COHÉRENCE TEMPORELLE ET SPATIALE

Table des matières

I. Cohérence temporelle de la lumière **1**
- **1)** Composante monochromatique d'un signal lumineux . 2
- **2)** Densité spectrale d'intensité 2
- **3)** Les différents types de lumières 3
  - **a)** Raie quasi-monochromatique 3
  - **b)** Spectre de raies quasimonochromatiques 3
  - **c)** Lumière à spectre large 3
- **4)** Relation entre intensité dans le champ d'interférences et densité spectrale 3
- **5)** Lien avec la fonction d'autocorrélation 4
- **6)** Durée de cohérence d'une raie quasi-monochromatique 5
  - **a)** Définition de la durée de cohérence 5
  - **b)** Allure de l'intensité lumineuse 6

II. Interférences en lumière blanche **7**
- **1)** Densité spectrale de l'intensité lumineuse dans le champ d'interférence 7
- **2)** Cas d'une lumière blanche 7
- **3)** Notion de spectre cannelé 9

III. Interférences avec une source étendue **10**
- **1)** Principe du calcul de l'intensité 10
- **2)** Cas d'une lumière monochromatique : critère de visibilité des franges 10
- **3)** Interféromètre de Michelson en lame d'air éclairé par une source étendue 12
- **4)** Exemple de l'interféromètre de Michelson en coin d'air 14

I. Cohérence temporelle de la lumière

On a vu au chapitre précédent que lorsque deux signaux lumineux émis par un même point source S se superposaient en un point M en ayant un décalage temporel τ, cela provoquait des interférences en M avec une intensité lumineuse donnée par :

$$I(M) = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2}\, g_n(\tau)$$

où g_n est la fonction d'autocorrélation normalisée de la lumière émise par S. Le terme d'interférence est $I_{12}(M) = \pm 2\sqrt{I_1 I_2}\, g_n(\tau)$.

- Dans le cas d'une lumière monochromatique de pulsation ω_0 on a vu que :

$$g_n(\tau) = \cos(\omega_0 \tau)$$

  Cependant un signal lumineux monochromatique n'est qu'un modèle mathématique qui n'a pas vraiment de réalité physique : aucun signal lumineux ne peut être écrit comme une sinusoïde $a(t) = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$.

  Ce modèle est simpliste mais il traduit une idée physique très importante qui est qu'à une couleur donnée est associée une seule fréquence. Il va cependant falloir affiner ce modèle.

- On a vu que dans un modèle de trains d'onde sinusoïdaux de durée τ_0, la fonction d'autocorrélation normalisée s'écrivait :

$$g_n(\tau) = \left|1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right| \cos(\omega_0 \tau)$$

  ce qui introduit l'idée fondamentale que $|g_n|$ décroit lorsque le décalage temporel augmente pour finir par s'annuler (ou du moins tendre vers 0) lorsque τ devient trop important.

  Cette propriété est bien observée expérimentalement : le terme d'interférence $|I_{12}|$ décroît au fur et à mesure que τ augmente (ou de façon équivalente que la différence de marche $\delta = c\tau$ augmente) et finit par devenir infime. Bien que le point M soit encore dans le champ d'interférences, l'intensité lumineuse en M devient simplement la somme des intensités de chaque signal :

$$I(M) = I_1 + I_2$$

1) Composante monochromatique d'un signal lumineux

Soit S une source ponctuelle qui émet un signal lumineux $a(S,t)$, noté plus simplement $a(t)$. Nous ne faisons aucune supposition sur l'expression de $a(t)$ excepté le fait que $a(t)$ est de carré sommable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Un théorème dû à Joseph Fourier permet alors d'affirmer que $a(t)$ peut être regardé comme une somme de signaux sinusoïdaux dans laquelle toutes les pulsations ω sont présentes. De façon plus précise on peut écrire :

$$\boxed{a(t) = \int_{0}^{+\infty} A_m(\omega)\cos[\,\omega t + \varphi(\omega)\,]\,\mathrm{d}\omega}$$

Définition. Composante monochromatique.

Le signal $t \longmapsto A_m(\omega)\cos[\,\omega t + \varphi(\omega)\,]$ est appelé *composante monochromatique* de pulsation ω (ou de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$) associé au signal $a(t)$.

