

**DS n°6 MP1 (Sujet unique)**  
Samedi 14 février 2026 - Durée 4h

*Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté et à la précision de la rédaction. Tout commentaire pertinent sera valorisé.*

*Tous les résultats devront être mis en évidence. Une application numérique qui ne respecte pas le nombre de chiffres significatifs des données de l'énoncé ou qui est sans unité ne donnera pas lieu à une attribution de points.*

## 1 Étude de l'alliage 2024

### A - Structure

L'alliage 2024 contient essentiellement de l'aluminium et du cuivre à hauteur d'environ 4%. La structure microscopique d'un tel alliage n'est pas homogène. L'alliage présente une phase majoritaire dite  $\alpha$ , dans laquelle les atomes de cuivre sont dispersés au sein d'une matrice d'aluminium. Entre les grains de phase  $\alpha$ , on trouve une seconde phase dite  $\beta$  comme le montre la figure 1.

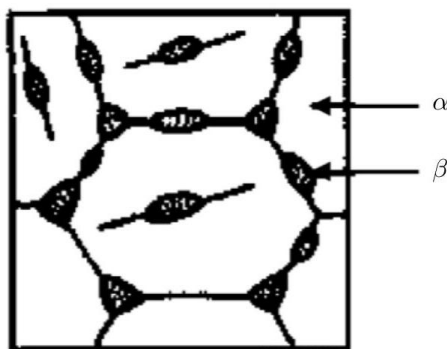


FIGURE 1 – Structure microscopique d'un alliage 2024

#### A.1) Étude de la phase $\alpha$

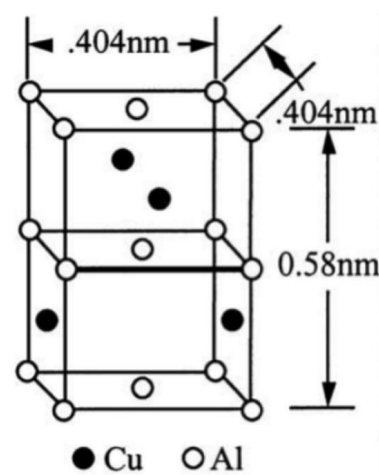
À partir des documents de l'annexe et des données numériques figurant en fin d'énoncé :

- Déterminer les rayons  $R_T$  et  $R_O$  d'un atome pouvant être logé dans un site tétraédrique ou dans un site octaédrique.
- Préciser à quel type d'alliage appartient la phase  $\alpha$ . Les étapes du raisonnement ainsi que les calculs permettant d'aboutir à une conclusion seront clairement explicités.

#### A.2) Étude de la phase $\beta$

La structure cristallographique de la phase  $\beta$  dépend des conditions d'obtention de l'alliage. La maille donnée figure 2 a pu être mise en évidence.

- Déterminer la formule chimique de cette phase  $\beta$ .
- Quelle est la coordinence d'un atome de cuivre dans cette structure ?
- Déterminer la masse volumique de la phase  $\beta$ .

FIGURE 2 – Structure cristallographique de la phase  $\beta$ 

## B - Analyse chimique de l'alliage

La composition chimique de l'alliage aluminium-cuivre peut être déterminée par titrage selon le protocole suivant.

### B.1) Première phase : Séparation du cuivre et de l'aluminium

Après avoir réduit l'alliage à l'état de poudre, une masse  $m = 1,0$  g est introduite dans un ballon de 250 mL. On introduit ensuite dans ce ballon 100 mL d'une solution d'hydroxyde de sodium ( $\text{Na}^+$ ,  $\text{HO}^-$ ) à environ  $8 \text{ mol.L}^{-1}$ .

Quand le dégagement gazeux de dihydrogène tend à diminuer, le contenu du ballon est porté à ébullition pendant 15 minutes. Après refroidissement, le contenu du ballon est filtré. Les particules solides restées sur le filtre sont rincées, puis placées dans un bécher de 200 mL.

a) Pourquoi utilise-t-on l'alliage sous forme de poudre ?

Les diagrammes potentiel-pH des éléments aluminium et cuivre ont été tracés pour une concentration en espèces dissoutes égale à  $C_{\text{tra}} = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$  (figures 3 et 4). Les deux droites associées aux couples de l'eau ont été ajoutées en traits plus fins.

- Attribuer un domaine à chacune des espèces suivantes :  $\text{Al}_{(\text{s})}$ ,  $\text{Al}(\text{OH})_{4(\text{aq})}^-$ ,  $\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}$  et  $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{s})}$ .
- Retrouver le pH d'apparition du solide  $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{s})}$  dans une solution contenant les ions  $\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}$  à la concentration  $C = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .
- Déterminer la valeur théorique de la pente de la frontière séparant les domaines de stabilité des espèces  $\text{Cu}_{(\text{aq})}^{2+}$  et  $\text{Cu}_2\text{O}_{(\text{s})}$ .
- Au moyen des deux diagrammes potentiel-pH, justifier l'utilisation du traitement par la soude pour séparer les éléments aluminium et cuivre. Écrire l'équation de la (ou des) réaction(s) qui ont lieu au cours de cette phase.
- Pourquoi est-il judicieux de travailler en milieu très basique plutôt que neutre ?
- Quel peut être l'intérêt de porter le mélange à ébullition quand le dégagement gazeux faiblit ?

