

DM Facultatif : ONDE ÉLECTROMAGNÉTIQUE GUIDÉE

L'espace étant rapporté à un repère $Oxyz$, on étudie un guide d'onde à section rectangulaire, délimité par des parois métalliques parfaites situées en $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et $y = b$. Ces parois délimitent un tube d'air de longueur infinie selon Oz et de section rectangulaire. On admettra que les propriétés de l'air sont celles du vide.

On s'intéresse à la propagation guidée à l'intérieur du tube d'une onde électromagnétique transverse électrique (TE) de pulsation ω , pour laquelle la représentation complexe du champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = \underline{E}(x, y) \exp[i(k_g z - \omega t)] \vec{e}_y$$

où k_g , appelé "norme du vecteur d'onde dans le guide", est une fonction de ω que l'on cherche à déterminer.

- 1) Écrire les quatre équations de Maxwell dans le guide et en déduire que $\underline{E}$ ne dépend que de x .
- 2)
 - a) Déterminer les composantes du champ magnétique de cette onde en fonction de $\underline{E}$ et de $\frac{d\underline{E}}{dx}$.
 - b) Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait $\underline{E}(x)$. En donner les différentes solutions possibles en fonction du signe de $\frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2$.
 - c) Montrer qu'il n'y a qu'un seul type de solution compatible avec les conditions aux limites et qu'il est nécessaire d'introduire un entier $n > 0$ pour expliciter cette solution.
 - d) Quelle est alors l'expression de k_g en fonction de ω , n , a et de c (célérité de la lumière dans le vide) ?

La donnée de l'entier n définit ce qu'on appelle un mode de propagation dans le guide d'onde. Pour la suite on n'étudiera que le mode fondamental caractérisé par $n = 1$ et on notera E_m l'amplitude, supposée réelle, du champ électrique de ce mode. On aura donc :

$$\vec{E}(x, z, t) = E_m \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp[i(k_g z - \omega t)] \vec{e}_y$$

- 3)
 - a) Montrer que pour que cette onde puisse se propager dans le guide, sa pulsation ω doit être supérieure à une pulsation ω_C , appelée *pulsation de coupure*.

Application numérique : calculer ω_C lorsque $a = 2,0$ cm. On prendra $c = 3 \times 10^8$ m.s⁻¹.

- b) Quelle est la forme de la solution lorsque $\omega < \omega_C$? Comment se nomme ce type d'onde ?

Pour la suite, on pourra utiliser les résultats ci-dessous. Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont deux vecteurs dont la variation temporelle est sinusoïdale, avec la même pulsation ω , alors les valeurs moyennes de leurs produits scalaire et vectoriel peuvent être calculées au moyen des relations suivantes :

$$\langle \vec{a} \cdot \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{\vec{a}} \cdot \underline{\vec{b}}^*\} \quad \text{et} \quad \langle \vec{a} \wedge \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{\vec{a}} \wedge \underline{\vec{b}}^*\}$$

où $\underline{\vec{b}}^*$ représente le vecteur complexe conjugué de $\underline{\vec{b}}$.

4) On se place dans le cas $\omega > \omega_C$.

- a) Calculer la puissance électromagnétique moyenne $\langle P \rangle$ qui, du fait de la propagation de l'onde, traverse une section droite de ce guide, située à l'abscisse z .
- b) Calculer l'énergie électromagnétique moyenne $\langle U_{\text{em}} \rangle$ contenue dans une longueur L de ce guide.
- c) La vitesse moyenne v_e de propagation de l'énergie dans le guide est définie par $v_e = \frac{1}{ab} \frac{\langle P \rangle}{\langle U_{\text{em}} \rangle}$. Pouvez-vous justifier cette expression ?

En donner son expression en fonction de ω , ω_C et c .