Conclusion :

Ce théorème donne toute sa pertinence au concept de signal monochromatique vu comme une sinusoïde de pulsation ω.

Cependant, un signal monochromatique ne peut jamais être isolé, c'est à dire qu'il ne se rencontre jamais seul. Tout ce que l'on sait produire est une lumière qui contient plus ou moins de composantes monochromatiques

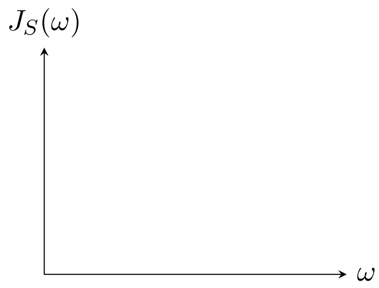
Le signal lumineux émis par S peut être regardé comme une somme infinie de signaux monochromatiques qui sont ses composantes monochromatiques. Ceci justifie l'intérêt qu'on porte en physique à un signal purement sinusoïdal.

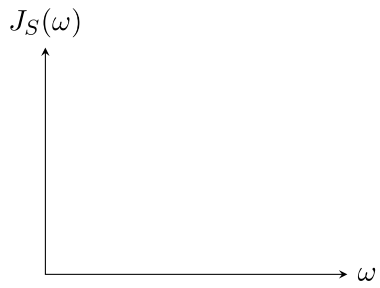
2) Densité spectrale d'intensité

Le fait que $a(t)$ soit une superposition de composantes monochromatiques avec toutes les pulsations ω a un impact direct sur l'intensité I_S émise par la source ponctuelle S. On peut en effet montrer que I_S peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{I_S = \int_{0}^{+\infty} J_S(\omega)\,\mathrm{d}\omega}$$

où $J_S(\omega)$ est la densité spectrale en intensité de la lumière émise par S.





Interprétation :

$J_S(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ est la contribution à I_S des composantes monochromatiques de $a(t)$ dont la pulsation est comprise entre ω et $\omega + \mathrm{d}\omega$. *L'intensité I_S est donc la somme des contributions de chaque composante monochromatique de $a(t)$.*

Autres types densités spectrales

3) Les différents types de lumières

En pratique on classe les lumières selon l'allure de leurs densités spectrales. Schématiquement on peut rencontrer trois types de lumière : lumière quasi-monochromatique, lumière dont le spectre contient plusieurs raies d'émission et lumière à spectre large.

a) Raie quasi-monochromatique

b) Spectre de raies quasimonochromatiques

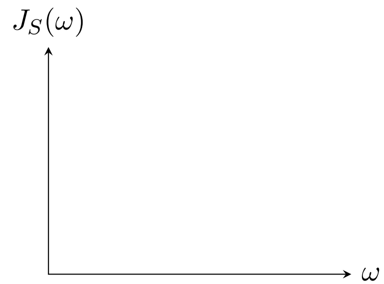
c) Lumière à spectre large

4) Relation entre intensité dans le champ d'interférences et densité spectrale

On considère un signal lumineux $a(t)$ émis par une source ponctuelle S, caractérisé par une densité spectrale $J_S(\omega)$. Dans le cadre du programme, on se place dans l'hypothèse simplificatrice suivante :

$$\boxed{|\kappa_1| = |\kappa_2| = \kappa}$$

Raisonnement :



.

Remarques :

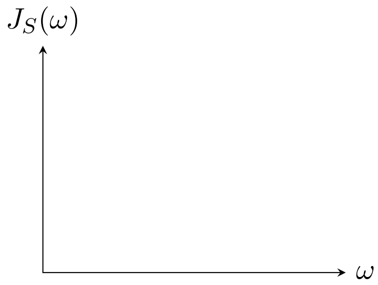
- Dans les sujets de concours, la densité spectrale $J_S(\omega)$ peut être notée différemment que dans ce cours. Savoir s'adapter !
- On peut aussi utliser d'autres types de densités spectrales : c'est un simple changement de variable.

5) Lien avec la fonction d'autocorrélation

6) Durée de cohérence d'une raie quasi-monochromatique

a) Définition de la durée de cohérence

On suppose dans cette partie que le signal lumineux $a(t)$ émis par la source ponctuelle S est formé d'une seule raie quasi-monochromatique de pulsation centrale ω_0 et de largeur à mi-hauteur $\Delta\omega$ (en pulsation) ou bien $\Delta\nu$ (en fréquence).



