

Théorème de la valeur moyenne

On démontre le théorème de la valeur moyenne :

Théorème

Soient $\vec{a}(M, t)$ et $\vec{b}(M, t)$ deux champs vectoriels (réels) qui s'écrivent sous la forme :

$$\vec{a}(M, t) = \text{Re} [\underline{\vec{a}}(M, t)] \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{a}}(M, t) = \underline{\vec{A}}(M) e^{i\omega t}$$

et

$$\vec{b}(M, t) = \text{Re} [\underline{\vec{b}}(M, t)] \quad \text{avec} \quad \underline{\vec{b}}(M, t) = \underline{\vec{B}}(M) e^{i\omega t}$$

où $\underline{\vec{A}}(M)$ et $\underline{\vec{B}}(M)$ sont deux champs vectoriels complexes qui ne dépendent que des coordonnées de M et pas du temps. Alors :

$$\langle \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{\vec{a}} \wedge \underline{\vec{b}}^* \right) \quad \text{et} \quad \langle \vec{a} \cdot \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{\vec{a}} \cdot \underline{\vec{b}}^* \right)$$

Démonstration : démontrons la première relation. On part des identités :

$$\vec{a} = \frac{\underline{\vec{a}} + \underline{\vec{a}}^*}{2} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \frac{\underline{\vec{b}} + \underline{\vec{b}}^*}{2}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge \vec{b} &= \frac{1}{4} \left[(\underline{\vec{a}} + \underline{\vec{a}}^*) \wedge (\underline{\vec{b}} + \underline{\vec{b}}^*) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\underline{\vec{a}} \wedge \underline{\vec{b}} + \underline{\vec{a}} \wedge \underline{\vec{b}}^* + \underline{\vec{a}}^* \wedge \underline{\vec{b}} + \underline{\vec{a}}^* \wedge \underline{\vec{b}}^* \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}} e^{2i\omega t} + \underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}}^* + \underline{\vec{A}}^* \wedge \underline{\vec{B}} + \underline{\vec{A}}^* \wedge \underline{\vec{B}}^* e^{-2i\omega t} \right] \end{aligned}$$

Calculons maintenant la valeur moyenne de $\vec{a} \wedge \vec{b}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{a} \wedge \vec{b} dt \\ &= \frac{1}{4T} \left[\int_0^T \underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}} e^{2i\omega t} dt + \int_0^T \underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}}^* dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \underline{\vec{A}}^* \wedge \underline{\vec{B}} dt + \int_0^T \underline{\vec{A}}^* \wedge \underline{\vec{B}}^* e^{-2i\omega t} dt \right] \end{aligned}$$

Or :

- Pour les deux termes au milieu des crochets, $\underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}}^*$ et $\underline{\vec{A}}^* \wedge \underline{\vec{B}}$ ne dépendent pas du temps. On a donc :

$$\int_0^T \underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}}^* dt = T \underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}}^* \quad \text{et} \quad \int_0^T \underline{\vec{A}}^* \wedge \underline{\vec{B}} dt = T \underline{\vec{A}}^* \wedge \underline{\vec{B}}$$

- Le premier terme est identiquement nul puisque :

$$\int_0^T \underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}} e^{2i\omega t} dt = \underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}} \left[\frac{e^{2i\omega t}}{2i\omega} \right]_0^T = \underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}} \frac{e^{2i\omega T} - 1}{2i\omega} = \vec{0}$$

puisque $\omega T = 2\pi$

- De la même façon, le quatrième terme est identiquement nul car :

$$\int_0^T \underline{\vec{A}}^* \wedge \underline{\vec{B}}^* e^{-2i\omega t} dt = \underline{\vec{A}}^* \wedge \underline{\vec{B}}^* \left[\frac{e^{-2i\omega t}}{-2i\omega} \right]_0^T = \vec{0}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \langle \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle &= \frac{1}{4} \left[\underline{\vec{A}} \wedge \underline{\vec{B}}^* + \underline{\vec{A}}^* \wedge \underline{\vec{B}} \right] = \frac{1}{4} \left[\underline{\vec{a}} \wedge \underline{\vec{b}}^* + \underline{\vec{a}}^* \wedge \underline{\vec{b}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\underline{\vec{a}} \wedge \underline{\vec{b}}^* + (\underline{\vec{a}} \wedge \underline{\vec{b}}^*)^*}{2} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit :

$$\langle \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\underline{\vec{a}} \wedge \underline{\vec{b}}^* \right)$$

CQFD.