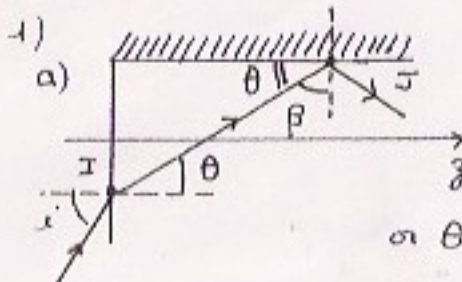


t

Corrigé du DM n°14

Révisions d'optique géométrique.

1 Transmission par fibre optique

1) a) 

Pour que la propagation soit guidée, il faut qu'il y ait une réflexion totale en J, donc que :

$$\beta > \beta_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

or $\theta = \frac{\pi}{2} - \beta$ donc cela revient à

$$\theta < \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Appliquons la loi de la réfraction à l'entrée de la fibre, en I :

$$n_0 \sin i = n_1 \sin \theta < n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin i < \frac{n_1}{n_0} \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin i < \frac{n_1}{n_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Nous obtenons donc :

$$i < \arcsin\left(\frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right) = i_a$$

b) $i_a = 0,372 \text{ rad} = 21,3^\circ$

2) a) La propagation la plus rapide est celle qui correspond aux rayons // à Oz qui parcourent une distance L : $\tau_{\text{min}} = L/v = n_1 L/c$

La propagation la plus lente est celle des rayons arrivant avec un angle i_a donc se propageant avec un angle $\theta_{\text{max}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ dans la fibre.

La longueur totale parcourue est alors : $L_{\text{max}} = \frac{L}{\cos \theta_{\text{max}}}$ et donc :

$$\tau_{\text{max}} = \frac{n_1 L_{\text{max}}}{c} = \frac{n_1 L}{c} \frac{1}{\cos \theta_{\text{max}}}$$

$$\text{or } \cos \theta_{\max} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \right) = \frac{n_2}{n_1}$$

Il vient donc : $\tau_{\max} = \frac{n_1 L}{c} \frac{n_1}{n_2}$
et donc

$$\boxed{\delta \tau_{\max} = \tau_{\max} - \tau_{\min} = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1 - n_2}{n_2} \right)}$$

b) AN : $\delta \tau_{\max} = 158 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 0,158 \mu\text{s}$

3) Une impulsion émise à t_0 sera reçue entre $t_0 + \tau_{\min}$ et $t_0 + \tau_{\max}$ et celle émise à $t_0 + T$ sera reçue entre $t_0 + T + \tau_{\min}$ et $t_0 + T + \tau_{\max}$. Pour que ces deux impulsions ne se recouvrent pas en sortie, il est nécessaire que :

$$t_0 + \tau_{\max} < t_0 + T + \tau_{\min} \quad (\Rightarrow) \quad \underline{\delta \tau_{\max} < T}$$

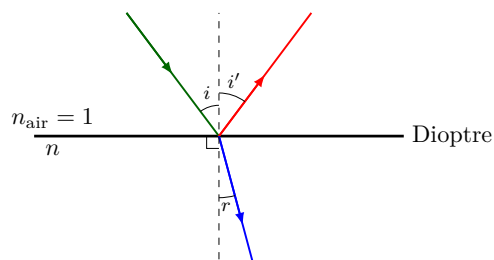
Le débit de la fibre est alors $N = \frac{1}{T}$ bit par seconde donc :

$$N < \frac{1}{\delta \tau_{\max}} \stackrel{\text{AN}}{=} 6,31 \cdot 10^6 \text{ bits/s}$$

Cette fibre est largement adaptée à la transmission téléphonique mais pas au standard télévision. Cependant on sait faire beaucoup mieux dans la technologie des fibres optiques et on peut largement se adapter au standard télévision.

2 Théorie géométrique de l'arc-en-ciel (CCINP MP 2023)

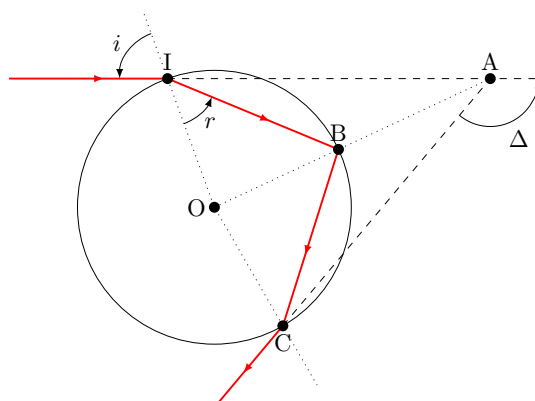
Q23. Sur le schéma :