Durée de cohérence

> Dans le cas d'une lumière dont le profil spectrale est une raie quasi-monochromatique de largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$, la durée de cohérence est définie par :
> $$\tau_c \overset{\text{déf}}{=} \frac{1}{\Delta\nu}$$

Montrons que cette définition est cohérente avec celle donnée précédemment : temps caractéristique de décroissance de la fonction d'autocorrélation nomalisée.

Exemple de la raie à profil gaussien. On donne (avec $\alpha > 0$) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha u^2}\, e^{i\xi u}\, \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\xi^2/4\alpha}$$

Propriété des interférences avec une raie quasi-monochromatique

Dans la zone du champ d'interférences où $|\tau| \ll \tau_c$, c'est à dire où $|\delta| \ll \ell_c$, l'intensité lumineuse produite par une raie quasi-monochromatique de pulsation centrale ω_0 est donnée par la formule de Fresnel :

$$I(M) = 2I_0\,[\,1 \pm \cos(\omega_0 \tau)\,] \quad \text{avec} \quad I_0 = \kappa^2\, I_S$$

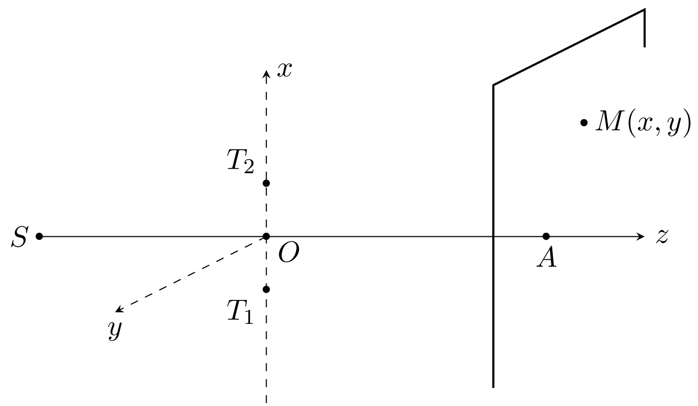
Tout se passe comme si le signal lumineux était monochromatique de pulsation ω_0.

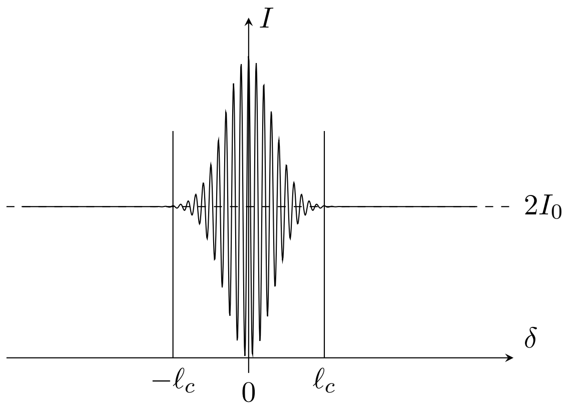
Quelques ordres de grandeur :

	λ_0 (nm)	τ_c (s)	ℓ_c
Raie verte du mercure	546,1	10^{-12}	3.10^{-4} m = 0,3 mm
Laser He - Ne	632,8	10^{-9}	3.10^{-1} m = 30 cm

b) Allure de l'intensité lumineuse

On réalise l'expérience des trous d'Young, la source ponctuelle S étant placée sur la médiatrice des deux trous T_1 et T_2 et l'observation se faisant sur un écran (E) à la distance D du plan des trous.





Cas d'une raie à profil gaussien. Visualisation de l'intensité sur l'écran du montage des trous d'Young.

.

II. Interférences en lumière blanche

1) Densité spectrale de l'intensité lumineuse dans le champ d'interférence

Considérons une source ponctuelle S qui émet une lumière caractérisée par une densité spectrale $J_S(\omega)$ quelconque (on ne fait aucune hypothèse particulière sur la forme de J_S) :

Cette lumière traverse un dispositif interférentiel à deux ondes pour lequel on suppose pour simplifier que $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$: c'est le cas des trous d'Young ou de l'interféromètre de Michelson. En un point M du champ d'interférences où la différence de marche est δ, l'intensité lumineuse s'écrit :

$$I(\delta) = \int_0^{+\infty} 2\kappa^2 \, J_S(\omega) \, \left[1 + \cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right)\right] \, \mathrm{d}\omega$$

