

DS n°7 CCINP
Samedi 28 mars 2026 - Durée 4h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Premier problème. Une eau traitée par électrolyse

Les procédés de traitement de l'eau des piscines reposent majoritairement sur l'utilisation de produits chlorés. En effet, la plupart des bactéries nuisibles sont détruites par adjonction d'ions hypochlorites ClO^- . Les ions hypochlorites étant des composés peu stables, il est nécessaire d'en assurer le renouvellement dans l'eau de bain. La technique la plus répandue en France est la chloration à l'eau de Javel. L'inconvénient principal de cette méthode est le recours important aux produits chimiques. Le risque d'irritation pour la peau et les yeux en cas de mauvais dosage est également à considérer. Nous étudions dans la suite un système alternatif basé sur l'électrolyse d'une solution aqueuse de chlorure de sodium.

Données numériques :

Constante d'Avogadro $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Rayon ionique de l'ion Na^+ : $R^+ = 97 \text{ pm}$

Rayon ionique de l'ion Cl^- : $R^- = 181 \text{ pm}$

Masse molaire atomique de Na : $M_{Na} = 23,0 \text{ g.mol}^{-1}$

Masse molaire atomique de Cl : $M_{Cl} = 35,5 \text{ g.mol}^{-1}$

Potentiel standard du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$: $E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$

Potentiel standard du couple $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$: $E^0(\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2) = 0 \text{ V}$

Potentiel standard du couple Cl_2/Cl^- : $E^0(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) = 1,30 \text{ V}$

Constante de Faraday : $F = N_A \times e = 96\,500 \text{ C.mol}^{-1}$

1) Étude du réseau cristallin NaCl

La structure du chlorure de sodium est représentée FIGURE 1. Les ions chlorure (Cl^-) cristallisent dans un système cubique à faces centrées. Les ions sodium (Na^+) occupent tous les sites octaédriques et forment également un réseau cubique à faces centrées, décalé d'une demi-arête de celui des ions Cl^- .

1. Définir et calculer le paramètre de maille a .
2. Calculer la masse volumique du cristal de NaCl. Commenter le résultat obtenu.

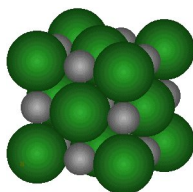
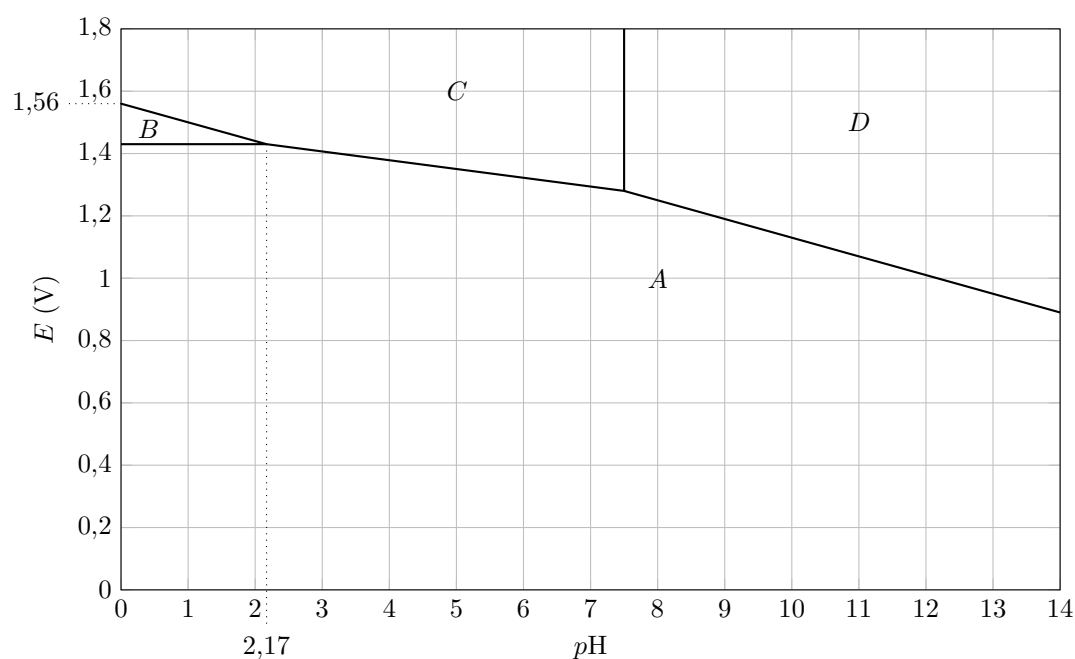


FIGURE 1 – Structure du chlorure de sodium.

