

1 Étude de l'alliage 2024. Centrale MP 2015, Physique-Chimie 2

A.1) Étude de la phase α

- a) Dans la phase α les atomes de cuivre sont dispersés au sein d'une matrice d'aluminium, c'est à dire au sein d'un réseau d'atomes d'aluminium de type cubique faces centrées.

Sites octaédriques :

Ils sont situés au milieu de chaque arête et au centre du cube. On peut y loger une sphère de rayon R_O telle que $2R_O + 2R(Al) = a$ en appelant a le paramètre de maille. Comme les atomes d'aluminium sont en contact le long de la diagonale d'une face du cube on a :

$$4R(Al) = \sqrt{2}a$$

En éliminant a on obtient donc :

$$R_O = (\sqrt{2} - 1) R(Al) = 59 \text{ pm}$$

Sites tétraédriques :

Il sont situés aux centres des 8 petits cubes d'arête $a/2$. En écrivant que le contact se fait le long de la grande diagonale d'un cube d'arête $a/2$, on a :

$$R(Al) + R_T = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

En éliminant a on obtient :

$$R_T = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - 1 \right) R(Al) = 32 \text{ pm}$$

- b) La question est de savoir si les atomes de cuivre peuvent ou non se placer dans les sites interstitiels octaédriques ou tétraédriques de l'aluminium. D'après les données, $R(Cu) = 128 \text{ pm}$, le cuivre ne peut donc ni occuper un site octaédrique, ni occuper un site tétraédrique.

L'alliage 2024 est donc un alliage de substitution.

A.2) Étude de la phase β

- a) Les 4 atomes de cuivre situés sur des faces sont partagées sur deux mailles, il y a donc 2 atomes de cuivre en propre dans la maille.

Il y a 4 atomes d'aluminium en propre dans la maille :

- un atome d'aluminium en propre au centre de la maille ;
- deux atomes d'aluminium aux centres de faces qui comptent pour 1/2 ;
- huit atomes d'aluminium aux sommets qui comptent pour 1/8 ;
- 4 atomes d'aluminium sur les arêtes qui comptent pour 1/4.

La formule de la phase β est donc Al_4Cu_2 ou tout aussi bien Al_2Cu .

- b) Considérons l'atome de cuivre situé sur la face en bas à droite : il est entouré par huit éléments aluminium plus proches voisins : les 4 situés aux sommets du carré, les deux entités sur les centres de face situés sur la gauche, et deux autres entités sur la maille de droite voisine non représentée.

L'atome de cuivre est entouré de huit éléments aluminium plus proches voisins.

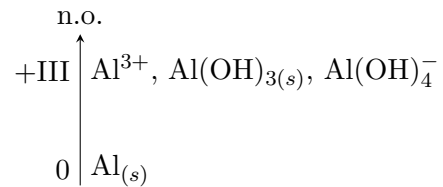
- c) D'après la question a), le volume de la maille étant a^2h :

$$\rho = \frac{4M_{Al} + 2M_{Cu}}{\mathcal{N}_a \times a^2h} \quad \text{donc} \quad \boxed{\rho = 4,12 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}}$$

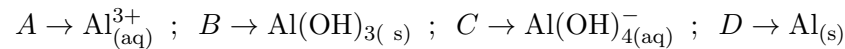
B Analyse chimique de l'alliage

B.1) Première phase : Séparation du cuivre et de l'aluminium

- a) La réaction se passe à la surface de l'alliage. Avec un alliage en poudre, on augmente la surface de contact et donc la vitesse de réaction.
- b) Un calcul des nombres d'oxydation de l'élément aluminium dans les différentes espèces conduit à :



D'autre part, plus l'espèce contient de groupement OH, plus elle est en milieu basique. En conclusion les espèces occupent les domaines :



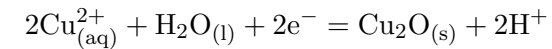
- c) À la limite d'apparition du précipité, l'équilibre est vérifié et on peut considérer que la quasi-totalité de l'aluminium est encore sous forme $\text{Al}_{(\text{aq})}^{3+}$. Il est alors possible d'écrire simultanément :

$$K_s = [\text{Al}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 \quad \text{et} \quad [\text{Al}^{3+}] = C$$

d'où $[\text{HO}^-]^3 = K_s/C$. On en déduit $[\text{HO}^-] = 10^{-10} \text{ mol.L}^{-1}$ et donc $\text{pH} = 4$.

Ce résultat est compatible avec la frontière verticale du diagramme de la figure 3.