- Les rayons réfléchis et réfractés appartiennent au plan d'incidence.
- L'angle de réfraction r et l'angle d'incidence i sont reliés par la relation

$$n_{\text{air}} \sin(i) = n \sin(r)$$

Q24. Sur le schéma :



Le triangle OIB est isocèle en O (OI et OB sont deux rayons) ainsi $\widehat{OIB} = \widehat{IBO} = r$ donc $\widehat{BOI} = \pi - 2r$. Dans le triangle AOI :

$$\widehat{OAI} + \widehat{AOI} + \widehat{OIA} = \pi$$

donc $\widehat{OAI} = \pi - (\pi - 2r) - i = 2r - i$. Ainsi $\widehat{CAI} = 2\widehat{OAI} = 4r - 2i$. Finalement :

$$\Delta = \pi - \widehat{CAI} = \pi - 4r + 2i$$

Or $r = \arcsin\left(\frac{\sin i}{n}\right) = \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)$ ainsi :

$$\Delta = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right) + 2 \arcsin(x)$$

Q25. On cherche la valeur x_m de x annulant $\frac{d\Delta}{dx}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{dx} &= 0 - 4 \left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{n}\right)^2}} + 2 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{4}{\sqrt{n^2 - x^2}} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$2\sqrt{n^2 - x_m^2} = 4\sqrt{1 - x_m^2}$$

On isole x_m :

$$n^2 - x_m^2 = 4 - 4x_m^2 \quad \text{soit}$$

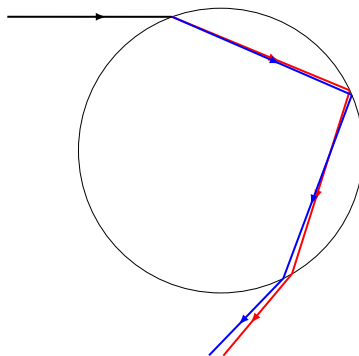
$$x_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Q26. On observe d'après la figure 8 qu'il existe un intervalle d'angle autour de 60° pour lequel Δ est constant, autour de 138° : tous les rayons arrivant à cette incidence sont renvoyés dans des directions très proches.

Q27. — bleu/indigo : pour $n = 1,343$, $x_m = 0,8556$ et $\Delta_m = 139,4^\circ$

— rouge : pour $n = 1,330$, $x_m = 0,8624$ et $\Delta_m = 137,5^\circ$

Q28. L'angle Δ pour le rouge est plus petit que pour le bleu. Sur le schéma :



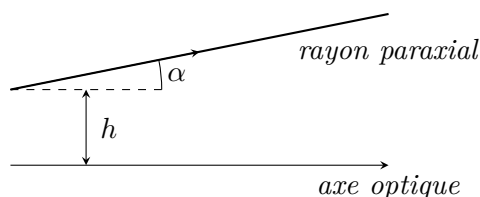
Les rayons bleus sont moins inclinés par rapport à l'horizontale que les bleus. Le rouge est vu à l'extérieur et le bleu à l'intérieur.

3 Étude de lentilles minces (CCINP MP)

1. C'est une approximation utilisée pour les systèmes optiques **centrés**, c'est à dire possédant un **axe optique** (axe de symétrie du système). De façon générale, l'image d'un point objet B n'est pas un point B' , mais une tache appelée **tache image**. Cependant, la granularité des récepteurs optiques fait que ceux-ci sont incapables de faire la différence entre un point et une tache, à condition que la taille d de celle-ci n'excède pas une taille critique d_C qui dépend du récepteur.

En pratique, on montre que cela peut être réalisé si on limite les rayons lumineux traversant l'instrument d'optique à des **rayons paraxiaux**. Ces rayons sont caractérisés par :

- Une faible hauteur h par rapport à l'axe optique (cela devant être valable à n'importe quel endroit du rayon lumineux).
- Une faible inclinaison (repérée par l'angle α sur le schéma) par rapport à cet axe.



