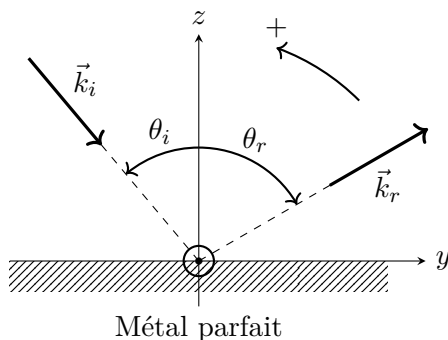


1 Réflexion en incidence oblique sur un métal parfait



À la surface du métal, c'est à dire en $z = 0$, le vecteur position du point M est $\vec{r} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$. En tenant compte du signe des angles θ_i et θ_r , les deux vecteurs d'onde s'écrivent :

$$\vec{k}_i = k \sin \theta_i \vec{e}_y - k \cos \theta_i \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

et

$$\vec{k}_r = -k_r \sin \theta_i \vec{e}_y + k_r \cos \theta_r \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad k_r = \frac{\omega_r}{c}$$

Le champ électrique complexe total à la surface du métal s'écrit donc :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t) = E_m \vec{e}_x \exp[i(\omega t - k \sin \theta_i y)] + \underline{E}_{mr} \vec{e}_x \exp[i(\omega_r t + k_r \sin \theta_r y)]$$

Ce champ électrique étant tangentiel, il doit s'annuler identiquement, ce qui impose :

$$\forall y, \forall t, E_m \exp[i(\omega t - k \sin \theta_i y)] + \underline{E}_{mr} \exp[i(\omega_r t + k_r \sin \theta_r y)] = 0$$

cette relation devant être réalisée pour tout t et tout y . En prenant des cas particuliers on obtient successivement :

1. Pour $t = 0$ et $y = 0$:

$$E_m + \underline{E}_{mr} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\underline{E}_{mr} = -E_m}$$

2. En tenant compte de la relation précédente et en faisant $y = 0$, on obtient :

$$\forall t, \exp(i\omega t) - \exp(i\omega_r t) = 0$$

donc en dérivant par rapport au temps puis en prenant la relation à $t = 0$ (cas particulier) on obtient :

$$\forall t, i\omega \exp(i\omega t) - i\omega_r \exp(i\omega_r t) = 0 \quad \text{d'où} \quad \omega - \omega_r = 0$$

On a donc bien $\boxed{\omega_r = \omega}$ (et donc $k_r = k = \omega/c$).

3. En tenant compte des deux relations obtenues on a maintenant :

$$\forall y, \exp(-ik \sin \theta_i y) - \exp(ik \sin \theta_r y) = 0$$

En reprenant le même raisonnement qu'à la question précédente : dérivation par rapport à y puis cas particulier en $y = 0$ on obtient :

$$\forall y, (-ik \sin \theta_i) \exp(-ik \sin \theta_i y) - (ik \sin \theta_r) \exp(ik \sin \theta_r y) = 0 \implies \sin \theta_i + \sin \theta_r = 0$$

On a donc $\sin \theta_r = -\sin \theta_i$, ce qui entraîne $\boxed{\theta_r = -\theta_i}$ puisque les angles appartiennent à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

On retrouve la loi de la réflexion de Snell-Descartes.

2 Chauffage par induction

- Q1.** Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie des courants et des charges ($\rho = 0$ dans ce problème), donc un plan de symétrie de $\vec{B}$ contenant M . Le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ doit donc appartenir à ce plan, ce qui implique :

$$\boxed{B_\theta = 0}$$

D'autre part, il y a invariance des charges et des courants par rotation autour de Oz et par translation le long de Oz puisque le cylindre est considéré comme infini. Aucune composante de $\vec{B}$ ne peut dépendre de θ , ni de z .

- Q2.** Prenons le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \vec{\text{rot}} (\mu_0 \gamma \vec{E}) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

D'autre part :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = -\Delta \vec{B} \quad \text{puisque} \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

On obtient donc :

$$\boxed{\Delta \vec{B} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}}$$

Projetons cette équation sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_z$ en utilisant le formulaire :

- La projection sur $\vec{e}_r$ donne :

$$e^{i\omega t} \Delta \underline{B}_r(r) - \frac{1}{r^2} \underline{B}_r(r) e^{i\omega t} = \mu_0 \gamma (i\omega) \underline{B}_r(r) e^{i\omega t}$$

d'où, après simplification et utilisation du laplacien donné dans le formulaire :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\underline{B}_r}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} \underline{B}_r = \mu_0 \gamma (i\omega) \underline{B}_r(r) = \frac{2i}{\delta^2} \underline{B}_r$$

Or d'une part :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d[r\underline{B}_r]}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \underline{B}_r + \frac{d\underline{B}_r}{dr} \right) = \frac{d^2 \underline{B}_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{B}_r}{dr} - \frac{\underline{B}_r}{r^2}$$

et d'autre part :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\underline{B}_r}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} \underline{B}_r = \frac{d^2 \underline{B}_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{B}_r}{dr} - \frac{\underline{B}_r}{r^2}$$

Les deux expressions sont donc identiques, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d[r\underline{B}_r]}{dr} \right) = \frac{2i}{\delta^2} \underline{B}_r}$$

ce qui est bien le résultat demandé par l'énoncé.

- La projection sur $\vec{e}_z$ donne : $\Delta \underline{B}_z = \mu_0 \gamma i\omega \underline{B}_z = \frac{2i}{\delta^2} \underline{B}_z$
avec :

$$\Delta \underline{B}_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\underline{B}_z}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d\underline{B}_z}{dr} + \frac{d^2 \underline{B}_z}{dr^2}$$

ce qui confirme la aussi le résultat demandé par l'énoncé.

