de la pulsation de plasma ω_p. Discuter les cas où $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$.
- Définition des vitesses de phase et de groupe. Savoir ce que représente la vitesse de phase

Exercices à travailler :

- Exercice du cours I.5)
- Exercices 2, 3 et 4