- d) Écrivons la demi-équation d'oxydo-réduction :



Pour la formule de Nernst :

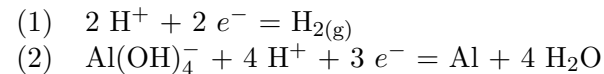
$$E = E^\circ + 0,03 \log \left(\frac{[\text{Cu}^{2+}]^2}{[\text{H}^+]^2} \right) = E^\circ + 0,06 \log ([\text{Cu}^{2+}]) + 0,06 \text{pH}$$

et donc une pente de $+0,06 \text{ V/pH}$.

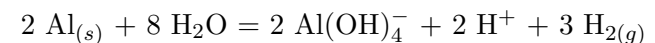
- e) L'aluminium solide et l'eau ont des domaines disjoints, l'aluminium solide va donc être oxydé.

Le cuivre solide et l'eau ont des domaines communs, le cuivre n'est pas attaqué par l'eau.

En milieu très basique ($\text{pH} > 11$) l'aluminium solide est oxydé en Al(OH)_4^- et le dégagement de di-hydrogène observé provient de la réduction de H^+ :



On fait $3 \times (1) - 2 \times (2)$:



équation que l'on écrit en milieu basique :



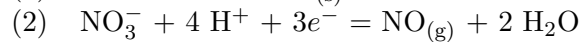
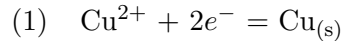
- f) En milieu très basique, l'élément aluminium se trouve dans un composé ionique Al(OH)_4^- en solution alors que le cuivre est sous forme solide.

En milieu neutre, il se serait formé de l'hydroxyde d'aluminium solide $\text{Al(OH)}_{3(s)}$ qu'il aurait été difficile de séparer du cuivre solide.

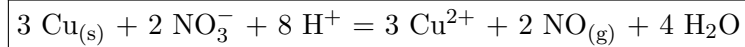
g) On peut ainsi espérer accélérer la réaction.

II.B.2) Deuxième phase : Dissolution du cuivre

Grâce aux demi-équations électroniques, on en déduit l'équation de la réaction :



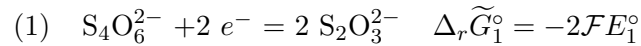
On fait $2 \times (2) - 3 \times (1)$:



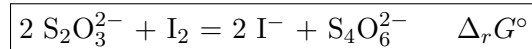
Cette réaction est totale puisque $E^\circ(\text{NO}_3^-/\text{NO}) - E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = 0,96 - 0,34 = 0,62 > 0,25 \text{ V}$.

II.B.3) Troisième phase : Dosage du cuivre dans l'alliage

a) Déterminons la constante de réaction associée à (R3)



(2) - (1) donne :



On a :

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r \widetilde{G}_2^\circ - \Delta_r \widetilde{G}_1^\circ = -2\mathcal{F}(E_2^\circ - E_1^\circ)$$

d'où :

$$K^\circ = \exp\left(\frac{2\mathcal{F}(E_1^\circ - E_2^\circ)}{RT}\right) = 1,9 \times 10^{18}$$

Cette réaction est donc bien totale.

b) Le nombre de moles d'ions thiosulfate versé à l'équivalence est égal à deux fois le nombre de moles de diiode initialement présent ; pour la réaction (R2), le nombre de moles d'ions cuivre (II) est égal au double du nombre de moles de diiode formé. Lors de la réaction (R1), un atome de cuivre fournit un ion cuivre (II), on en déduit :

$$n_{\text{Cu}} = n_{\text{S}_2\text{O}_3^{2-}}^{\text{versé}} = C \times V_{\text{eq}} \implies m_{\text{Cu}} = C \times V_{\text{eq}} \times M_{\text{Cu}}$$

Application numérique : $m_{\text{Cu}} = 3,96 \times 10^{-2} \text{ g}$

C'est à dire un pourcentage massique de l'ordre de 4% comme proposé dans l'énoncé.

c) La structure du cristal n'étant pas uniforme, on peut envisager de répéter l'expérience pour vérifier que la quantité prélevée est suffisamment importante pour représenter la structure moyenne du cristal.

2 La chasse au peritio

I.A - Un miroir pour les ondes électromagnétiques

Q1. Équations de Maxwell :

$$\text{Maxwell-Gauss} \quad \text{div } \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$$

$$\text{Maxwell-Thomson} \quad \text{div } \vec{B}(M, t) = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \vec{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t)$$

Dans une région vide de charges, elles deviennent :

$$\begin{aligned} \text{Maxwell-Gauss} & \quad \text{div } \vec{E}(M, t) = 0 \\ \text{Maxwell-Thomson} & \quad \text{div } \vec{B}(M, t) = 0 \\ \text{Maxwell-Faraday} & \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t} \\ \text{Maxwell-Ampère} & \quad \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t) \end{aligned}$$

Q2. Comme $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$$

par permutation des dérivées spatiales et temporelles (théorème de Schwarz).