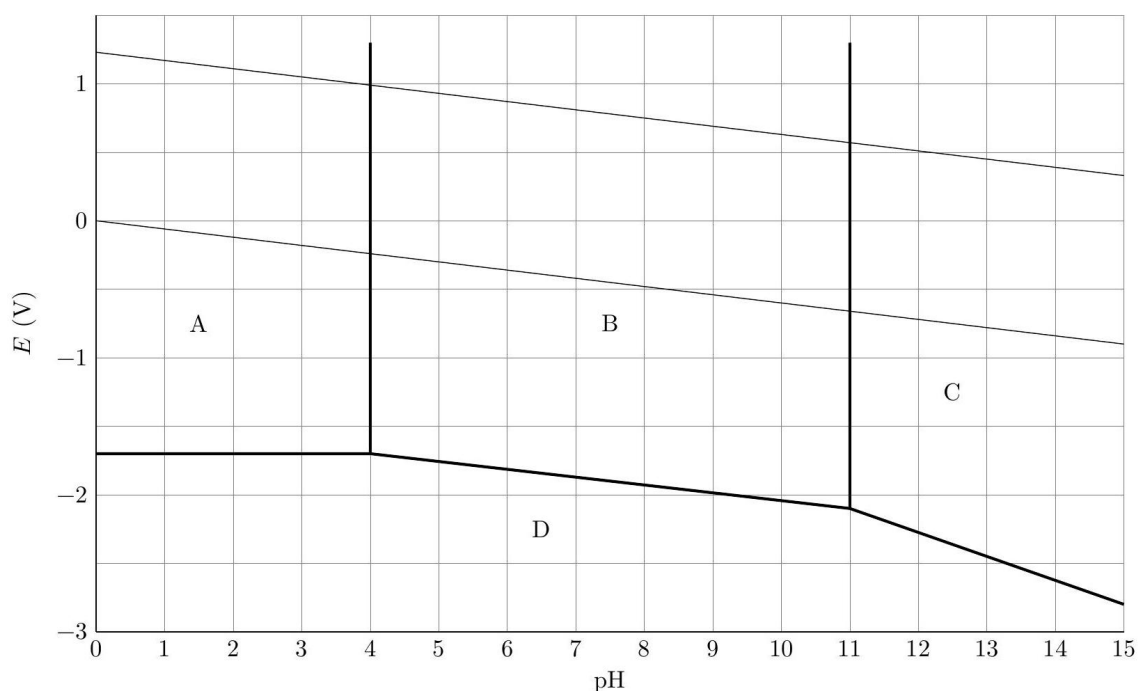


FIGURE 3 – Diagrammes potentiel-pH superposés de l'aluminium et de l'eau

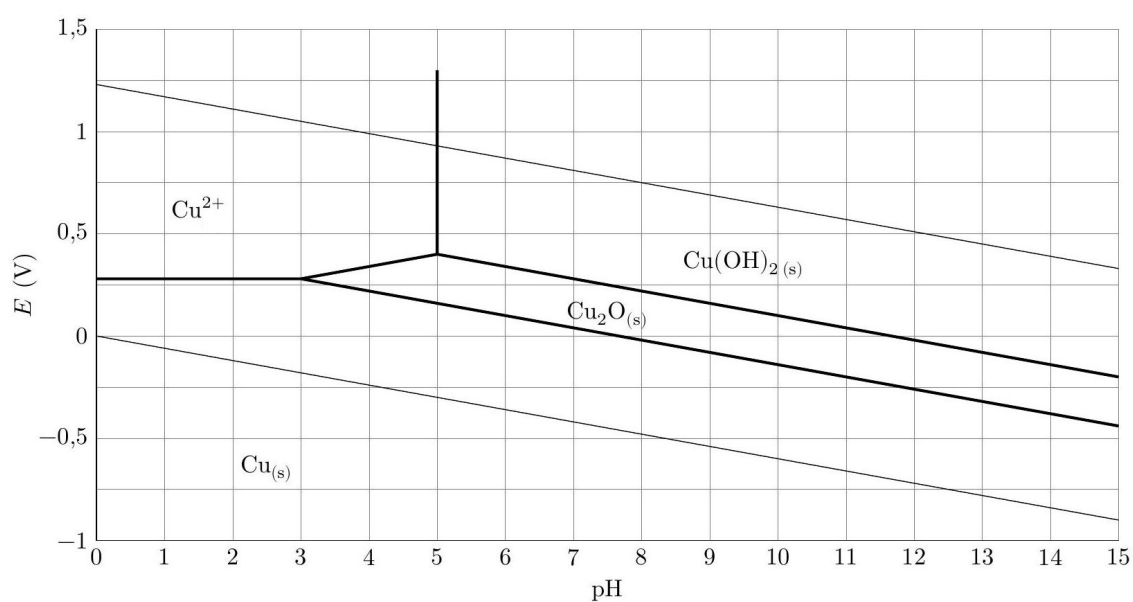


FIGURE 4 – Diagrammes potentiel- pH superposés du cuivre et de l'eau

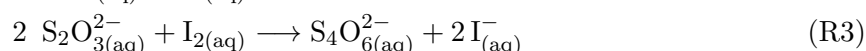
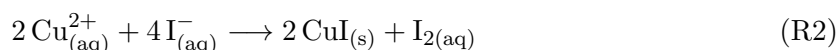
## II.B.2) Deuxième phase : Dissolution du cuivre

Le cuivre solide  $\text{Cu}_{(s)}$  récupéré à l'issue de la première phase est totalement dissout au moyen de 10 mL d'une solution d'acide nitrique concentrée ( $\text{H}^+_{(aq)} + \text{NO}^-_{3(aq)}$ ). Un dégagement gazeux de monoxyde d'azote NO est observé.

Écrire l'équation (R1) de la réaction de dissolution du cuivre  $\text{Cu}_{(s)}$  en présence d'acide nitrique. Est-elle totale?

