

DM n°15
 Pour le mardi 17 mars 2026

1 Diffusion d'une onde électromagnétique par un atome

Donnée :

Puissance rayonnée par un dipôle électrique $\vec{p}(t)$ placé en O , à travers une sphère de centre O et de rayon r :

$$P_{\text{ray}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \|\vec{p}(t - r/c)\|^2$$

Un atome d'hydrogène H est placé à l'origine O des coordonnées d'un repère d'espace $(Oxyz)$ liée à un référentiel galiléen. On suppose que le proton est immobile en O . L'électron, de charge $-e$ et de masse m est repéré par son vecteur position $\vec{OM}$ de coordonnées (x, y, z) . On notera $\vec{v}$ son vecteur vitesse. On suppose que :

- L'électron est lié au proton par une force de rappel élastique $\vec{F}_r = -k \vec{OM}$ (cette force résulte d'un développement limité de la force électrique exercée par le proton, autour de la position d'équilibre de l'électron).
- On tient compte de la perte d'énergie de l'électron par rayonnement en introduisant une force de frottement de type fluide : $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$
- L'atome est placé dans une OPPH EM de pulsation ω , rectilignement polarisée selon $\vec{e}_z$ et se propageant dans la direction $+\vec{e}_x$. Le champ électrique de l'onde s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E} = E_0 \exp[i(\omega t - kx)] \vec{e}_z$$

avec $E_0 > 0$ constante réelle.

- 1) a) Le milieu de propagation étant le vide, quelle est la relation entre k et ω ? Quelle est l'expression du champ magnétique associé $\vec{B}$.
- b) On suppose que l'électron n'est pas relativiste : $\|\vec{v}\| \ll c$. Montrer que la force magnétique exercée par l'onde sur l'électron est négligeable devant la force électrique.
- c) Soit a la taille caractéristique de l'atome. On suppose que la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique vérifie : $\lambda \gg a$. En déduire que la force exercée par l'onde sur l'électron peut s'écrire avec une très bonne approximation :

$$\vec{F}_o = -eE_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

Sachant que a est de l'ordre du nanomètre, dans quel(s) domaine(s) des ondes électromagnétiques doit être située λ pour que cette approximation soit vérifiée?

- 2) a) À l'aide du principe fondamental de la dynamique à l'électron, établir les trois équations différentielles vérifiées par ses coordonnées cartésiennes x , y et z . On posera $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
- b) Montrer que pour $t \gg \tau$, c'est à dire au delà du régime transitoire, le mouvement forcé de l'électron se fait uniquement suivant $\vec{e}_z$, c'est à dire que $x(t) \approx 0$ et $y(t) \approx 0$. Déterminer pour ce régime l'expression de $z(t)$ en la mettant sous la forme :

$$z(t) = -\frac{eE_0}{m} [A(\omega) \cos(\omega t) + B(\omega) \sin(\omega t)]$$

où $A(\omega)$ et $B(\omega)$ sont deux fonctions de ω à déterminer.

L'atome H se comporte comme un dipôle électrique de moment :

$$\vec{p}(t) = -e \overrightarrow{OM}$$

- 3) Calculer la puissance électromagnétique rayonnée $P_{\text{ray}}(r, t)$ à la distance $r \gg a$ de l'atome et à l'instant t et en déduire sa valeur moyenne (temporelle) $\langle P_{\text{ray}} \rangle$ vérifie :

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle = P_0 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}$$

en explicitant l'expression de la constante P_0 en fonction de E_0 , e , m , c et ε_0 . Représenter schématiquement l'allure de $\langle P_{\text{ray}} \rangle$ en fonction de ω .

On admet que l'expression de $\langle P_{\text{ray}} \rangle$ obtenue est généralisable à une molécule polyélectronique, l'expression de la constante P_0 étant différente. Cette expression est sans importance pour ce qui suit.

Pour les molécules de l'atmosphère les valeurs des deux paramètres du modèle sont $\omega_0 = 2,0 \times 10^{16} \text{ rad.s}^{-1}$ et $\tau = 1,0 \times 10^{-8} \text{ s}$.

- 4) a) Montrer que, pour des pulsations situées dans le domaine visible c'est à dire pour $\omega \approx 3 \times 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$, on peut écrire de façon approchée :

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle \approx P_0 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

Il s'agit de la diffusion de Rayleigh.