De plus $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$ dans le vide. Avec l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient donc :

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

d'où, comme $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$:

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Q3. La direction de propagation de l'onde de la forme :

$\vec{E}_i(M, t) = E_0 \exp[i(\omega t - kx)] \vec{u}_y$ est selon l'axe Ox . En considérant $k > 0$, l'onde se propage selon $\vec{u}_x$. L'onde est polarisée rectilignement selon $\vec{u}_y$. Écrivons que le champ vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\forall(x, t), \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_0 \exp[i(\omega t - kx)] = 0$$

Comme $E_0 \neq 0$, on en déduit la relation de dispersion :

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$$

Q4. Le conducteur parfait correspond au cas théorique limite d'une conductivité électrique infinie : $\gamma \rightarrow \infty$. À l'intérieur d'un conducteur parfait, le champ électrique est nul : $\vec{E}(M, t) = \vec{0}$.

Q5. Écrivons la relation de passage en ne prenant en compte que le champ incident donné. Le milieu (1) est le métal, le milieu (2) le vide et $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{u}_x$, d'où :

$$E_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y = -\frac{\sigma(M, t)}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$$

En projetant selon $\vec{u}_y$, on obtient

$$\forall t, E_0 \exp(i\omega t) = 0$$

Comme $E_0 \neq 0$, cette condition ne peut être vérifiée. Le champ électrique donné ne vérifie donc pas la relation de passage.

Il existe donc un champ $\vec{E}_r(M, t)$, tel que le champ total $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t)$ vérifie la relation de passage.

L'onde réfléchie se propage dans le vide : $\boxed{k' = \frac{\omega}{c}}$. De plus le champ électrique doit être transverse :

$$\vec{E}_{0r} = E_{0ry} \vec{u}_y + E_{0rz} \vec{u}_z$$

À l'interface $x = 0$, on a donc pour tout t :

$$E_{0ry} \exp(i\omega t) \vec{u}_y + E_{0rz} \exp(i\omega t) \vec{u}_z + E_0 \exp(i\omega t) \vec{u}_y = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$$

En projetant selon $\vec{u}_x$, on obtient : $\sigma = 0$. Les projections sur $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ donne ensuite :

$$E_{0ry} = -E_0 \quad \text{et} \quad E_{0rz} = 0$$

On a finalement :

$$\boxed{\vec{E}_r(x, t) = -E_0 \exp[i(\omega t + kx)] \vec{u}_y}$$

Cette onde se propage dans le sens $-\vec{u}_x$ et elle est polarisée rectilignement selon $\vec{u}_y$.

Q6. Le champ électrique résultant est donné par :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M, t) &= E_0 \exp[i(\omega t - kx)] \vec{u}_y - E_0 \exp[i(\omega t + kx)] \vec{u}_y \\ &= -2i E_0 \exp(i\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y\end{aligned}$$

soit :

$$\vec{E}(M, t) = \text{Re}(\vec{E}(M, t)) = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{u}_y$$

On obtient le champ $\vec{B}$ par exemple avec l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial E}{\partial x} \vec{u}_z = -2E_0 k \cos(kx) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

On intègre par rapport à t , en prenant nulle la constante d'intégration (un terme constant représente un champ magnétique stationnaire et n'a pas de caractère ondulatoire) :

$$\vec{B}(M, t) = 2E_0 \frac{k}{\omega} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

soit comme $\omega = kc$:

$$\vec{B}(M, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

L'onde correspondante est une onde stationnaire, les champs électrique et magnétique étant en quadrature spatiale et temporelle.

Q7. La tension mesurée s'annule quand $\forall t, \vec{E} = \vec{0}$, soit aux points tels que $\sin(kx) = 0$. Les abscisses correspondantes vérifient donc

$kx = n\pi$, avec $n \in \mathbb{Z}$. Comme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, entre deux annulations successives, on a :

$$\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}.$$

Entre 4 annulations, on mesure

$$4 \frac{\lambda}{2} = (42,8 - 37,3) \text{ cm} = 5,5 \text{ cm}$$

d'où $\lambda = 2,75 \text{ cm}$. De $f = c/\lambda$ on déduit $f = 10,9 \text{ GHz}$.

Q8. On a déduit λ de la mesure des positions x_0 et x_4 des annulations extrêmes sur la courbe expérimentale. La graduation est de 1 mm, d'où une incertitude relative $u(x_0) = u(x_4) = \frac{0,5 \text{ mm}}{\sqrt{3}}$.