Avec ce type de rayons, toutes les lois de l'optique faisant intervenir des fonctions trigonométriques cos, sin ou tan peuvent être **linéarisées** :

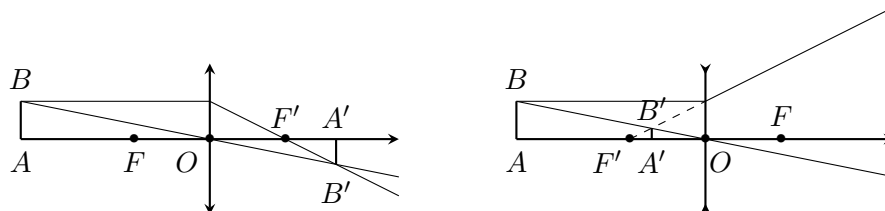
$$\boxed{\cos \alpha \approx 1 \quad \sin \alpha \approx \alpha \quad \text{et} \quad \tan \alpha \approx \alpha}$$

De même pour la loi de la réfraction : si i et r désignent les angles d'incidence et de réfraction d'un rayon paraxial sur un dioptré dans le système optique centré, alors :

$$\boxed{n_1 \sin i = n_2 \sin r \quad \text{devient} \quad n_1 i = n_2 r \quad (\text{loi de Képler})}$$

Toutes ces linéarisations portent le nom d'**approximation de Gauss**.

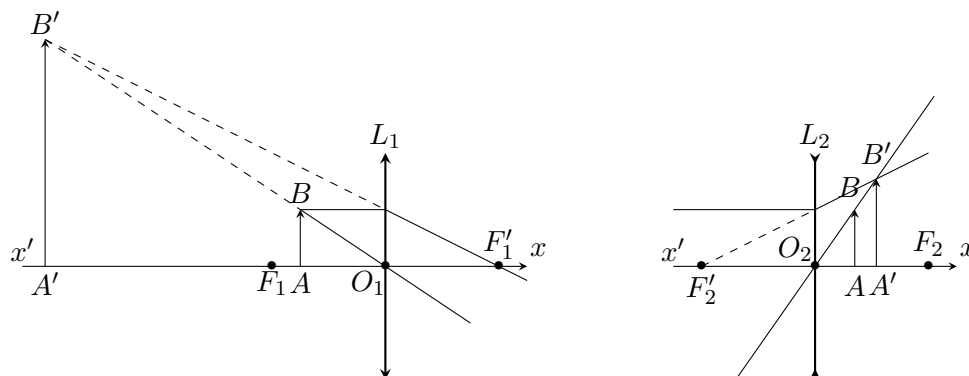
2. L'objet AB étant très éloigné, on le suppose situé à gauche du foyer objet F pour une lentille convergente et du foyer image F' pour une lentille divergente. Cela conduit aux constructions suivantes :



Dans le cas d'une lentille divergente, l'image est virtuelle et non inversée. Il ne peut donc s'agir que d'une lentille convergente.

3. Correspondance objet-image pour des lentilles minces convergente et divergente.

a) Constructions :



- b) Nous avons : $\overline{F_3A} = \overline{F_3O_3} + \overline{O_3A} = 30 + 15 = 45$ cm. La relation de Newton et le grandissement sont :

$$\overline{F_3'A} = -\frac{f'^2}{\overline{F_3A}} = -20 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{f'}{\overline{F_3A}} = 0,67$$

L'image est donc réelle ($\overline{O_3A'} > 0$), renversée par rapport à l'objet et rétrécie.

De même : $\overline{O_4A} = \overline{O_4F_4'} + \overline{F_4'A} = -30 - 20 = -50$ cm. La relation de conjugaison de Descartes entraîne :

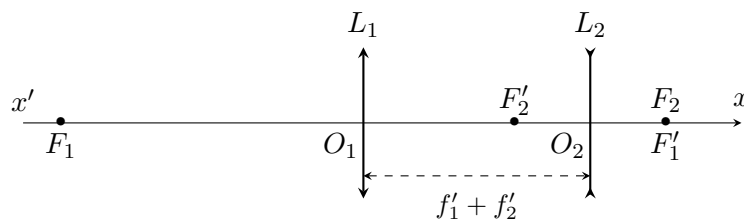
$$\frac{1}{\overline{O_4A'}} = \frac{1}{\overline{O_4A}} + \frac{1}{f'} = \frac{f' + \overline{O_4A}}{f' \overline{O_4A}} \quad \text{d'où} \quad \overline{O_4A'} = \frac{f' \overline{O_4A}}{f' + \overline{O_4A}} = -18,8 \text{ cm}$$

Le grandissement est alors :

$$\gamma = \frac{\overline{O_4A'}}{\overline{O_4A}} = 0,38$$

L'image est donc virtuelle, de même sens que l'objet et rétrécie.

4. a) Cela signifie qu'un faisceau de rayons parallèles entre eux qui entre dans la lunette est transformé par celle-ci en un autre faisceau de rayons parallèles entre eux. Avec un système de deux lentilles, cela n'est possible que si le foyer image de la première lentille coïncide avec le foyer objet de la seconde lentille : $F_1' = F_2$.