### II.B.3) Troisième phase : Dosage du cuivre dans l'alliage

Après addition d'une quantité excédentaire d'iodure de potassium ( $K^+, I^-$ ), la solution prend une coloration brune attribuable à la formation de diiode  $I_2$ . Ce dernier est ensuite dosé par une solution aqueuse de thiosulfate de sodium ( $2Na^+, S_2O_3^{2-}$ ) à  $C = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ . L'équivalence est détectée pour un volume versé  $V = 12,5 \text{ mL}$ . Les équations des réactions, supposées totales, qui ont lieu pendant cette phase sont :



- Justifier par un calcul le caractère total de la réaction (R3).
- Déduire des résultats du dosage le pourcentage massique de cuivre dans l'alliage dosé.
- Serait-il utile de répéter une nouvelle fois ce dosage ? Si oui, pourquoi ?

## ANNEXE. Les alliages (extrait de Wikipedia)

Un alliage est la combinaison d'un élément métallique avec un ou plusieurs autres éléments chimiques. Dans un alliage, l'élément métallique majoritaire, c'est-à-dire constituant la plus importante partie du mélange, est appelé "métal de base". Les éléments ajoutés volontairement sont appelés "éléments d'alliage".

L'aluminium est l'élément de base de l'alliage 2024. Le cuivre est l'élément d'alliage.

### Réseau cubique à faces centrées

L'aluminium pur cristallise selon un réseau compact cubique à faces centrées dont une vue éclatée est reproduite figure 5.

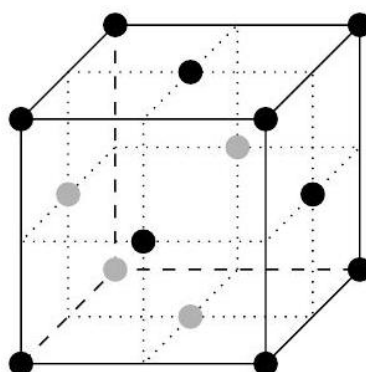


FIGURE 5 – Vue éclatée d'un réseau cubique à faces centrées

Extrait de Principes de chimie, Atkins, Jones & Laverman, Ed. De Boeck, 2014

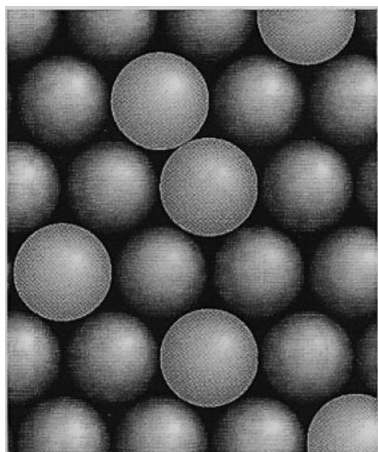


FIGURE 6 – Dans un alliage par substitution, les positions de certains des atomes de l'un des métaux sont prises par des atomes d'un autre métal.

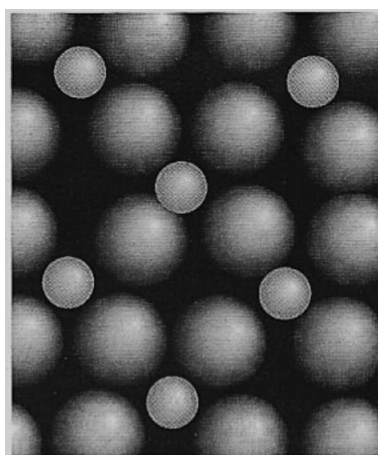


FIGURE 7 – Dans un alliage interstitiel, les atomes de l'un des métaux se placent dans les trous entre les atomes d'un autre métal.

### Valeurs numériques

|                                                    | O    | Al   | Cu   |
|----------------------------------------------------|------|------|------|
| Numéro atomique                                    | 8    | 13   | 29   |
| Masse molaire ( $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) | 16,0 | 27,0 | 63,5 |
| Rayon métallique (pm)                              |      | 143  | 128  |

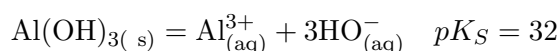
Densité de l'alumine  $\text{Al}_2\text{O}_3$   $d = 4$   
 Constante d'Avogadro  $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$   
 Constante de Faraday  $F = 96,5 \times 10^3 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$   
 Constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$

**Potentiels standard d'oxydoréduction à 25°C**

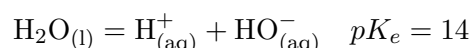
| Couple | Al <sup>3+</sup> /Al | H <sup>+</sup> /H <sub>2(g)</sub> | Fe <sup>2+</sup> /Fe | Cu <sup>2+</sup> /Cu | S <sub>4</sub> O <sub>6</sub> <sup>2-</sup> /S <sub>2</sub> O <sub>3</sub> <sup>2-</sup> | I <sub>2</sub> /I <sup>-</sup> | NO <sub>3</sub> <sup>-</sup> /NO <sub>(g)</sub> | O <sub>2(g)</sub> /H <sub>2</sub> O |
|--------|----------------------|-----------------------------------|----------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------|
| E°(V)  | -1,66                | 0,00                              | -0,44                | 0,34                 | 0,080                                                                                    | 0,62                           | 0,96                                            | 1,23                                |

**Données à 298 K :**

- Produit de solubilité de l'hydroxyde d'aluminium(III) Al(OH)<sub>3</sub>



- Produit ionique de l'eau



\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

**2 La chasse au péritio**

*Errare humanum est, perseverare diabolicum*

Ce problème propose d'étudier une découverte qui finalement n'en fut pas une !