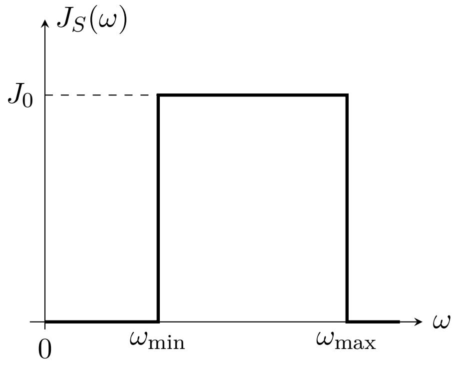
Par analogie avec la relation entre I_S et $J_S(\omega)$, on définit la fonction $J : (\omega, \delta) \longmapsto 2\kappa^2 J_S(\omega) \, \left[1 + \cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right)\right]$. L'intensité en M peut donc se mettre sous la forme :

$$I(\delta) = \int_0^{+\infty} J(\omega, \delta) \, \mathrm{d}\omega$$

$J(\omega, \delta)$ est la *densité spectrale* d'intensité lumineuse mesurée en un point M du champ d'interférences où la différence de marche est δ. Elle est accessible à l'expérience en plaçant la tête d'entrée d'un spectromètre au point M.

2) Cas d'une lumière blanche

Considérons maintenant le cas particulier où J_S possède l'allure dessinée ci-dessous :



où $[\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}]$ s'étend sur tout le spectre visible. *Il s'agit donc de lumière blanche.* Plus précisément, c'est une lumière blanche pour laquelle les contributions des différentes composantes monochromatiques ont un "poids" égale dans l'intensité lumineuse.

On aura donc :

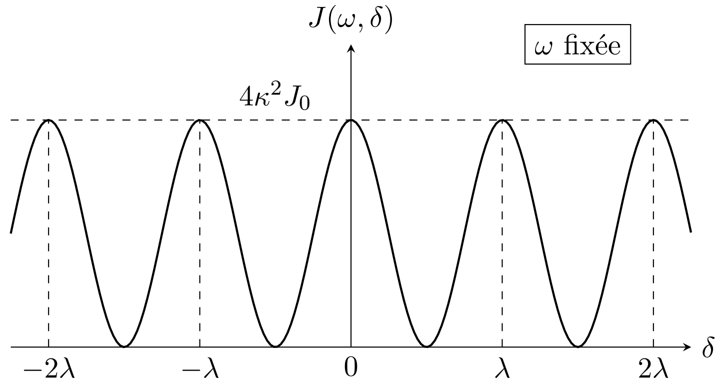
$$J(\omega,\delta) = \begin{cases} 2\kappa^2 J_0 \left[1+\cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right)\right] & \text{si} \quad \omega \in [\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}] \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin [\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}] \end{cases}$$

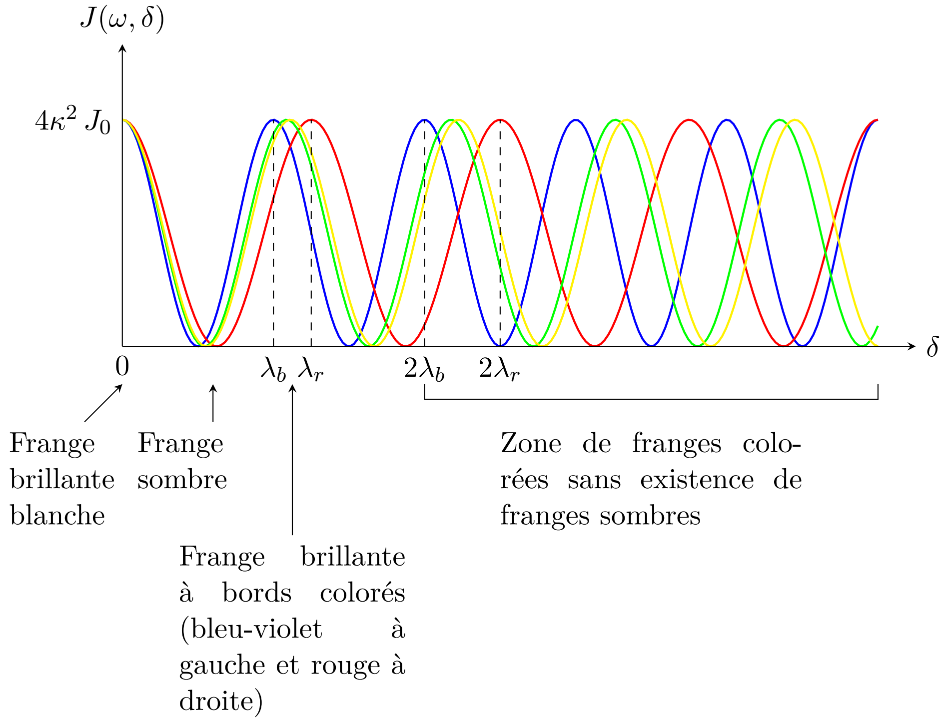
Fixons la pulsation $\omega \in [\omega_{\text{min}}, \omega_{\text{max}}]$ et étudions l'évolution de $J(\omega,\delta)$ avec δ. C'est une fonction périodique de période P_δ t.q. :