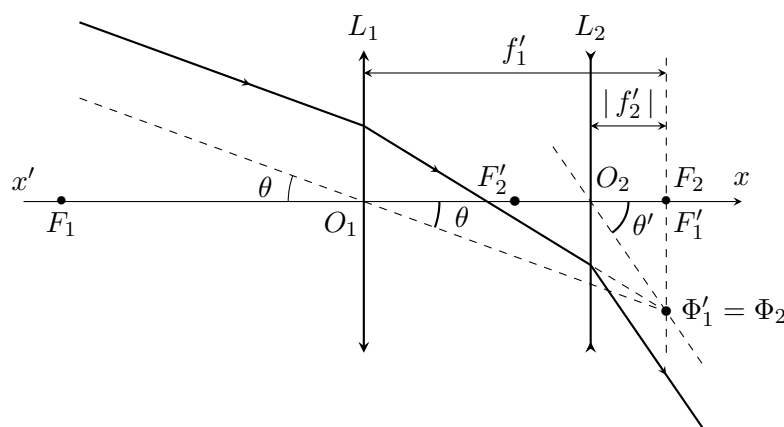


$$d = f_1' + f_2' = 200 - 50 = 150 \text{ mm}$$

Une lunette étant destinée à l'observation d'objets très éloignés, les rayons lumineux issus de chaque point de ces objets forment un faisceau de rayons parallèles entre eux qui convergent vers le plan focal image de L_1 (objectif) en des points images réelles. La lentille L_2 (oculaire) sert alors de **loupe** destinée à observer confortablement ces points images.

Pour cela, il faut que L_2 transforme ces points images réelles en des images virtuelles situées au Punctum Remotum de l'œil qui est le seul plan où il y a une vision nette sans accommodation, c'est à dire sans fatigue visuelle. Or, il est admis que ce plan se trouve à l'infini pour la plupart des yeux (yeux dits emmétropes) : c'est pourquoi il est nécessaire que les images réelles fournies par L_1 soient dans le plan focal objet de L_2 et donc que la lunette soit *afocale*.

- b) Marche d'un rayon lumineux : le rayon incident sur L_1 va converger vers Φ_1' , foyer image secondaire de L_1 (situé sur le rayon passant par O_1). Ce foyer image secondaire est aussi un foyer objet secondaire de L_2 : $\Phi_1' = \Phi_2$. Le rayon émergent de L_2 a donc pour direction celle de la droite $O_2\Phi_2$.



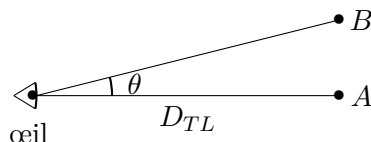
- c) Considérons les deux triangles rectangles $O_1\Phi_1'F_1'$ et $O_2\Phi_1'F_1'$ qui ont un côté commun $F_1'\Phi_1'$. Nous avons :

$$\tan \theta = \frac{F_1'\Phi_1'}{f_1'} \approx \theta \quad \text{et} \quad \tan \theta' = \frac{F_1'\Phi_1'}{|f_2'|} \approx \theta'$$

et donc :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f_1'}{|f_2'|} \stackrel{AN}{=} 4$$

- d) Considérons deux points A et B situés à deux extrémités d'un cratère. L'angle θ sous lequel l'œil d'un observateur voit le cratère est indiqué sur la figure ci-dessous :



Le diamètre du cratère étant $d = AB$, nous avons :

$$\tan \theta = \frac{d}{D_{TL}} \approx \theta$$

d'où : $\theta_{\text{Copernic}} = 2,5 \times 10^{-4}$ rad et $\theta_{\text{Clavius}} = 6,25 \times 10^{-4}$ rad. Notre observateur pourra donc voir Clavius à l'œil nu mais pas Copernic.

Supposons que A soit situé sur l'axe optique de la lunette. Les rayons lumineux issus de B arrivent alors sur celle-ci avec l'angle θ précédent et ils ressortent avec un angle $\theta' = G \times \theta$, 4 fois plus grand. Les deux cratères seront donc visibles à travers la lunette car $\theta'_{\text{Copernic}} = 10 \times 10^{-4}$ rad et $\theta_{\text{Clavius}} = 25 \times 10^{-4}$ rad sont tous les deux supérieurs à l'acuité visuelle angulaire de l'œil.

- À l'œil nu : la planète Vénus, vue sous l'angle $\theta_V = 12150 / (45 \times 10^6) = 2,7 \times 10^{-4}$ rad, est comme un point.
- Avec la lunette, $\theta'_V = 4 \times \theta_V = 10,8 \times 10^{-4}$ rad est vue comme un disque, qui occultera donc le disque jovien.