Certaines questions, peu ou pas guidées, demandent de l'initiative de la part du candidat. Leur énoncé est repéré par une barre en marge. Il est alors demandé d'explicitier clairement la démarche, les choix et de les illustrer, le cas échéant, par un schéma. Le barème valorise la prise d'initiative et tient compte du temps nécessaire à la résolution de ces questions.

Les grandeurs complexes sont notées soulignées. Certaines données numériques et un formulaire sont disponibles en fin d'énoncé ; d'autres données relèvent de l'initiative du candidat.

*En astronomie, les sursauts radio rapides (fast radio burst) sont de brèves émissions radio intenses, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés péritios (perytions), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.*

*Après s'être intéressé à la structure d'un miroir de radiotélescope, on détaillera les péritios, pour en arriver à leur origine, finalement identifiée en 2015.*

**I.A - Un miroir pour les ondes électromagnétiques****I.A.1)**

- Q1.** Énoncer les équations de Maxwell. Que deviennent-elles dans une région vide de charges et de courants ? On se placera dans cette situation dans toute la sous-partie I.A.
- Q2.** En déduire l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique (équation de d'Alembert).

On considère une onde électromagnétique dans le demi-espace  $x < 0$ , dont le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \exp[i(\omega t - kx)] \vec{u}_y, \quad E_0 > 0 \quad (\text{I.1})$$

- Q3.** Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde ainsi que son état de polarisation. Établir la relation, dite relation de dispersion, entre  $k$  et  $\omega$ .

Cette onde rencontre une plaque métallique plane, constituée d'un conducteur parfait, dont la surface est située en  $x = 0$  (figure 8).

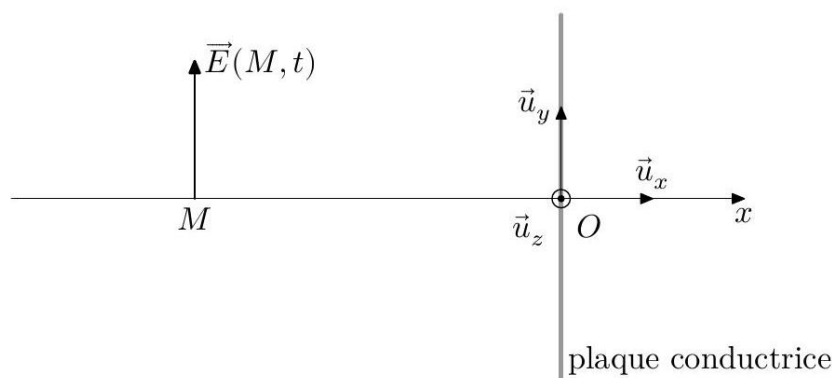


FIGURE 8 – Onde électromagnétique rencontrant un conducteur parfait

On rappelle les relations de passage du champ électromagnétique entre un milieu 1 et un milieu 2,

$$\vec{E}_2(M, t) - \vec{E}_1(M, t) = \frac{\sigma(M, t)}{\epsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{I.2})$$

$$\vec{B}_2(M, t) - \vec{B}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}_s(M, t) \wedge \vec{n}_{1 \rightarrow 2} \quad (\text{I.3})$$

où  $M$  est un point de l'interface,  $\vec{E}_k(M, t)$  et  $\vec{B}_k(M, t)$  les limites des champs dans le milieu  $k$  avec  $k = 1$  ou  $2$ , en un point  $M_k \rightarrow M$ ,  $\sigma(M, t)$  la densité surfacique de charge en  $M$ ,  $\vec{j}_s(M, t)$  la densité de courant surfacique à l'interface et  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2}$  le vecteur unitaire normal à l'interface en  $M$ , dirigé du milieu 1 vers le milieu 2.

- Q4.** Rappeler la définition d'un conducteur parfait. Que peut-on alors dire du champ  $\vec{E}(M, t)$  dans un tel milieu ?
- Q5.** Le champ électrique de l'onde décrite par l'équation (I.1) vérifie-t-il la relation de passage (I.2) ?

Dans le demi-espace  $x < 0$ , règne aussi une onde de la forme  $\vec{E}_r(M, t) = \vec{E}_{0r} \exp [i(\omega t + k'x)]$ .

Préciser  $k'$  et, en utilisant les relations de passage, déterminer  $\vec{E}_{0r}$ . Préciser la direction et le sens de propagation de cette onde ainsi que son état de polarisation.

- Q6.** Dans le milieu  $x < 0$ , établir l'expression des champs électrique réel  $\vec{E}(M, t)$  et magnétique réel  $\vec{B}(M, t)$  résultants. Comment qualifier l'onde correspondante ?

**I.A.2)** On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite figure 9, où E est un émetteur d'ondes centimétriques, P une plaque métallique, A une antenne reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue  $U$  proportionnelle à la moyenne temporelle  $\langle \|\vec{E}\|^2 \rangle$  du carré de la norme du champ électromagnétique au niveau de l'antenne A.

On place la plaque P à une distance  $D$  d'environ 46 cm de l'émetteur et on relève la tension  $U$  délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la distance  $d$  entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en figure 10.