On en a déduit la longueur $L = x_4 - x_0$, d'où l'incertitude correspondante :

$$u(L)^2 = u(x_0)^2 + u(x_4)^2$$

soit :

$$u(L) = \sqrt{2} u(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times 0,5 \text{ mm} = 0,41 \text{ mm}$$

On en a déduit la longueur d'onde $\lambda = 2L/4 = L/2$, d'où

$$u(\lambda) = \frac{u(L)}{2} = 0,21 \text{ mm}.$$

La fréquence est donnée par $f = \frac{c}{\lambda}$, d'où (en supposant une incertitude nulle sur c) :

$$\frac{u(f)}{f} = \frac{u(\lambda)}{\lambda}$$

On en déduit :

$$u(f) = u(\lambda) \frac{f}{\lambda} = 0,21 \frac{10,9}{27,5}$$

soit : $\boxed{u(f) = 0,08 \text{ GHz}}$.

Le Z-score entre la valeur mesurée et celle donnée par le constructeur est donné par :

$$Z = \frac{11,0 - 10,9}{\sqrt{(0,6)^2 + (0,08)^2}} = 0,17$$

La condition $Z < 2$ est largement vérifiée : la valeur mesurée est bien compatible avec la valeur du constructeur.

Q9. On a déterminé le champ magnétique en $x < 0$:

$$\vec{B}(M, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Le champ étant nul dans le conducteur, la relation de passage en $x = 0$ s'écrit :

$$\vec{B}(x = 0^-, t) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge (-\vec{u}_x)$$

soit :

$$\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z = -\mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_x$$

Les courants surfaciques sont contenus dans le plan $x = 0$, donc de la forme :

$$\vec{j}_s(t) = j_{sy} \vec{u}_y + j_{sz} \vec{u}_z.$$

La relation de passage s'écrit alors :

$$\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{u}_z = \mu_0 j_{sy} \vec{u}_z - j_{sz} \vec{u}_y$$

On a donc $j_{sz} = 0$ et $j_{sx} = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t)$, soit :

$$\boxed{\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_y}$$

Ces courants surfaciques sont la source du champ réfléchi $\vec{E}_r(M, t)$.

Remarque :

Les courants surfaciques sont créés par le champ incident $\vec{E}_i(M, t)$; il est donc logique qu'ils lui soient colinéaires, c'est-à-dire ici selon $\vec{u}_y$.

Q10. Cas n° 1 : les barreaux sont parallèles à $\vec{E}$. Les courants peuvent s'y développer et la grille est vue comme un plan conducteur. On a $\vec{E} = \vec{0}$ pour $x > 0$. Le champ électrique est absorbé par le métal.

Cas n°2 : les barreaux sont perpendiculaires à $\vec{E}$. Les courants ne peuvent donc pas s'y développer. Le champ n'interagit donc pas avec la grille, et continue son chemin.

On a donc $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$ pour $x > 0$.

Cas n°3 : On considère les vecteurs unitaires $\vec{u}_\perp$ perpendiculaire aux barreaux et $\vec{u}_\parallel$ parallèle aux barreaux. On peut donc écrire :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_\perp + \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_\parallel$$

En reprenant les deux cas précédents, on conclut que la composante parallèle aux rayons est absorbée, tandis que la composante normale aux rayons est transmise, d'où pour $x > 0$:

$$\vec{E}(M, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - kx) \vec{u}_\perp$$

Avec $\vec{u}_\perp = \frac{\vec{u}_y}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{u}_z}{\sqrt{2}}$, on peut écrire pour $x > 0$:

$$\vec{E}(M, t) = \frac{E_0}{2} \cos(\omega t - kx) [\vec{u}_y + \vec{u}_z]$$

Q11. La grille se comporte comme un polariseur pour les ondes centimétriques.

I.B - L'énigme des péritios

Q12. Comme $n_c = n_e$ on a :

$$\boxed{\rho = +en_c - en_e = 0}$$

Q13. On applique la seconde loi de Newton à un électron :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

En régime sinusoïdal forcé, la notation complexe donne :

$$i\omega m \vec{v} = -e\vec{E}$$

d'où

$$\vec{v} = -\frac{e}{im\omega} \vec{E}$$

La densité volumique de courant est donnée par :

$$\vec{j} = -ne\vec{v} = \frac{ne^2}{im\omega} \vec{E}$$

En identifiant avec $\vec{j} = \underline{\theta}_B \vec{E}$ on en déduit la conductivité complexe :

$$\boxed{\underline{\theta}_B = \frac{ne^2}{im\omega}}$$

La conductivité électrique est imaginaire pure.