Q3. L'équation de Maxwell-Thomson s'écrit (formulaire) :

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_r) = 0 \quad \text{soit} \quad r B_r(r) = \text{Cste}$$

En utilisant la première équation de la question Q2, on en déduit que $\boxed{B_r = 0}$.

Q4. On utilise l'équation de Maxwell-Ampère $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ pour trouver grâce au formulaire :

$$\boxed{\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr} e^{i\omega t} \vec{e}_\theta}$$

Les lignes de $\vec{j}$ sont donc des cercles d'axe zz' .

Q5. On a :

$$\frac{dB_z}{dr} = B_0 \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\alpha_n}{\delta^n} r^{n-1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 B_z}{dr^2} = B_0 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \frac{\alpha_n}{\delta^n} r^{n-2}$$

Ainsi :

$$\frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} = B_0 \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\alpha_n}{\delta^n} r^{n-2} = B_0 \left[\frac{\alpha_1}{r\delta} + \sum_{n=2}^{+\infty} n \frac{\alpha_n}{\delta^n} r^{n-2} \right]$$

En posant $p = n - 2$ on peut réécrire les deux dérivées sous la forme :

$$\frac{d^2 B_z}{dr^2} = B_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (p+1)(p+2) \frac{\alpha_{p+2}}{\delta^{p+2}} r^p$$

et

$$\frac{1}{r} \frac{dB_z}{dr} = B_0 \left[\frac{\alpha_1}{r\delta} + \sum_{p=0}^{+\infty} (p+2) \frac{\alpha_{p+2}}{\delta^{p+2}} r^p \right]$$

Comme p est un indice muet on peut le renommer n . Si on réintroduit toutes ces expressions dans l'équation différentielle vérifiée par B_z , on obtient :

$$\frac{\alpha_1}{r\delta} + \frac{1}{\delta^2} \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)^2 \alpha_{n+2} - 2i \alpha_n] \left(\frac{r}{\delta}\right)^n = 0$$

On doit donc imposer $\boxed{\alpha_1 = 0}$ pour éviter la divergence en $r \rightarrow 0$. D'autre part, par unicité de la décomposition en série entière on obtient :

$$\boxed{\forall n \geq 0, \alpha_{n+2} = \frac{2i}{(n+2)^2} \alpha_n}$$

Q6. Tous les termes impairs sont nuls puisque $\alpha_1 = 0$. En particulier on a donc $\boxed{\alpha_3 = 0}$. En ce qui concerne les termes pairs :

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{2i}{4} \alpha_0 = \frac{i}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_4 = \frac{2i}{16} \alpha_2 = \frac{2i \times i}{16 \times 2} = -\frac{1}{16}}$$

Q7. On veut que $|\alpha_4| \left(\frac{r}{\delta}\right)^4$ soit négligeable devant $|\alpha_2| \left(\frac{r}{\delta}\right)^2$ (les autres termes en α_{2p} seront alors automatiquement négligeables). Or :

$$\frac{|\alpha_4| \left(\frac{r}{\delta}\right)^4}{|\alpha_2| \left(\frac{r}{\delta}\right)^2} = \left| \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \right| \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 = \frac{1}{8} \left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \leq \frac{1}{8} \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 \ll 1$$

entraîne :

$$\frac{\mu_0 \gamma \times 2\pi f a^2}{2 \times 8} \ll 1 \quad \text{d'où} \quad f \ll \frac{8}{\mu_0 \gamma \pi a^2}$$

On peut donc poser :

$$f_c = \frac{8}{\mu_0 \gamma \pi a^2} \stackrel{\text{AN}}{=} 133 \text{ Hz}$$

Q8. En reprenant l'expression de $\vec{j}$ trouvée à la question Q4 on obtient :

$$\vec{j} = -\frac{1}{\mu_0} B_0 \frac{2r}{\delta^2} e^{i\omega t} \vec{e}_\theta = -\frac{1}{\mu_0} B_0 \frac{r}{\delta^2} i e^{i\omega t} \vec{e}_\theta$$

Q9. On revient aux valeurs réelles avant de calculer les puissances volumiques. Comme B_0 est réel il vient :

$$\vec{j} = -\frac{B_0 \gamma \omega}{2} r i e^{i\omega t} \vec{e}_\theta$$

d'où :

$$\vec{j} = \text{Re}(\vec{j}) = \frac{B_0 \gamma \omega}{2} r \sin(\omega t) \vec{e}_\theta$$

Comme $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$, on obtient :

$$\langle p_v \rangle = \frac{1}{\gamma} \langle \|\vec{j}\|^2 \rangle = \frac{B_0^2 \gamma \omega^2}{4} r^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle$$

soit :

$$\langle p_v \rangle = \frac{B_0^2 \gamma \omega^2}{8} r^2$$

La puissance dissipée par effet Joule dans le cylindre s'obtient par intégration sur le volume du cylindre :

$$P_J = \iiint \langle p_v \rangle r \, dr \, d\theta \, dz = 2\pi L \frac{B_0^2 \gamma \omega^2}{8} \int_0^a r^3 \, dr$$

d'où :

$$P_J = \frac{\pi}{16} L a^4 \gamma B_0^2 \omega^2 = \frac{\pi^3}{4} L a^4 \gamma B_0^2 f^2$$

où $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est la fréquence. La puissance dissipée par effet Joule est donc proportionnelle au carré de l'amplitude du champ magnétique et au carré de la fréquence f . On a donc intérêt à choisir la plus grande fréquence possible, tout en assurant que $f \ll f_c$, pour rendre le chauffage efficace. Une fréquence de 10-20 Hz semble être adaptée.

Q10. Tacé de $\log P_J = \text{Cste} + 2 \log(f)$. On obtient une droite de pente 2.