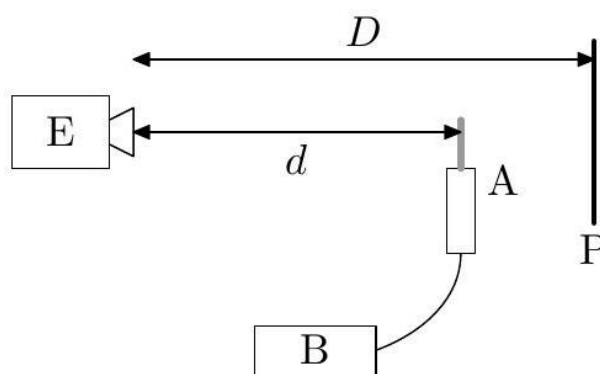
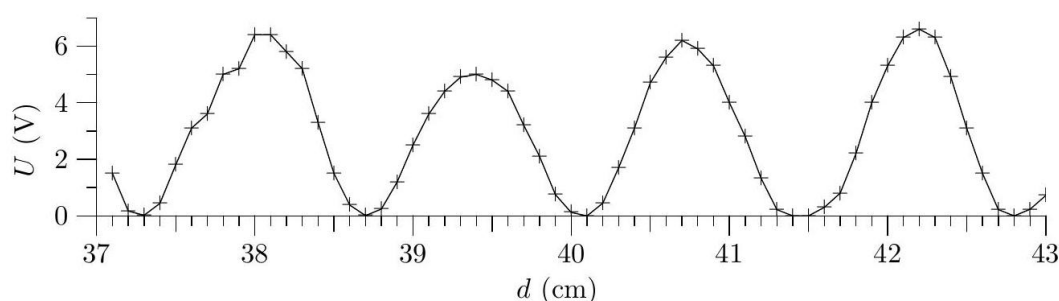


FIGURE 9 – Dispositif expérimental à ondes centimétriques

FIGURE 10 – Tension  $U$  en fonction de la distance  $d$  entre l'antenne et l'émetteur

**Q7.** Déduire de l'enregistrement de la figure 10 la fréquence  $f$  des ondes utilisées.

Le constructeur annonce une fréquence  $f_{\text{cons}} = 11 \pm 1,1$  GHz, soit une incertitude-type  $u_{\text{cons}} = \frac{1,1}{\sqrt{3}} = 0,6$  GHz.

**Q8.** Estimer l'incertitude-type sur la fréquence déterminée expérimentalement et discuter de l'acceptabilité de la mesure par rapport aux données constructeur par un calcul d'écart normalisé.

On rappelle que le champ magnétique est nul dans un conducteur parfait.

**Q9.** Déterminer la densité de courant surfacique  $\vec{j}_s(M, t)$  sur le conducteur dans le cas représenté figure 8. Quelle est la source physique du champ réfléchi  $\vec{E}_r(M, t)$  ?

On utilise un émetteur d'ondes centimétriques, générant un champ électrique de la forme  $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \exp[i(\omega t - kx)] \vec{u}_y$ . On remplace le plan métallique de la figure 8 par une grille métallique, constituée de barreaux parallèles séparés d'une distance très inférieure à la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde électromagnétique émise par le générateur. On admet que, dans ce cas, la grille se comporte comme un plan conducteur dans lequel les seuls courants électriques qui peuvent s'établir ont même direction que les barreaux.

On considère trois situations différentes par l'orientation de la grille par rapport au champ  $\vec{E}$  (figure 11).

**Q10.** Dans chacun de ces trois cas, décrire le plus précisément possible le champ électrique observé en  $x > 0$ .

**Q11.** À quel dispositif rencontré en travaux pratiques cette grille fait-elle penser ?

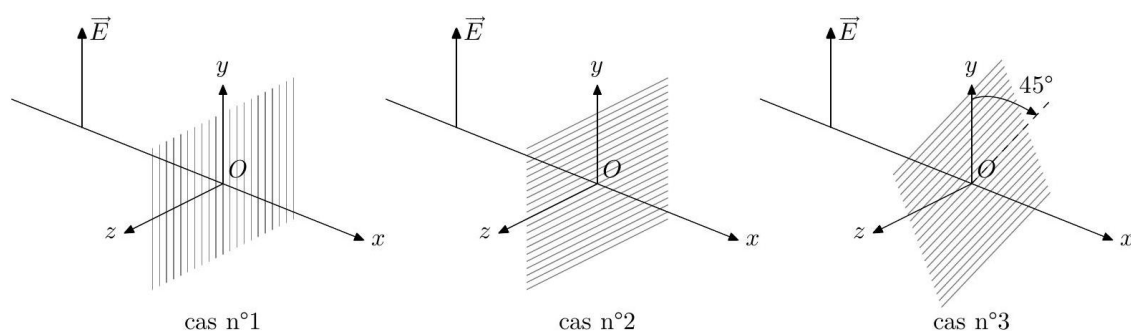


FIGURE 11 – Onde électromagnétique incidente sur une grille métallique

## I. B - L'énigme des péritios

L'observatoire de Parkes, en Australie, dispose d'un radiotélescope de 64 m de diamètre, utilisé entre autres pour l'étude des pulsars extragalactiques. En analysant d'anciens enregistrements, on a trouvé qu'en 1998 le télescope de Parkes a détecté des sursauts radios rapides, appelés "péritios". Leur origine fut une énigme, résolue seulement en 2015.

Les péritios sont des signaux radio d'une durée de quelques centaines de millisecondes. Ils sont composés d'ondes électromagnétiques de fréquences variables et de l'ordre du GigaHertz, similaires aux ondes émises par un pulsar et qui se sont propagées à travers le plasma intergalactique. La figure 12 représente une analyse d'un péritio :

- En abscisse est porté le temps auquel l'onde a été captée par le radiotélescope (l'origine des temps étant arbitraire) ;
- en ordonnée est portée la fréquence de l'onde détectée.

