

1 Pseudo OPPS dans un métal réel

Un métal de conductivité électrique γ occupe tout le demi-espace $x > 0$. Ce milieu possède des constantes ε_0 et μ_0 comme le vide et ne contient pas de charges électriques : $\rho = 0$. Pour commencer, on ne fait aucune approximation sur les équations de Maxwell

1. a) Écrire les équations de Maxwell dans le métal et montrer que le champ électrique $\vec{E}$ qui y règne vérifie une équation de la forme :

$$\Delta \vec{E} = A \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + B \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

où A et B ont des constantes à déterminer en fonction de ε_0 , μ_0 et γ .

- b) Dans toute la suite, on supposera $\gamma \gg \varepsilon_0 \omega$. Simplifier en conséquence l'équation précédente.
2. On cherche une solution à l'équation précédente de la forme :

$$\vec{E} = \underline{E}_m \vec{e}_y \exp[i(\omega t - Kx)]$$

Montrer que ceci n'est possible que si K est un complexe qui s'écrit sous la forme : $K = \alpha + i\alpha$ et dont on explicitera α .

3. Exprimer le champ magnétique (réel) $\vec{B}(x, t)$ dans le conducteur. et montrer que la partie sinusoïdale de $\vec{B}$ est en retard de phase de $\pi/4$ par rapport à $\vec{E}$.

2 Étude énergétique de l'effet de peau

Un métal occupant le demi-espace $z > 0$ est caractérisé par une permittivité ε_0 , une perméabilité μ_0 et une conductivité électrique γ . On se place dans le domaine de fréquences où le courant de déplacement est négligeable devant le courant de conduction.

On étudie une situation pour laquelle il existe dans le métal un champ électrique de la forme (solution des équations de Maxwell) :

$$\vec{E}(z, t) = E_m \vec{u}_x \exp(-\alpha z) \exp[i(\alpha z - \omega t)]$$

où E_m est une amplitude réelle positive et où $\alpha = \sqrt{\frac{\mu_0 \gamma \omega}{2}}$.

- 1) Préciser les expressions du champ magnétique $\vec{B}$ et de la densité volumique de courant $\vec{j}$ en tout point du métal.

On rappelle que si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs de même pulsation ω , les valeurs moyennes de leurs produits scalaire et vectoriel peuvent être calculées au moyen des relations suivantes :

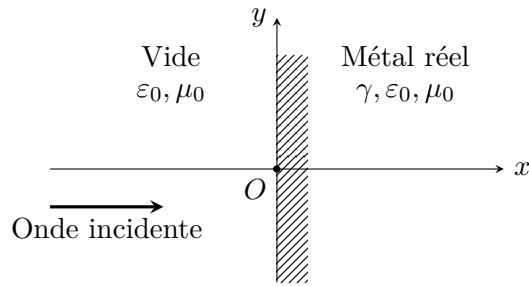
$$\langle \vec{a} \cdot \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{a} \cdot \vec{b}^*) \quad \text{et} \quad \langle \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\vec{a} \wedge \vec{b}^*)$$

où $\vec{b}^*$ représente le complexe conjugué du vecteur $\vec{b}$.

- 2) a) Quelle est l'expression de la puissance électromagnétique moyenne P_0 transmise en $z = 0$ à travers une surface ΔS perpendiculaire à Oz ?
b) Quelle est l'expression de la puissance moyenne P_J dissipée par effet Joule dans le volume limité par un cylindre d'axe Oz , de surface de base ΔS et qui s'étend de $z = 0$ jusqu'à l'infini ? Commenter.
- 3) On peut retrouver la relation établie à la question précédente à l'aide d'un bilan énergétique. À cet effet :
a) En partant de l'identité locale de Poynting, établir la relation entre la valeur moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{\pi} \rangle$ dans le métal (à la cote z) et la valeur moyenne de la densité volumique de puissance $\langle p_J \rangle$ dissipée par effet Joule en ce même point.
b) Retrouver alors la relation entre P_0 et P_J établie à la question 2.b)

3 Réflexion d'une OPPS sur un métal réel

Une onde électromagnétique plane, progressive, sinusoïdale de pulsation ω , polarisée rectilignement selon $\vec{e}_y$ se propage dans l'espace $x < 0$ assimilé au vide, suivant les "x croissants" et rencontre sous incidence normale un métal réel situé dans le demi-espace $x > 0$, caractérisé par une conductivité électrique γ , une permittivité électrique ε_0 et une perméabilité magnétique μ_0 .



Pour $x < 0$ l'onde incidente est de la forme :

$$\vec{E}_i(x, t) = E_m \vec{e}_y \exp[i(\omega t - kx)] \quad E_m > 0$$

L'onde incidente se divise en $x = 0$ en une onde réfléchie et une onde transmise. On note $\vec{E}_r(x, t)$ le champ électrique réfléchi dans l'espace $x < 0$ et $\vec{E}_t(x, t)$ le champ électrique transmis dans l'espace $x > 0$, que l'on cherche sous la forme d'une pseudo-OPPS avec un vecteur d'onde complexe :

$$\vec{E}_t(x, t) = E_{mt} \vec{e}_y \exp[i(\omega t - \underline{k}_t x)]$$

- 1) Sachant que l'onde réfléchie est polarisée rectilignement selon $\vec{e}_y$ Proposer une expression pour $\vec{E}_r(x, t)$. Quelle est la relation entre k et ω ?
- 2) Écrire les équations de Maxwell dans le demi-espace $x > 0$. On supposera que la densité volumique de charge y est nulle. En

déduire l'équation vérifiée par le champ électrique dans le demi-espace $x > 0$.

