

1 Réflexion en incidence oblique sur un métal parfait

Un métal parfait occupe le demi-espace $z \leq 0$ tandis que le demi-espace $z > 0$ est de l'air, qui possède les mêmes constantes électromagnétiques ε_0 et μ_0 que le vide.

Une onde électromagnétique appelée onde incidente se propage vers le métal avec une direction oblique par rapport à la normale au plan $z = 0$. Cette onde est modélisée par une OPPS de pulsation ω , polarisée rectilignement selon $\vec{e}_x$ et dont le champ électrique en un point M de l'espace $z > 0$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_m \vec{e}_x \exp \left[i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r}) \right] \quad E_m > 0$$

avec un vecteur d'onde $\vec{k}_i$ contenu dans le plan Oyz (appelé plan d'incidence) et faisant un angle θ_i avec Oz : θ_i est l'angle d'incidence (figure 1).

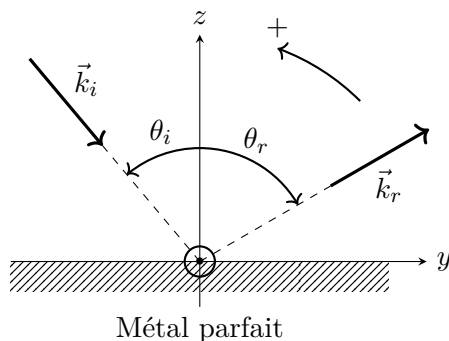


FIGURE 1

Les courants surfaciques générés par cette onde incidente à la surface du métal, créent une onde électromagnétique réfléchie en tout point M de l'espace $z > 0$, dont on supposera que le champ électrique s'écrit à priori sous la forme :

$$\vec{E}_r(M, t) = E_{mr} \vec{e}_x \exp \left[i(\omega_r t - \vec{k}_r \cdot \vec{r}) \right]$$

avec une pulsation ω_r et un vecteur d'onde $\vec{k}_r$ contenu dans le plan Oyz et faisant un angle θ_r avec la normale au plan $z = 0$: θ_r est l'angle de réflexion (figure 1).

L'orientation des angles est donnée par le sens trigonométrique. Par exemple, sur le dessin de la figure 1, on a $\theta_i > 0$ et $\theta_r < 0$. Ces angles appartiennent à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

En exploitant l'annulation de la composante tangentielle du champ électrique à la surface du métal parfait, montrer que :

1. $E_{mr} = -E_m$
2. $\omega_r = \omega$
3. $\theta_r = -\theta_i$. Quelle loi retrouve-t-on ainsi ?

2 Chauffage par induction

Ce problème traite du thème général du chauffage par induction et concerne l'étude électromagnétique d'un dispositif à symétrie de révolution (qui a un rôle industriel très important). Le chauffage par induction se caractérise et se distingue des autres techniques électro-thermiques par sa capacité à injecter sans contact de l'énergie thermique dans les matériaux conducteurs de l'électricité. Les premières idées théoriques datent des années 1890, elles sont dues à Heaviside et Steinmetz en particulier.

Un formulaire et des données numériques sont regroupés en fin d'énoncé.

Le chauffage d'un cylindre métallique de rayon a et de longueur L est obtenu en plaçant celui-ci au centre d'un solénoïde à spires jointives et comportant n spires par mètre parcourues par un courant alternatif sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude I_m : $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.

La longueur L du cylindre, identique à celle du solénoïde, est suffisamment grande devant son rayon a pour être considérée comme infinie.

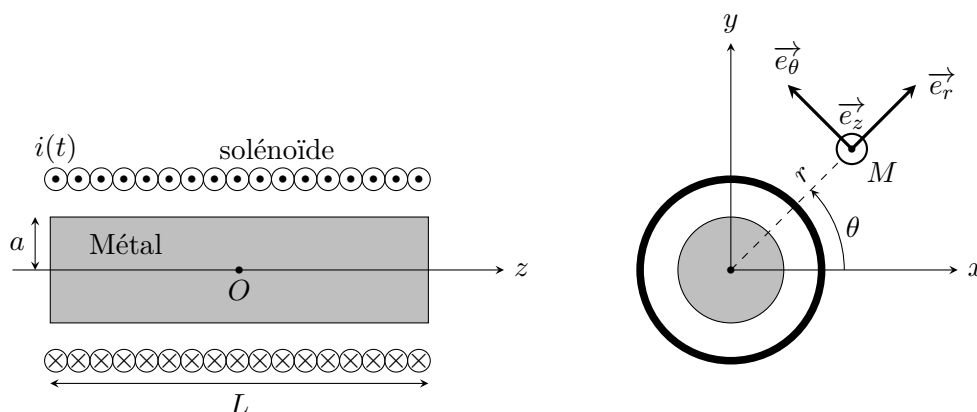


FIGURE 2

Le système de coordonnées cylindriques est utilisé et un point M est repéré par (r, θ, z) , la base locale associée étant $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ (figure 2).