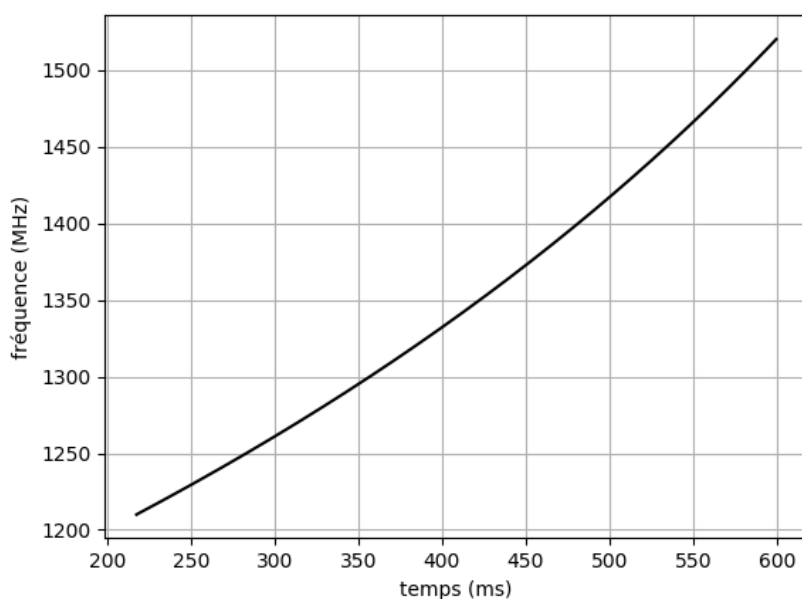


FIGURE 12 – Structure temporelle et fréquentielle d'un péritio

**I.B.1)** Afin de caractériser le décalage temporel des ondes détectées selon leur fréquence, détaillons la modélisation d'un plasma froid dilué. Il est constitué :

- de cations de masse  $M$ , de charge  $+e$  à la densité volumique  $n_c$  ;
- d'électrons de masse  $m_e$ , de charge  $-e$  à la densité volumique  $n_e$ .

On fait les hypothèses suivantes :

- on néglige les interactions entre les particules (plasma peu dense), elles ne sont alors soumises qu'au champ électromagnétique de l'onde présente dans le plasma ;
- comme  $M \gg m_e$ , les ions, du fait de leur inertie, sont considérés comme immobiles ; c'est le modèle du "plasma froid" où l'on néglige l'énergie d'agitation thermique des ions, considérés comme "froids" ;
- les cations et les électrons ont la même densité volumique uniforme :  $n_e = n_c$  ;
- le plasma est soumis à une onde électromagnétique plane pseudo-progressive harmonique transverse :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp [i(\omega t - \underline{k}x)]$$

se propageant selon  $\vec{k} = k \vec{u}_x$ .

**Q12.** Montrer que la densité volumique de charge  $\rho$  est nulle.

**Q13.** En considérant que les électrons ne sont soumis qu'à la seule force électrique (on néglige l'effet du champ magnétique), montrer que la densité volumique de courant dans le plasma est reliée au champ électrique par une relation de la forme

$$\vec{j} = \underline{\theta}_B \vec{E}$$

et exprimer la conductivité complexe  $\underline{\theta}_B$  en fonction des données.

**Q14.** À partir des équations de Maxwell, établir la relation de dispersion sous la forme

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

où l'on exprimera la pulsation plasma  $\omega_p$  en fonction de  $n_e$ ,  $m_e$ ,  $e$  et  $\varepsilon_0$ .

**Q15.** À quelle condition sur  $\omega$  l'onde peut-elle se propager dans le plasma ?

**Q16.** Établir alors l'expression de la vitesse de phase  $v_\varphi(\omega)$  en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_p$  et  $c$ .

**I.B.2)** On considère un ensemble d'ondes électromagnétiques émises par un astre situé à une distance  $L$  de la Terre. Ces ondes sont toutes des ondes planes progressives sinusoïdales dont les pulsations appartiennent à l'intervalle  $[\omega_{\min}, \omega_{\max}]$ . Toutes ces ondes sont émises au même instant  $t_0$ .

Ces ondes parcourent l'espace interstellaire qui peut être assimilé à un plasma très dilué avec typiquement  $n_e \approx 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$ . On suppose  $\omega_{\min} > \omega_p$ , ce qui fait que le temps de parcours de l'onde ayant la pulsation  $\omega$  est :

$$t(\omega) = \frac{L}{v_\varphi(\omega)}$$

On définit la mesure de dispersion DM (pour dispersion measure) par  $DM = n_e L$ .

- Q17.** Calculer la valeur numérique de la fréquence plasma  $f_p$  pour le plasma interstellaire. Montrer que pour des ondes dont la fréquence  $f$  est de l'ordre du gigahertz, on peut écrire :

$$t(f) \approx \frac{L}{c} - A \frac{DM}{f^2}$$

où l'on exprimera  $A$  en fonction de  $e$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $m_e$  et  $c$ .

- Q18.** Calculer la valeur de  $A$ .

- Q19.** Cette relation est-elle qualitativement en accord avec l'enregistrement de la figure 12 ?

Dans la définition  $DM = n_e L$ , on exprime usuellement la densité électronique  $n_e$  en  $\text{cm}^{-3}$  et la distance  $L$  en parsec, unité de distance astronomique ; la mesure de dispersion est alors donnée en  $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

- Q20.** À partir de la figure 12, estimer la mesure de dispersion  $DM$ , en exprimant le résultat d'abord en unités du système international puis en  $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$ .

- Q21.** Les mesures de dispersion mesurées pour des objets extragalactiques sont usuellement de quelques centaines de  $\text{pc} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Peut-on exclure une origine extragalactique aux péricos ?