Q14. De l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ on déduit :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}.$$

On a d'une part :

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{E}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

car $\text{div} \vec{E} = 0$ compte tenu de la neutralité du plasma. D'autre part :

$$\frac{\partial(\vec{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

On a donc :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \underline{\theta}_B \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Avec $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}x)]$ on obtient après simplification :

$$-\underline{k}^2 = i\omega \mu_0 \underline{\theta}_B - \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\mu_0 ne^2}{m} - \frac{\omega^2}{c^2}$$

d'où la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{m} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ane^2}{m\epsilon_0 c^2}$$

On a donc :

$$\boxed{\underline{k}^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad \text{avec} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}}$$

Q15. L'onde peut se propager si $\underline{k}$ est réel, c'est-à-dire si $\underline{k}^2 > 0$. Il faut donc $\omega > \omega_p$.

Q16. Dans le cas où l'onde se propage, on a $\underline{k} = k \in \mathbb{R}$. La vitesse de phase est alors donnée par :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}}$$

Q17. La fréquence plasma est :

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^2 \times (1,6 \times 10^{-19})^2}{9,1 \times 10^{-31} \times 8,85 \times 10^{-12}}} = 89 \text{ Hz}$$

Pour des fréquences de l'ordre du gigahertz, on a $f \gg f_p$ et donc :

$$t(f) = \frac{L}{v_\varphi(f)} = \frac{L}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{f_p}{f}\right)^2} \approx \frac{L}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{f_p^2}{f^2}\right)$$

En remplaçant f_p par son expression on obtient :

$$t(f) \approx \frac{L}{c} - A \frac{DM}{f^2} \quad \text{avec} \quad A = \frac{e^2}{8\pi^2 m_e c \varepsilon_0}$$

Q18. On calcule $A = 1,34 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Q19. D'après la relation $t(f) = \frac{L}{c} - A \frac{DM}{f^2}$, les signaux de fréquence plus élevée présentent un retard temporel plus grand lors de leur propagation ; ils sont donc reçus en dernier comme on peut le constater sur l'enregistrement : les signaux de fréquence plus petites arrivent en premier, par rapport aux signaux de fréquence plus grande qui présentent un retard de propagation plus important :

- la fréquence $f_1 = 1230 \text{ MHz}$ est reçue à la date $t_1 = 250 \text{ ms}$;
- la fréquence $f_2 = 1520 \text{ MHz}$ est reçue à la date $t_2 = 600 \text{ ms}$.

Q20. On repère deux instants de réception pour deux valeurs de la fréquences : $t_1 = 250 \text{ ms}$ pour $f_1 = 1230 \text{ MHz}$ et $t_2 = 600 \text{ ms}$ pour $f_2 = 1520 \text{ MHz}$.

On en déduit $t(f_2) - t(f_1) = A \times DM \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)$, d'où :

$$DM = \frac{t(f_2) - t(f_1)}{A \left(\frac{1}{f_1^2} - \frac{1}{f_2^2} \right)}$$

A.N. $DM = 1,14 \times 10^{25} \text{ m}^{-2}$.

Conversion : $1 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m} \times 10^6 \text{ m}^{-3}$; d'où :

$$DM = \frac{1,14 \times 10^{25}}{3,086 \times 10^{22}} = 3,7 \times 10^2 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3}$$

La mesure de dispersion vaut $DM = 3,7 \times 10^2 \text{ pc} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Q21. L'ordre de grandeur de la mesure de dispersion du signal ne permet pas d'exclure une origine extragalactique.

I.C - Le four à micro-ondes

Q22. Le champ électrique étant nul dans les parois métalliques, la continuité de sa composante tangentielle (relation de passage) implique la nullité de cette composante sur les parois du four.

Compte tenu de la forme du champ, cette condition est déjà vérifiée pour les parois $x = 0, y = 0$ et $z = 0$. Sur la paroi $x = a$, on doit avoir :

$$\forall y, z, t, \quad E_y(x = a, y, z, t) = E_z(x = a, y, z, t) = 0$$

ce qui entraîne :

$$\sin(k_x a) = 0 \quad \text{donc} \quad k_x a = m\pi \quad \text{avec} \quad m \in \mathbb{N}$$

De même, sur la paroi $y = b$, on doit avoir

$$\forall x, z, t, \quad E_x(x, b, z, t) = E_z(x, b, z, t) = 0$$

soit :

$$\sin(k_y b) = 0 \quad \text{donc} \quad k_y b = n\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

Enfin sur la paroi $z = d$ on doit avoir

$$\forall x, y, t, \quad E_x(x, y, d, t) = E_y(x, y, d, t) = 0$$

et donc :

$$\sin(k_z d) = 0 \quad \text{donc} \quad k_z d = \ell\pi \quad \text{avec} \quad \ell \in \mathbb{N}$$

