

**ANNEXE****Démonstration des règles de calculs avec les OPPS complexes**

On considère un champ vectoriel complexe s'écrivant :

$$\vec{a}(M, t) = \vec{A}_m e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

d'amplitude complexe  $\vec{A}_m = A_{mx} \vec{e}_x + A_{my} \vec{e}_y + A_{mz} \vec{e}_z$

$\vec{k}$  est le vecteur d'onde ( $\in \mathbb{R}^3$ ) et  $\vec{r}$  est le vecteur position du point  $M$  ( $\in \mathbb{R}^3$ ). Dans la base cartésienne  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  ils s'écrivent :

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y + k_z \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z$$

d'où :

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

Dans la suite nous poserons :

$$a_x = A_{mx} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$a_y = A_{my} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$a_z = A_{mz} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

de sorte que :

$$\vec{a}(M, t) = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

En posant  $\beta = x, y$  ou  $z$ , les composantes cartésiennes  $a_\beta$  s'écrivent donc toutes sous la forme :

$$a_\beta = A_{m\beta} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} e^{i\omega t}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_\beta}{\partial x} &= A_{m\beta} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial x} (e^{-ik_x x}) \\ &= -ik_x A_{m\beta} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} e^{i\omega t} \\ &= ik_x a_\beta \end{aligned}$$

De la même façon nous aurons :

$$\frac{\partial a_\beta}{\partial y} = -ik_y a_\beta \quad \text{et} \quad \frac{\partial a_\beta}{\partial z} = -ik_z a_\beta$$

De même, la dérivée partielle par rapport au temps s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_\beta}{\partial t} &= A_{m\beta} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} \frac{\partial}{\partial t} (e^{i\omega t}) \\ &= i\omega A_{m\beta} e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} e^{-ik_z z} e^{i\omega t} \\ &= i\omega a_\beta \end{aligned}$$

En résumé nous pouvons écrire, avec  $\beta = x, y$  ou  $z$  :

$$\frac{\partial a_\beta}{\partial x} = -ik_x a_\beta \quad ; \quad \frac{\partial a_\beta}{\partial y} = -ik_y a_\beta \quad ; \quad \frac{\partial a_\beta}{\partial z} = -ik_z a_\beta \quad \text{et} \quad \frac{\partial a_\beta}{\partial t} = i\omega a_\beta$$

Les dérivées partielles secondes s'obtiennent alors facilement. Par exemple :

$$\frac{\partial^2 a_\beta}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial a_\beta}{\partial x} \right) = -ik_x \frac{\partial a_\beta}{\partial x} = (-ik_x)^2 a_\beta = -k_x^2 a_\beta$$

De même :

$$\frac{\partial^2 a_\beta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial a_\beta}{\partial t} \right) = i\omega \frac{\partial a_\beta}{\partial t} = (i\omega)^2 a_\beta = -\omega^2 a_\beta$$

En résumé :

$$\frac{\partial^2 a_\beta}{\partial x^2} = -k_x^2 a_\beta \quad ; \quad \frac{\partial^2 a_\beta}{\partial y^2} = -k_y^2 a_\beta \quad ; \quad \frac{\partial^2 a_\beta}{\partial z^2} = -k_z^2 a_\beta \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 a_\beta}{\partial t^2} = -\omega^2 a_\beta$$

Venons-en maintenant à la démonstrations des relations de calcul.

1.  $\boxed{\operatorname{div} \vec{a} = -i \vec{k} \cdot \vec{a}}$

En effet :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ &= -ik_x a_x - ik_y a_y - ik_z a_z = -i \vec{k} \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

2.  $\boxed{\vec{\operatorname{rot}} \vec{a} = -i \vec{k} \wedge \vec{a}}$

En effet :

$$\begin{aligned} \vec{\operatorname{rot}} \vec{a} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{a} = \left( \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y \\ &\quad + \left( \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \vec{\operatorname{rot}} \vec{a} &= (-ik_y a_z + ik_z a_y) \vec{e}_x + (-ik_z a_x + ik_x a_z) \vec{e}_y + (-ik_x a_y + ik_y a_x) \vec{e}_z \\ &= -i \vec{k} \wedge \vec{a} \end{aligned}$$

3.  $\boxed{\Delta \vec{a} = -(\vec{k} \cdot \vec{k}) \vec{a}}$

En effet :

$$\Delta \vec{a} = \Delta a_x \vec{e}_x + \Delta a_y \vec{e}_y + \Delta a_z \vec{e}_z$$

Or :

$$\begin{aligned} \Delta a_x &= \frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2} \\ &= -k_x^2 a_x - k_y^2 a_x - k_z^2 a_x \\ &= -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) a_x = -(\vec{k} \cdot \vec{k}) a_x \end{aligned}$$

De la même façon nous obtenons :

$$\Delta a_y = -(\vec{k} \cdot \vec{k}) a_y \quad \text{et} \quad \Delta a_z = -(\vec{k} \cdot \vec{k}) a_z$$

Il vient alors :

$$\Delta \vec{a} = -(\vec{k} \cdot \vec{k}) (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) = -(\vec{k} \cdot \vec{k}) \vec{a}$$

4.  $\boxed{\frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = i\omega \vec{a}}$

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} &= \frac{\partial a_x}{\partial t} \vec{e}_x + \frac{\partial a_y}{\partial t} \vec{e}_y + \frac{\partial a_z}{\partial t} \vec{e}_z \\ &= (i\omega a_x) \vec{e}_x + (i\omega a_y) \vec{e}_y + (i\omega a_z) \vec{e}_z \\ &= (i\omega) (a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z) \\ &= i\omega \vec{a} \end{aligned}$$