*Malgré cela, différents indices ont fait pencher la balance vers une origine terrestre des péricos : détectations dans des directions en dessous de la ligne d'horizon, ou sur un large champ de visée. Et surtout, ces phénomènes se produisent pendant les heures de bureau, en semaine.*

*En 2014, l'observatoire de Parkes s'est doté d'un enregistreur plus performant, pouvant couvrir une bande de fréquence allant de 402 MHz à 3 GHz, l'équipement utilisé jusqu'alors ne permettant d'explorer qu'une bande de 400 MHz de large, centrée sur 1382 MHz.*

*Des chercheurs ont alors découvert que plusieurs péricos sont associés à une émission d'onde électromagnétique dans le domaine de fréquence de 2,3 à 2,5 GHz, inaccessible avec l'ancien matériel. Il est apparu que les péricos sont toujours accompagnés d'une émission à 2,4 GHz, mais que l'on observe de nombreuses émissions à 2,4 GHz non accompagnées de péricos. L'analyse des enregistrements sur deux mois montre que les péricos sont répartis pendant la journée, entre 9 h et 17 h.*

*Ces observations ont permis aux chercheurs de trouver le coupable : un four à micro-ondes utilisé par le personnel de l'observatoire. La sous-partie I.C étudie le four à micro-ondes afin de déterminer si l'ouverture de la porte du four avant la fin de son fonctionnement permet d'expliquer les péricos observés.*

## I.C - Le four à micro-ondes

Un four à micro-ondes est constitué d'un klystron, qui émet une onde électromagnétique généralement à la fréquence  $f = 2,45$  GHz. Cette onde remplit la cavité du four. Cette cavité est un parallélépipède entouré de parois métalliques, délimitant l'espace  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq d$  (figure 13).

- I.C.1)** On considère dans un premier temps que les parois du four sont parfaitement conductrices, l'espace intérieur au four étant assimilé au vide. Le champ électrique dans la cavité se met alors sous la forme :

$$\begin{cases} E_x(x, y, z, t) = E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_y(x, y, z, t) = E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) \\ E_z(x, y, z, t) = E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) \end{cases}$$

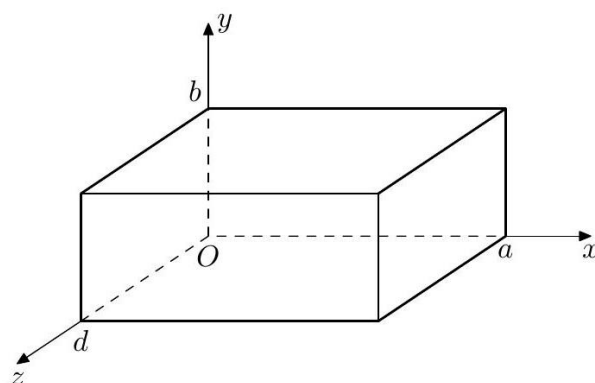


FIGURE 13 – Cavité d'un four à micro-ondes

**Q22.** Montrer que seules des valeurs discrètes de  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_z$  sont possibles, repérées respectivement par des entiers  $m$ ,  $n$  et  $\ell$ .

Le triplet  $(m, n, \ell)$  caractérise un mode propre.

**Q23.** En déduire l'expression des fréquences  $f_{mnl}$  des modes propres possibles dans la cavité.

Pour étudier le champ électromagnétique dans un four, des chercheurs ont construit un modèle ayant pour dimensions intérieures  $a = 36,0$  cm,  $b = 24,0$  cm et  $d = 26,5$  cm, alimenté par un klystron de fréquence  $f = 2,45$  GHz. Ils ont placé dans le four une feuille de papier imbibée d'hexahydrate de chlorure de cobalt ( $\text{CoCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ), de couleur rose, tandis que la forme anhydre est de couleur bleu ciel. Lorsque la température du papier augmente, l'hexahydrate de chlorure de cobalt passe sous forme anhydre et prend la couleur bleue.

La figure 14 présente les résultats obtenus en fonction de la position dans le four de la feuille de papier.

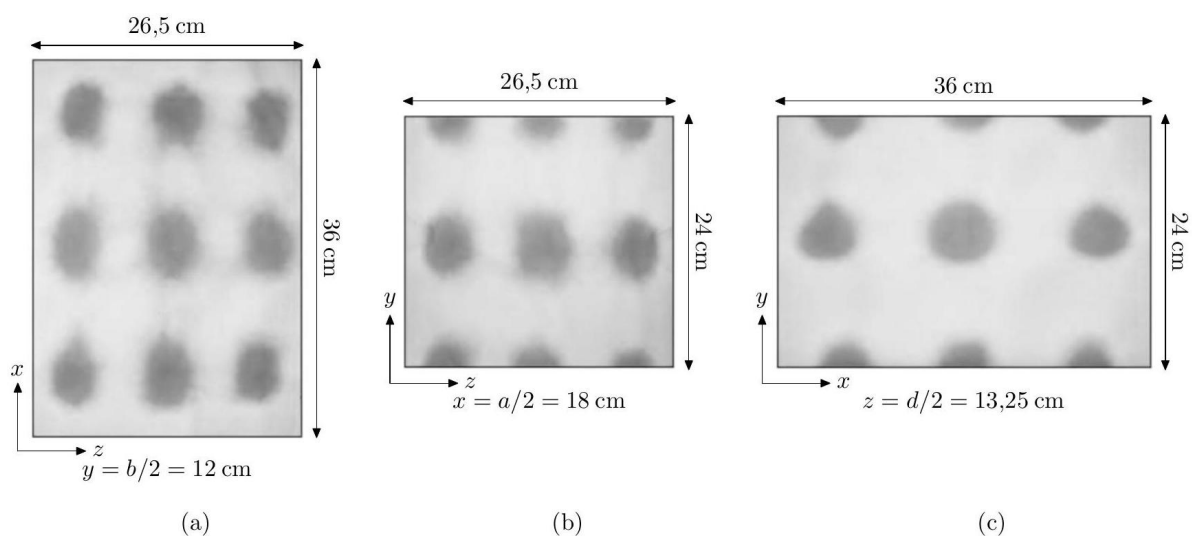


FIGURE 14 – Aspect du papier imbibé de chlorure de cobalt, en fonction de sa position dans le four - les tâches sombres correspondent à la couleur bleue

**Q24.** Déterminer la valeur du triplet  $(m, n, \ell)$ .

La fréquence du mode propre observée est-elle en accord avec la valeur donnée pour le klystron ? Justifier précisément l'aspect de la figure 14b en s'intéressant aux conditions aux limites sur les parois  $y = 0$  et  $z = 0$ .