On conclut donc par :

$$\boxed{k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad \text{et} \quad k_z = \frac{\ell\pi}{d} \quad \text{avec} \quad (m, n, \ell) \in \mathbb{N}^3}$$

Q23. On calcule :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = -k_x^2 E_x = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 E_x.$$

On a de même :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 E_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\left(\frac{\ell\pi}{d}\right)^2 E_z.$$

Le champ $\vec{E}$ vérifie l'équation de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

soit

$$-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{d}\right)^2\right] \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$$

La pulsation du mode $(m, n; \ell)$ est donc donnée par

$$\begin{aligned} \omega_{m,n,\ell} &= c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{d}\right)^2} \\ &= c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2} \end{aligned}$$

Avec $\omega_{n,m,\ell} = 2\pi f_{n,m,\ell}$ on en déduit la fréquence du mode (n, m, ℓ) :

$$\boxed{f_{m,n,\ell} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2}}$$

Q24. Les zones bleues correspondent aux zones où l'eau s'est évaporée, c'est-à-dire aux points chauds, où le champ a cédé le plus d'énergie à la matière. La puissance cédée étant proportionnelle à $\langle \vec{E}^2 \rangle$ (moyenne temporelle), ces zones correspondent au maximum de $\langle \vec{E}^2 \rangle$.

La dépendance selon x du champ quadratique est, selon la composante du champ, sous la forme :

$$\sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = 1 - \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right)$$

ou

$$\cos^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right).$$

Elle est donc sinusoïdale avec une période a/m . On voit sur les figures 14.a) et 14.c) qu'il y a 3 périodes selon x , d'où $m = 3$. On suit le même raisonnement pour les deux autres variables : Les figures 14.b) et 14.d) indiquent qu'il y a 2 période selon z , d'où $n = 2$. Enfin les figures 14.a) et 14.b) indiquent qu'il y a 3 période selon z , d'où $\ell = 3$.

Le mode observé est donc $\boxed{(m, n, \ell) = (3, 2, 3)}$

La fréquence de ce mode est :

$$f_{323} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{3}{0,36}\right)^2 + \left(\frac{2}{0,24}\right)^2 + \left(\frac{3}{0,265}\right)^2}$$

soit $f_{323} = 2,45 \times 10^9$ Hz, en accord avec les données.

Le champ électrique correspondant au mode $(3, 2, 3)$ s'écrit

$$\vec{E}_{323}(M, t) = \begin{cases} E_1 \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \\ E_2 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \\ E_3 \sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \end{cases}$$

La figure 14.b) correspond à $x = a/2$; on a donc $\sin\left(\frac{3\pi x}{a}\right) = -1$ et $\cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) = 0$. Le champ s'écrit alors :

$$\vec{E}_{323}\left(\frac{a}{2}, y, z, t\right) = \begin{cases} 0 \\ -E_2 \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \\ -E_3 \sin\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{3\pi z}{d}\right) \cos(\omega t) \end{cases}$$

Q25. Avec $\vec{E} = E(x, t) \vec{u}_y$, l'équation de Maxwell-Faraday donne :

$$\text{rot} \vec{E} = \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} \vec{u}_z = \frac{n\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'où :

$$\vec{B} = \frac{n\pi}{a\omega} E_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

La relation de dispersion, obtenue à partir de l'équation de d'Alembert, donne $\omega = \frac{nc\pi}{a}$, d'où :

$$\boxed{\vec{B} = B_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad B_0 = \frac{E_0}{c}}$$

Q26. La densité volumique d'énergie dans la cavité est :

$$u_{\text{em}} = \frac{\varepsilon_0 E^2(x, t)}{2} + \frac{B^2(x, t)}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t) + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t)$$

soit :

$$u_{\text{em}} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \left[\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t) + \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t) \right]$$

L'énergie totale est :

$$\begin{aligned} W(t) &= \int u_{\text{em}} d\tau = \int_0^a u_{\text{em}} S dx \\ &= \frac{SB_0^2}{2\mu_0} \int_0^a \left[\sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t) + \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t) \right] dx \\ &= \frac{SB_0^2}{2\mu_0} \left[\frac{a}{2} \sin^2(\omega t) + \frac{a}{2} \cos^2(\omega t) \right] \end{aligned}$$

soit :

$$\boxed{W = \frac{B_0^2 S a}{4\mu_0}}$$

L'énergie totale dans la cavité est constante au cours du temps. Ce résultat est attendu car il n'y a aucun phénomène dissipatif pris en compte avec un conducteur parfait.