$$\forall\,\delta,\ J(\omega,\delta+P_\delta) = J(\omega,\delta) \implies \boxed{P_\delta = \frac{2\pi c}{\omega} = \lambda}$$

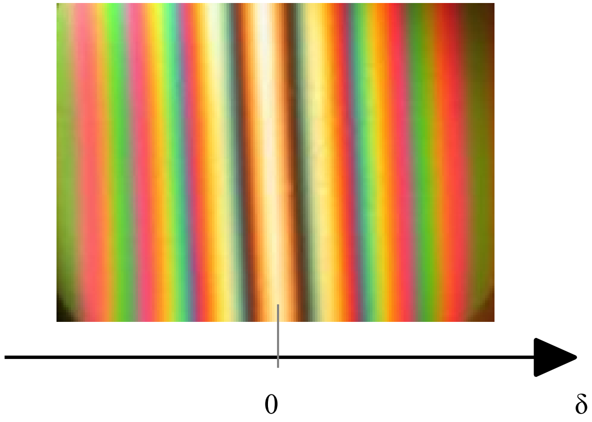
où λ est la longueur d'onde dans le vide associée à la composante monochromatique de pulsation ω. Son allure est donnée ci-contre (figure du haut) :

En superposant plusieurs courbes correspondant à différentes valeurs de ω (donc de λ), c'est à dire pour différentes couleurs du spectre visible (bleu, vert, jaune et rouge), on obtient la seconde figure ci-contre (en bas).





Dans un dispositif où les franges d'interférences sont rectilignes (cas des trous d'Young ou de l'interféromètre de Michelson en coin d'air), l'aspect visuel des franges observées est donné ci-dessous :



On observe :

- Une frange brillante blanche en $\delta = 0$ bordée par deux franges sombres symétriques ;
- deux autres franges brillantes symétriques l'une de l'autre à bords colorés (bleu-violet sur un bord et rouge sur l'autre bord) ;
- une succession de franges colorées qui résultent du décalage de plus en plus important des sinusoïdes $f(\omega, \delta)$ pour les différentes longueurs d'onde du spectre ;
- du blanc uniforme dès que $|\delta| \gg \ell_c$, où ℓ_c est la longueur de cohérence de la lumière blanche, de l'ordre de 1 μm ($\tau_c \approx 2{,}5.10^{-15}$ s). En pratique dès que $|\delta| \geqslant 5\,\ell_c$, ce qui représente $|\delta| \geqslant 6\,\lambda_{\text{rouge}}$, l'intensité est uniforme et blanche sur l'écran d'observation.

3) Notion de spectre cannelé

Revenons au cas général où J_S est quelconque mais d'extension "suffisamment importante", c'est à dire que l'intervalle des pulsations pour lesquelles $J_S(\omega) \neq 0$ est "suffisament grand". On aura :

$$J(\omega, \delta) = 2\kappa^2 J_S(\omega) \left[1 + \cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right)\right]$$

En un point M fixé du champ d'interférences, c'est à dire pour δ fixée, il existe des pulsations ω qui annulent $J(\omega, \delta)$. Ces pulsations sont appelées **cannelures sombres** et elles vérifient l'équation :

$$\cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right) = -1 \iff \frac{\omega\delta}{c} = \pi + 2m\pi,\ m \in \mathbb{N}$$

c'est à dire :

$$\boxed{\omega = \frac{\pi c}{\delta} + m\,\frac{2\pi c}{\delta},\ m \in \mathbb{N}}$$