- 3) a) Montrer que $\underline{k}_t^2 = -i\omega\mu_0\gamma$. En déduire que $\underline{k}_t = \alpha(1 - i)$ en donnant l'expression et le signe de α .
b) Déterminer l'expression de $\vec{B}_t(x, t)$.
- 4) En l'absence de densités surfaciques de charges et de courant, quelles est la propriété vérifiée par les champs électrique et magnétique en $x = 0$?

En déduire, en fonction de k et α , les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, définis par :

$$r = \frac{E_r(0^-, t)}{E_i(0^-, t)} \quad \text{et} \quad t = \frac{E_t(0^-, t)}{E_i(0^-, t)}$$

- 5) Calculer les coefficients de réflexion et de transmission en énergie, définis par :

$$R = \frac{\| \langle \vec{\pi}_r(x=0^-) \rangle \|}{\| \langle \vec{\pi}_i(x=0^-) \rangle \|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\| \langle \vec{\pi}_t(x=0^+) \rangle \|}{\| \langle \vec{\pi}_i(x=0^-) \rangle \|}$$

Que deviennent ces coefficients lorsque $\gamma \rightarrow +\infty$?

4 Coefficients de réflexion et de transmission

Un plasma occupe le demi-espace $x > 0$. On rappelle qu'une OPPS EM de vecteur d'onde $\vec{k}_T = \underline{k}_T \vec{u}_x$ peut se propager dans ce milieu à condition que la composante $\underline{k}_T$, éventuellement complexe, soit reliée à la pulsation ω par la relation de dispersion (ω_P étant la pulsation plasma) :

$$\underline{k}_T^2 = \frac{\omega^2 - \omega_P^2}{c^2}$$

Le demi-espace $x < 0$ est le vide. Une OPPS EM polarisée rectilignement, appelée onde incidente (O_I), se propage dans cet espace en

direction du plasma. L'interface $x = 0$ donne naissance à une onde réfléchie (O_R) et à une onde transmise (O_T). Les champs électriques associés à ces ondes sont :

$$\begin{aligned}\vec{E}_I &= E_m \vec{u}_y \exp[i(\omega t - k_I x)] \\ \vec{E}_R &= \underline{r} E_m \vec{u}_y \exp[i(\omega t + k_R x)] \\ \vec{E}_T &= \underline{t} E_m \vec{u}_y \exp[i(\omega t - \underline{k}_T x)]\end{aligned}$$

où $\underline{r}$ et $\underline{t}$ sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude.

1) Donner les expressions de k_I et de k_R en fonction de ω et déterminer les champs magnétiques $\vec{B}_I$, $\vec{B}_R$ et $\vec{B}_T$ associés aux trois ondes.

Il n'y a aucune densité surfacique de charge ($\sigma = 0$) ni de courant ($\vec{j}_S = \vec{0}$) sur le plan $x = 0$.

2) Écrire les relations de passage du champ électromagnétique et en déduire les expressions de $\underline{r}$ et $\underline{t}$ en fonction de c , ω et $\underline{k}_T$.

3)

a) Déterminer les valeurs moyennes des vecteurs de Poynting en $x = 0$: $\langle \vec{\pi}_I(x = 0^-) \rangle$, $\langle \vec{\pi}_R(x = 0^-) \rangle$ et $\langle \vec{\pi}_T(x = 0^+) \rangle$. On donnera les expressions en fonction de $|\underline{r}|^2$, $|\underline{t}|^2$ et de $k' = \text{Re}(\underline{k}_T)$.

On définit les coefficients de réflexion et de transmission en énergie par :

$$R = \frac{\|\langle \vec{\pi}_R(x = 0^-) \rangle\|}{\|\langle \vec{\pi}_I(x = 0^-) \rangle\|} \quad \text{et} \quad T = \frac{\|\langle \vec{\pi}_T(x = 0^+) \rangle\|}{\|\langle \vec{\pi}_I(x = 0^-) \rangle\|}$$

b) Calculer R et T dans les deux cas : $\omega > \omega_P$ et $\omega < \omega_P$. Commenter.

c) Que peut-on dire de $R + T$ dans les deux cas ?

5 Transparence ultraviolette des métaux

Un métal est éclairé sous incidence normale par une onde électromagnétique pseudo OPPH :

$$\vec{E} = \vec{E}_m \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

de vecteur d'onde complexe $\vec{k} = \underline{k} \vec{u}$.

On adopte le modèle de conduction de Drude dans un métal : la force exercée par le réseau sur les électrons de conduction est de la forme $-m \vec{v}/\tau$. On note n^* la densité volumique d'électrons libres. On néglige le poids et la force exercée par le champ magnétique de l'onde.

1) Montrer que le métal possède une conductivité complexe :

$$\underline{\gamma} = \frac{\gamma_0}{1 - i\tau\omega}$$

$$\text{avec } \gamma_0 = \frac{n^* e^2 \tau}{m}.$$

2) On rappelle que le métal est électriquement neutre : $\rho = 0$. En déduire la relation de dispersion :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \underline{\gamma} i \omega$$

3) Comment se simplifie-t-elle pour $\omega\tau \gg 1$? Interpréter alors le fait que certains métaux sont transparents dans l'ultra-violet, sachant que $n^* = 10^{28} \text{ m}^{-3}$, $m = 9.10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1,60.10^{-19} \text{ C}$ et $\tau = 10^{-14} \text{ s}$.