Q27. Si E_0 est l'amplitude du champ électrique, l'amplitude du courant de conduction est donnée par

$$j_0 = \sigma E_0$$

et l'amplitude du courant de déplacement $\vec{J}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est donnée par

$$j_{d,0} = \omega \varepsilon_0 E_0 = 2\pi f \varepsilon_0 E_0.$$

Le courant de déplacement peut être négligé devant le courant de conduction si

$$\frac{j_{d,0}}{j_0} = \frac{2\pi \varepsilon_0 f}{\sigma} \ll 1.$$

Avec $\sigma = 1,5 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, on peut négliger le courant de déplacement si :

$$f \ll \frac{\sigma}{2\pi \varepsilon_0} = 2,7 \times 10^{16} \text{ Hz.}$$

Cette condition est largement vérifiée dans le four à micro-ondes où $f = 2,45 \times 10^9 \text{ Hz}$.

Q28. En négligeant le courant de déplacement, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

On en déduit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} = \mu_0 \sigma \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}.$$

Avec

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \Delta \vec{E}$$

et l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

on obtient :

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \mu \sigma \frac{d\vec{B}}{dt}}$$

Il s'agit d'une **équation de diffusion**. Sa non invariance par renversement du temps (changement de variable $t' = -t$), du fait de la dérivée temporelle d'ordre impair en t (premier ordre ici), traduit l'irréversibilité du phénomène.

Une telle équation régit l'évolution de la température dans un milieu siège d'un phénomène de conduction thermique.

Q29. Écrivons que le champ proposé vérifie l'équation précédente :

$$\forall x, t, \quad \frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} e^{i\omega t} = \mu_0 \sigma i\omega \underline{f}(x) e^{i\omega t}$$

soit :

$$\frac{d^2 \underline{f}}{dx^2} - i\omega \mu_0 \sigma \underline{f}(x) = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle linéaire homogène du second ordre est :

$$r^2 - i\omega \mu_0 \sigma = 0,$$

soit

$$r^2 = i\omega \mu_0 \sigma = \omega \mu_0 \sigma \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right).$$

Ses racines sont :

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\omega \mu_0 \sigma} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \pm \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} (1 + i) = \pm \frac{1 + i}{\delta}$$

en posant

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$$

homogène à une longueur, on en déduit la solution générale de l'équation différentielle :

$$\underline{f}(x) = \underline{A}_1 e^{(1+i)x/\delta} + \underline{A}_2 e^{-(1+i)x/\delta}.$$

Le champ magnétique (et donc $\text{Re}(\underline{f})$) ne peut diverger pour $x \rightarrow +\infty$, donc $\underline{A}_1 = 0$. En $x = 0$, la continuité du champ magnétique impose :

$$\vec{B}(x = 0, t) = B_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z = \underline{f}(0) e^{i\omega t} \vec{u}_z$$

d'où :

$$\underline{f}(0) = \underline{A}_2 = B_0.$$

On a donc :

$$\underline{f}(x) = B_0 e^{-(1+i)x/\delta}.$$

Q30. Le champ magnétique est donné par la partie réelle de :

$$\vec{B}(x, t) = B_0 e^{-(1+i)x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u}_z = B_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \vec{u}_z$$

soit

$$\vec{B}(x, t) = B_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \vec{u}_z$$

Le champ magnétique se propage dans le conducteur dans le sens des x croissants, avec une amplitude qui décroît exponentiellement sur une longueur caractéristique δ , d'autant plus petite que la pulsation est élevée (c'est l'effet de peau ; δ est alors appelée épaisseur de peau).

Q31. La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à un conducteur ohmique a pour expression :

$$p(M, t) = \vec{J}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) = \sigma \vec{E}(M, t)^2 = \frac{\vec{J}(M, t)^2}{\sigma}$$

Q32. Le vecteur densité de courant électrique est donné par l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned} \vec{j}(x, t) &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \vec{u}_y \\ &= \frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} \left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right] \vec{u}_y \end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta} \left[\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right]^2 \\ &= \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta} \left[\cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \sin^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right] \\ &= \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta} \left[1 - 2 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right]. \end{aligned}$$

La puissance volumique moyenne (temporelle) est donc donnée par :

$$\langle p(x) \rangle = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta}.$$

On considère une section S de paroi, dans le demi-espace $x > 0$ (avec les données relatives au four, on calcule une épaisseur de peau $\delta = 8,3 \mu\text{m}$, très faible devant l'épaisseur des plaques métalliques des parois, ce qui justifie de pouvoir les considérer comme semi-infinies). La puissance moyenne dissipée vaut :