- b) Typiquement pour le bleu $\lambda_{\text{bleu}} = 450 \text{ nm}$ et pour le rouge $\lambda_{\text{rouge}} = 700 \text{ nm}$. Calculer le rapport $\langle P_{\text{ray}} \rangle(\text{bleu}) / \langle P_{\text{ray}} \rangle(\text{rouge})$. Expliquer à l'aide de ce modèle la couleur bleue du ciel.

2 Production du dichlore

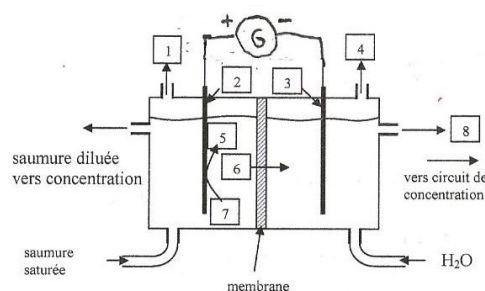
Données : potentiels standard 25°C :

Couple	$\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}$	$\text{Cl}_{2(g)}/\text{Cl}^-$	H^+/H_2	Na^+/Na
$E^0 \text{ (V)}$	1,23	1,36	0	- 2,71

Le dichlore est produit par électrolyse d'une solution aqueuse concentrée de chlorure de sodium ($\text{Na}^+ ; \text{Cl}^-$) (la saumure). On étudie ici le procédé des cellules à membrane.

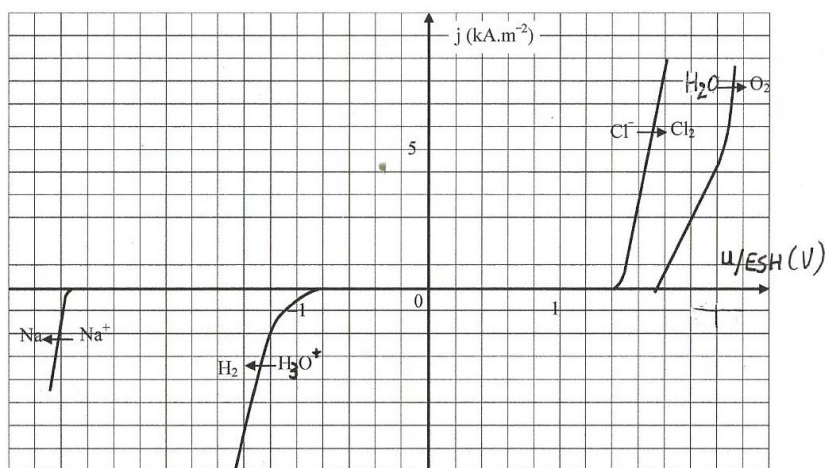
1. Le pH est maintenu à 0. D'après les valeurs des potentiels standard, quelles sont les demi-équations d'oxydoréduction possibles à l'anode ? À la cathode ?
2. À quelle réaction d'oxydoréduction pourrait-on s'attendre au cours de l'électrolyse en l'absence de surtensions au niveau des électrodes ? Calculer la constante d'équilibre de cette réaction.

Un schéma de principe d'une cellule à membrane, à compléter, est donné ci-après.



L'anode est de type DSA (Dimensionally Stable Anode) en titane recouvert d'oxyde de titane et de ruthénium. La cathode est en nickel. La séparation entre les compartiments cathodique et anodique est constituée d'une membrane cationique (perméable aux cations).

On obtient les courbes densité de courant - potentiel suivantes :



3. Quelle est la réaction qui a effectivement lieu dans ce procédé pour une valeur de la densité de courant n'excédant pas les limites du tracé des courbes ?
4. À l'aide des courbes densité de courant - potentiel, donner un nom à chacune des cases numérotées de 1 à 8 sur le schéma de principe.
5. La densité de courant j utilisée dans ce procédé est égale à 4 kA.m^{-2} . Pourquoi préfère-t-on utiliser la densité de courant plutôt que l'intensité ? Quelle est la valeur de la tension appliquée aux bornes de l'électrolyseur ?

On donne :

- Résistance interne de l'électrolyseur : $R = 0,3 \, \Omega$.
- Surface de chaque électrode : $S = 10 \text{ cm}^2$.