Dans tout le problème, on suppose que le métal est un conducteur ohmique à l'intérieur duquel la loi d'Ohm locale $\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t)$ est vérifiée en tout point. Ce métal sera supposé localement neutre, soit pour tout M , $\rho(M, t) = 0$. Enfin on se place à des fréquences telles que le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction. Au sein du métal, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit donc sous la forme :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

Au sein de métal ($r \leq a$) on écrit à priori le champ magnétique et la densité de courant sous la forme :

$$\vec{B} = \underline{B}_r(r) \exp(i\omega t) \vec{e}_r + \underline{B}_z(r) \exp(i\omega t) \vec{e}_z$$

et

$$\underline{j} = \underline{j}_r(r) \exp(i\omega t) \vec{e}_r + \underline{j}_\theta(r) \exp(i\omega t) \vec{e}_\theta + \underline{j}_z(r) \exp(i\omega t) \vec{e}_z$$

On suppose que les composantes de ces vecteurs ne dépendent que de r et du temps t .

- Q1.** Justifier que $B_\theta = 0$ et que les composantes des vecteurs ne dépendent ni de θ , ni de z .
Q2. Montrer à partir des équations de Maxwell que :

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

En déduire les deux équations différentielles suivantes, relatives aux composantes $\underline{B}_r$ et $\underline{B}_z$:

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d[r \underline{B}_r]}{dr} \right) = \frac{2i}{\delta^2} \underline{B}_r \\ \frac{d^2 \underline{B}_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{B}_z}{dr} = \frac{2i}{\delta^2} \underline{B}_z \end{cases}$$

avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$. À quoi est homogène cette grandeur δ ?

- Q3.** À partir d'une équation Maxwell, montrer que $r \underline{B}_r$ est constant. En déduire que la composante $\underline{B}_r$ est nulle.
Q4. Exprimer la densité de courant $\vec{j}$ au point M en fonction d'une dérivée de $\underline{B}_z$ à préciser. Quelle est la forme des lignes de courant dans le métal ?

Dans le cas des basses fréquences δ devient important et il est admis que la composante $\underline{B}_z$ est bien représentée par une série entière de la forme :

$$\underline{B}_z(r) = B_0 \left[1 + \underline{\alpha}_1 \frac{r}{\delta} + \underline{\alpha}_2 \frac{r^2}{\delta^2} + \dots + \underline{\alpha}_n \frac{r^n}{\delta^n} + \dots \right] = B_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \underline{\alpha}_n \left(\frac{r}{\delta} \right)^n \quad \text{avec } \underline{\alpha}_0 = 1$$

B_0 est une constante réelle positive.

- Q5.** Montrer que les coefficients complexes $\underline{\alpha}_n$ vérifient :

$$\underline{\alpha}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad \underline{\alpha}_{n+2} = \frac{2i}{\delta^2 (n+2)^2} \underline{\alpha}_n$$

- Q6.** Préciser les expressions de $\underline{\alpha}_2$, $\underline{\alpha}_3$ et $\underline{\alpha}_4$.
Q7. Montrer qu'on peut-on se limiter aux deux premiers termes de la série, c'est à dire $\underline{B}_z(r) \approx B_0 \left(1 + \underline{\alpha}_2 \frac{r^2}{\delta^2} \right)$ (les autres termes étant considérés comme négligeables) à condition que la fréquence f soit très petite devant une fréquence caractéristique f_c , à exprimer en fonction de μ_0 et γ ?

Application numérique : calculer la fréquence caractéristique f_c mise en évidence.

- Q8.** Pour $f \ll f_c$, donner alors l'expression de $\vec{j}$ au premier ordre en r sous la forme $\vec{j} = \underline{j}_\theta(r) \exp(i\omega t) \vec{e}_\theta$.
Q9. Calculer la densité volumique puissance moyenne $\langle p_v \rangle(r) = \langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$ dissipée par effet Joule dans le métal. En déduire la puissance moyenne P_J dissipée dans le cylindre de longueur L .

- Q10.** Tracer $\log_{10}(P_J)$ en fonction de $\log_{10}(f)$ pour f variant de $10^{-5} f_c$ à $10^{-2} f_c$.

1. Attention, pour calculer p_v il faut utiliser les parties réelles de $\vec{E}$ et $\vec{j}$ et jamais les représentations complexes.

Formulaire en coordonnées cylindriques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$\Delta \vec{A} = \left[\Delta A_r - \frac{1}{r^2} \left(A_r + 2 \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_r + \left[\Delta A_\theta - \frac{1}{r^2} \left(A_\theta + 2 \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \right] \vec{u}_\theta + \Delta A_z \vec{u}_z$$

Données numériques :

$$L = 100 \text{ cm}, a = 2,0 \text{ cm}, \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}, \gamma = 3,8 \times 10^7 \text{ S.m}^{-1}.$$