Les longueurs d'onde associées sont données par :

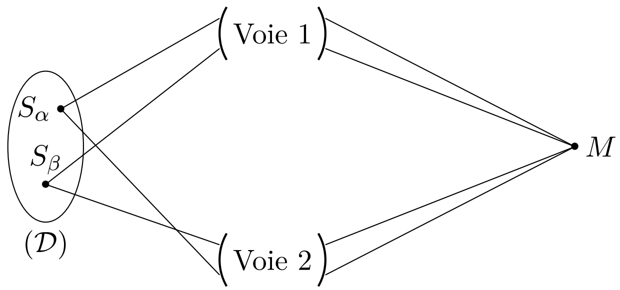
$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\,\delta}{1 + 2m},\ m \in \mathbb{N}}$$

Exemple :

III. Interférences avec une source étendue

1) Principe du calcul de l'intensité

On considère maintenant une source étendue $(\mathcal{D})$ qui éclaire un dispositif interférentiel à deux voies. Soient S_α et S_β deux sources ponctuelles particulières de $(\mathcal{D})$.



Au point M se croisent 4 rayons lumineux : deux provenant de S_α et deux provenant de S_β. Notons $a(S_\alpha, t)$ le signal lumineux émis par S_α et $a(S_\beta, t)$ celui émis par S_β.

.

Règle

Lorsqu'une source étendue $(\mathcal{D})$ éclaire un dispositif interférentiel, chaque point source $S \in \mathcal{D}$ produit en M son propre système d'interférences caractérisé par l'intensité :

$$I(S, M) = I_{1S} + I_{2S} \pm 2\sqrt{I_{1S} I_{2S}}\; g_{S,n}(\,\tau(S, M)\,)$$

où $g_{S,n}$ est la fonction d'autocorrélation normalisée de S et où $\tau(S, M)$ est le décalage temporel en M entre les deux rayons lumineux issus de S, avec $\tau(S, M) = \delta(S, M)/c$.

L'intensité lumineuse en M est alors la somme des intensités lumineuses produites par chacun des points sources $S \in \mathcal{D}$:

$$I(M) = \sum_{S \in \mathcal{D}} I(S, M)$$

Remarque :

En pratique la somme sur les points S se fait à l'aide d'une intégrale. Voir l'exercice 4 du TD.

2) Cas d'une lumière monochromatique : critère de visibilité des franges

Dans le cas particulier où la source étendue $(\mathcal{D})$ émet une lumière monochromatique de pulsation ω_0, l'intensité produite en M par le point source S s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} I(S,M) &= I_{1S} + I_{2S} + 2\sqrt{I_{1S}I_{2S}}\ \cos\left(\Delta\varphi(S,M)\right) \\ &= I_{1S} + I_{2S} + 2\sqrt{I_{1S}I_{2S}}\ \cos\left(2\pi\, p(S,M)\right) \end{aligned}$$

Ceci est aussi valable si la lumière émise par $(\mathcal{D})$ est formée d'une seule raie quasi-monochromatique de pulsation centrale ω_0 à condition que $\forall\, S \in \mathcal{D},\ |\delta(S,M)| \ll \ell_c$.

Comme $I(M) = \sum_{S\in\mathcal{D}} I(S,M)$ le problème est que si une source ponctuelle S_1 produit en M une frange sombre, une autre source ponctuelle S_2 peut y produire une frange brillante. Les franges sombres risquent alors de disparaître, ce qui va brouiller le phénomène d'interférences. On veut un critère pour éviter cela.

Critère semi-qualitatif de visibilité des interférences.