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{+\infty} \langle p(x) \rangle S \, dx = \frac{SB_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} \int_0^{+\infty} e^{-2x/\delta} dx \\ &= \frac{SB_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} \left[-\frac{\delta}{2} e^{-2x/\delta} \right]_0^{+\infty} = \frac{SB_0^2}{2\mu_0^2 \sigma \delta} \end{aligned}$$

En prenant en compte les deux parois, on obtient la puissance moyenne totale dissipée $P = 2P_1$, soit :

$$P = \frac{SB_0^2}{\mu_0^2 \sigma \delta}.$$

On élimine σ à partir de l'expression de l'épaisseur de peau, soit :

$$\sigma = \frac{2}{\mu_0 \omega \delta^2}$$

d'où :

$$P = \frac{SB_0^2 \omega \delta}{2\mu_0}$$

Dans le cas d'une conductivité infinie, le champ électrique est nul sur les parois.

Dans le cas d'une conductivité finie, le champ sur la paroi $x = 0$ s'écrit :

$$\vec{E}(0, t) = \frac{B_0}{\mu_0 \delta} [\cos(\omega t) - \sin(\omega t)] \vec{u}_y$$

et a pour amplitude :

$$E_0 = \frac{B_0}{\mu_0 \delta \sqrt{2}} = \frac{B_0}{\mu_0 \sigma \sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} = \frac{B_0}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\mu_0 \sigma}}$$

On a vu que nous sommes dans le cas où $f\varepsilon_0 \ll \sigma$, soit $\frac{\omega}{\sigma} \ll \frac{1}{\varepsilon_0}$; on a donc $E_0 \ll \frac{B_0}{\mu_0 \varepsilon_0} = B_0 c$. Dans le cas du conducteur parfait, l'amplitude du champ électrique dans la cavité, superposition de deux ondes planes, a pour ordre de grandeur $E_{0,\text{cav}} \approx B_0 c$, et est nul sur les parois.

Ici, le champ sur les parois est négligeable devant le champ dans la cavité ; on peut donc considérer qu'en première approximation, le champ dans la cavité est peu perturbé par la conductivité finie des parois.

Q33. On a établi à la question 26 l'expression de l'énergie totale portée par le champ électromagnétique dans la cavité :

$$W = \frac{B_0^2 S a}{4\mu_0}.$$

On suppose cette expression toujours valable malgré la conductivité finie des parois. L'énergie dissipée dans les parois pendant une période $T = 2\pi/\omega$ s'exprime en fonction de la puissance P dissipée :

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = PT = \frac{2\pi}{\omega} P = \frac{2\pi}{\omega} \frac{SB_0^2 \omega \delta}{2\mu_0}.$$

Le facteur de qualité vaut donc :

$$Q = 2\pi \frac{W}{\mathcal{E}_{\text{diss}}} = 2\pi \frac{B_0^2 S a}{4\mu_0} \frac{\omega}{2\pi} \frac{2\mu_0}{SB_0^2 \omega \delta}$$

soit : $\boxed{Q = \frac{a}{2\delta}}$

Q34. On calcule $\delta = 8,3 \mu\text{m}$ pour le four, d'où :

$$\boxed{Q = 2,2 \times 10^4}$$

On remarque que $Q \gg 1$: l'atténuation est faible.

Q35. En l'absence de rayonnement, la variation de l'énergie électromagnétique contenue dans la cavité est donnée par l'énergie absorbée dans les parois. Entre t et $t + T$, le bilan d'énergie pour la cavité s'écrit donc :

$$W(t + T) - W(t) = -\mathcal{E}_{\text{diss}} = -2\pi \frac{W(t)}{Q}$$

Comme $Q \gg 1$, la variation relative d'énergie sur une période est très faible et on peut assimiler le taux de variation à une dérivée :

$$\frac{dW}{dt} \approx \frac{W(t + T) - W(t)}{T} = -2\pi \frac{W(t)}{QT}.$$

Avec $T = 2\pi/\omega$, on obtient :

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\omega}{Q} W(t) = 0.$$

L'énergie décroît de façon exponentielle selon la loi :

$$W(t) = W(0) e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{Q}{\omega}.$$

Q36. On calcule $\tau = 1,4 \mu\text{s}$.

La décroissance du champ présent dans la cavité lorsque l'on coupe le klystron se fait avec une durée bien plus faible que la durée typique d'un périclit. Le champ restant dans la cavité après ouverture de la porte ne permet pas d'expliquer l'observation des périclits.

Une étude plus poussée a montré que la source des péritios était le magnétron du four (source du champ magnétique) : un certain type de magnétron provoquerait l'émission des péritios. Cependant, la variation fréquentielle observée lors de l'émission reste inexpliquée.