L'ouverture de la porte d'un four à micro-ondes déclenche l'arrêt du klystron générant l'onde. On observe alors que le champ électromagnétique présent dans la cavité, qui n'est plus entretenu, décroît au cours du temps. Nous allons déterminer une constante de temps caractéristique de cette atténuation.

**I.C.2)** On considère une cavité simplifiée à une dimension entre deux plaques conductrices de surface  $S$ , perpendiculaires à l'axe  $Ox$ , situées en  $x = 0$  et  $x = a$ . Le champ électrique régnant dans cette cavité, en négligeant les effets de bord, est de la forme :

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

où  $n$  est un entier strictement positif.

On considère toujours que les parois sont parfaitement conductrices.

**Q25.** Établir l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(M, t)$  dans la cavité. On notera  $B_0$  son amplitude maximale, que l'on exprimera en fonction de  $E_0$ .

**Q26.** Établir l'expression  $W$  de l'énergie électromagnétique totale contenue dans la cavité, en fonction de  $B_0$ , des caractéristiques de la cavité et de  $\mu_0$ . Que constate-t-on ?

**I.C.3)** Pour rendre compte de la décroissance temporelle du champ électromagnétique en l'absence de source d'onde, il faut tenir compte de la conductivité électrique finie  $\sigma$  des parois métalliques. Les parois d'un four à micro-ondes sont en acier inoxydable, de conductivité électrique  $\sigma = 1,5 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Nous allons donc étudier l'interaction d'une onde électromagnétique avec un conducteur métallique.

On considère un milieu métallique, conducteur ohmique de conductivité  $\sigma$ , occupant le demi-espace  $x > 0$ .

**Q27.** Comment se simplifie l'équation de Maxwell-Ampère si  $\varepsilon_0 f \ll \sigma$  ? Cette condition est-elle vérifiée dans le cadre du four à micro-ondes ?

**Q28.** Établir alors l'équation vérifiée par  $\vec{B}(M, t)$  dans le conducteur. Qu'est-ce qui permet de dire qu'elle traduit un phénomène irréversible ? Citer un phénomène décrit par une équation analogue dans un autre domaine de la physique que l'électromagnétisme.

On cherche une solution de cette équation dans le domaine  $x > 0$  sous la forme :

$$\underline{\vec{B}}(x, t) = \underline{f}(x) \exp(i\omega t) \vec{u}_z$$

**Q29.** Établir et résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction complexe  $\underline{f}(x)$ , sachant que l'on impose en  $x = 0$  le champ  $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . On posera une longueur caractéristique  $\delta$  que l'on exprimera en fonction de  $\mu_0, \sigma$  et  $\omega$ .

**Q30.** Commenter l'expression du champ  $\vec{B}(x, t)$  (partie réelle de  $\underline{\vec{B}}(x, t)$ ) dans le conducteur. Donner l'interprétation de  $\delta$ .

**Q31.** Rappeler l'expression de la puissance volumique cédée par un champ électromagnétique à un conducteur ohmique.

**Q32.** Établir l'expression de la puissance moyenne (temporelle) dissipée dans les deux parois de la cavité de section  $S$ , en fonction de  $B_0$ ,  $\omega$ ,  $\delta$ ,  $S$  et  $\mu_0$ .

On définit le facteur de qualité de la cavité par :

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie stockée dans la cavité}}{\text{énergie dissipée par période}}.$$

**Q33.** En admettant que l'on puisse prendre en première approximation l'expression de l'énergie totale établie en considérant les conducteurs des parois comme parfaits, établir l'expression du facteur de qualité de la cavité en fonction de  $a$  et  $\delta$ .

**Q34.** Calculer la valeur de  $Q$  pour un four à micro-ondes, avec  $a = 36$  cm.

**Q35.** Montrer que l'énergie totale  $W(t)$  décroît avec un temps caractéristique  $\tau$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega$  et  $Q$ .

**Q36.** Calculer numériquement  $\tau$ . Peut-on expliquer les pertes par le champ émis lors de l'ouverture d'un four à micro-ondes ?

## Données

|                                     |                                                         |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Célérité de la lumière dans le vide | $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$                 |
| Permittivité diélectrique du vide   | $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ |
| Perméabilité magnétique du vide     | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$          |
| Constante de Planck                 | $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J.s}^{-1}$             |
| Charge élémentaire                  | $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$                    |
| Masse de l'électron                 | $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$                 |
| Parsec                              | $1 \text{ pc} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$         |
| Constante des gaz parfait           | $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$            |

## Formulaire

Soit  $\vec{A}$  un champ vectoriel s'exprimant en coordonnées cartésiennes par  $\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{u}_x + A_y(x, y, z)\vec{u}_y + A_z(x, y, z)\vec{u}_z$ .

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) &= \overrightarrow{\text{grad}(\text{div}\vec{A})} - \Delta\vec{A} \\ \text{rot}\vec{A} &= \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{u}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{u}_z \end{aligned}$$

**FIN DU DEVOIR**