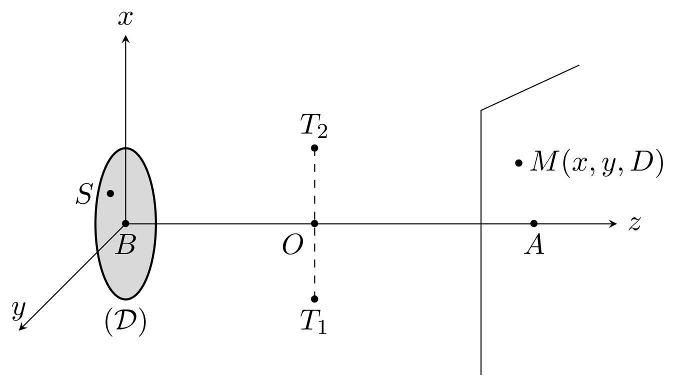
Si $(\mathcal{D})$ est une source étendue qui éclaire un dispositif interférentiel et que M est un point du champ d'interférences, alors les interférences restent visibles dans une petite région autour de M si et seulement si :

$$|\Delta p(M)| \ll \frac{1}{2}$$

.

Exemple des trous d'Young

On reprend le montage de base des trous d'Young. La source étendue $(\mathcal{D})$ est dans le plan (Bxy)



.

3) Interféromètre de Michelson en lame d'air éclairé par une source étendue

On utilise une source étendue $(\mathcal{D})$ pour éclairer un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air. On se place dans le cas où la lumière émise par chaque point source $S \in (\mathcal{D})$ est monochromatique de pulsation ω_0.

Soit M un point du champ d'interférences. Chaque point source $S_\alpha \in \mathcal{D}$ donne deux rayons lumineux qui vont se croiser en M après être respectivement passés par la voie 1 et par la voie 2, avec une différence de marche $\delta(S_\alpha, M)$. Ces deux rayons semblent provenir de deux points sources fictifs $S_{\alpha 1}$ et $S_{\alpha 2}$ associés à S_α.

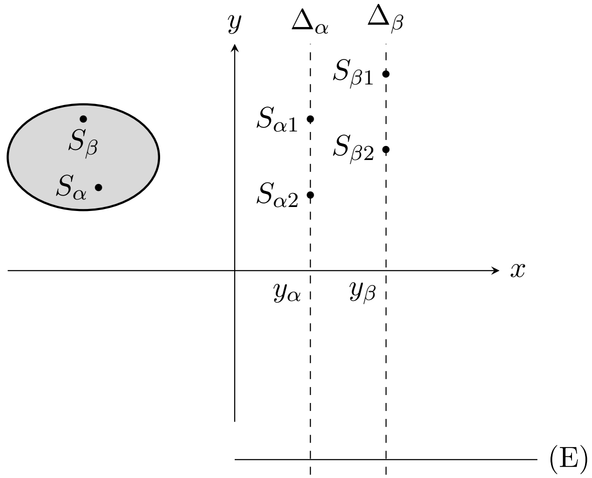
L'intensité lumineuse produite en M par S_α s'écrit :

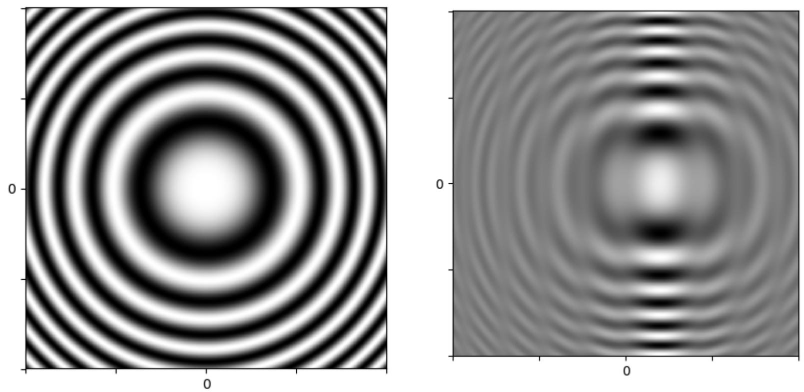
$$I(S_\alpha, M) = 2\kappa^2 I_{S_\alpha}\left[1 + \cos\left(\frac{\omega_0\,\delta(S_\alpha, M)}{c}\right)\right]$$

L'intensité produite en M par la source étendue $(\mathcal{D})$ est la somme des contributions de chaque point source $S_\alpha \in \mathcal{D}$:

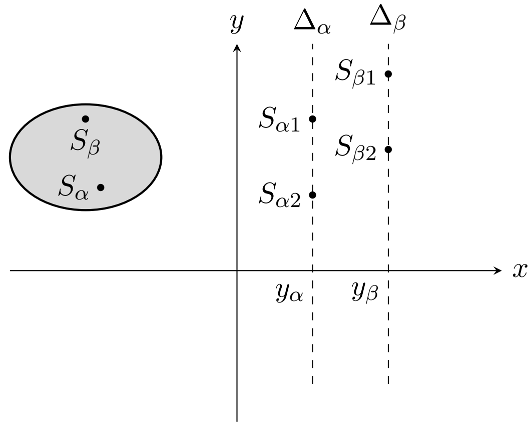
$$I(M) = \sum_{S_\alpha \in \mathcal{D}} I(S_\alpha, M)$$

1$^{\text{er}}$ **cas** : l'écran (E) d'observation est placé à distance finie :



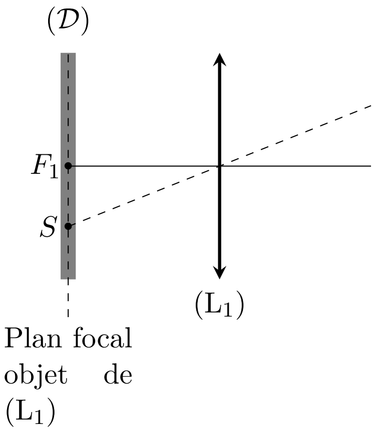


2$^{\text{ème}}$ **cas** : l'écran est placé à l'infini ou dans le plan focal image d'une lentille convergente



4) Exemple de l'interféromètre de Michelson en coin d'air

L'interféromètre est maintenant réglé en coin d'air et il est éclairé par une source étendue $(\mathcal{D})$ placée dans le plan focal objet de la lentille (L_1). Comme on raisonne uniquement avec des schémas plans on va la représenter par un trait de lumière centré sur le foyer objet F_1 de (L_1).



Chaque source ponctuelle $S \in \mathcal{D}$ émet une lumière monochromatique de pulsation ω_0 et produit un faisceau de rayons parallèles d'angle $i \in [-i_m, i_m]$ et crée en M sa propre figure d'interférence.

$$I(S,M) = \frac{I_S}{2}\left\{1 + \cos\left(\frac{\omega_0}{c}\,\delta(x,y,i)\right)\right\}$$

L'intensité totale en M est la somme :

$$I(M) = \sum_{S \in \mathcal{D}} I(S,M)$$

En un point M donné du champ d'interférences, la variation de i entraîne en général le brouillage des franges d'interférences **sauf** si $\delta(x,y,i)$ varie peu avec i (x et y étant fixés). On fait le calcul sur feuille à part.

Bilan de ce chapitre

Points du cours à connaître :

- Connaître les différentes densités spectrales. Pour une raie quasi-monochromatique, savoir rétablir les relations entre les largeurs à mi-hauteur $\Delta\omega$, $\Delta\nu$ et $\Delta\lambda$:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

- Interférences avec une source ponctuelle S émettant une lumière caractérisée par une densité spectrale $J_S(\omega)$. Connaître toute la démarche pour établir l'intensité en un point M du champ d'interférences :

$$I(M) = 2\kappa^2 \int_0^{+\infty} J_S(\omega) \left[1 \pm \cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right)\right] \mathrm{d}\omega$$

- Cas d'une raie quasi-monochromatique : durée de cohérence $\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}$ et longueur de cohérence $\ell_c = c\tau_c$. Dans le cas où $|\delta(M)| \ll \ell_c$ la formule de Fresnel est pertinente pour exprimer l'intensité lumineuse $I(M)$ dans le champ d'interférences :

$$I(M) = 2I_0 \left[1 \pm \cos\left(\frac{\omega_0\delta}{c}\right)\right]$$

  Si $|\delta(M)| \geqslant \ell_c$ alors $I(M) = I_1 + I_2$ (plus d'interférences).

- Connaître la démarche pour calculer $I(M)$ connaissante J_S : extension de la borne inférieure de l'intérale à $-\infty$, passage par la partie réelle d'une intégrale à valeur complexe, ...
- Lumière blanche : connaître la démarche pour calculer les cannelures sombres.
- Interférences avec une source étendue : énoncer la règle d'incohérence spatiale page 10. Dans le cas d'une lumière monochromatique, énoncer le critère semi-qualitatif de visibilité des interférence page 11.

Exercices à travailler :

- En priorité : 1, 2, 3, 5 et 6
- S'il y a le temps : 4