2) Exploitation du diagramme E - pH du chlore

La FIGURE 2 donne le diagramme potentiel-pH de l'élément chlore. Les espèces considérées, qui sont toutes en solution, sont $\text{Cl}_{2(aq)}$, $\text{Cl}_{(aq)}^-$, $\text{HClO}_{(aq)}$ et $\text{ClO}_{(aq)}^-$. La concentration de tracé est $C = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. Les frontières entre deux espèces ont été calculées en traduisant l'égalité des concentrations molaires en élément chlore de chaque espèce sur la frontière, la somme de ces concentrations étant égale à C .

FIGURE 2 – Diagramme $E - pH$ du chlore.

1. Justifier que les espèces A , B , C et D sont respectivement $\text{Cl}_{(aq)}^-$, $\text{Cl}_{2(aq)}$, $\text{HClO}_{(aq)}$ et $\text{ClO}_{(aq)}^-$.
2. Déterminer le pK_a du couple HClO/ClO^- .
3. Écrire la demi-équation redox entre les espèces A et D .
4. Déterminer la pente de la frontière D/A et en effectuer la vérification graphique.
5. Déterminer le potentiel standard du couple D/A .

On considère les espèces H_2O , $\text{O}_{2(g)}$ et $\text{H}_{2(g)}$. La pression de tracé est fixée à 1 bar et la concentration de tracé à $1,0 \text{ mol.L}^{-1}$.

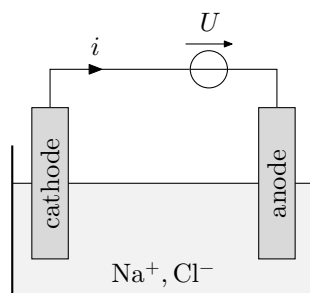


FIGURE 3 – Électrolyseur

6. Déterminer l'équation de la frontière $O_{2(g)}/H_2O$.
7. Déterminer l'équation de la frontière $H_2O/H_{2(g)}$.
8. Tracer succinctement sur votre copie l'allure du diagramme potentiel-pH de l'eau superposé à celui du chlore aqueux. Quels commentaires pouvez-vous formuler ?

3) Étude de la cellule d'électrolyse

On envisage dans la suite une piscine de particulier de contenance $V_0 = 150 \text{ m}^3$. Pour produire ClO^- on installe un électrolyseur directement dans le bassin qui contient préalablement du sel dissout $Na^+_{(aq)} ; Cl^-_{(aq)}$. Le pH de l'eau est maintenu entre 7,0 et 7,4. On suppose qu'initialement l'eau est dégazée et ne contient pas de Cl_2 .

L'électrolyseur est constitué de deux électrodes en titane. Le schéma de principe est donné FIGURE 3. La tension U et le courant i sont des grandeurs positives. Lors de la mise sous tension de l'électrolyseur, on observe :

- une production de $H_{2(g)}$ à la cathode ;
- une production majoritaire de $Cl_{2(aq)}$ et d'un peu de $O_{2(g)}$ à l'anode

L'électrolyseur est placé en amont du système de filtrage de l'eau.

1. Avant la mise en fonctionnement de l'électrolyseur, l'eau de la piscine doit être salée avec une teneur en chlorure de sodium (sel) d'environ $C_s = 5 \text{ g.L}^{-1}$ (on prendra cette valeur pour les applications numériques). Quelle masse de sel le particulier doit-il acheter lors de la première mise en route du dispositif ?
2. Écrire les demi-réactions électroniques des réactions se déroulant à l'anode et à la cathode.
3.
 - a) Recopier l'allure du graphique présenté Figure 4 en indiquant sur les portions de courbes les transformations chimiques correspondantes.
 - b) On néglige dans cette question la résistance interne de l'électrolyseur. Construire sur la figure précédente la tension à appliquer pour une intensité i donnée.
 - c) Quel est selon vous le phénomène responsable de l'obtention majoritaire du dichlore et non du dioxygène à l'anode ?

Si on suppose que Cl_2 est la seule espèce produite à l'anode alors la production horaire de Cl_2 est $m' = 26 \text{ g.h}^{-1}$.

4. Calculer la valeur de i correspondant à ce fonctionnement idéal où Cl_2 est la seule espèce produite.

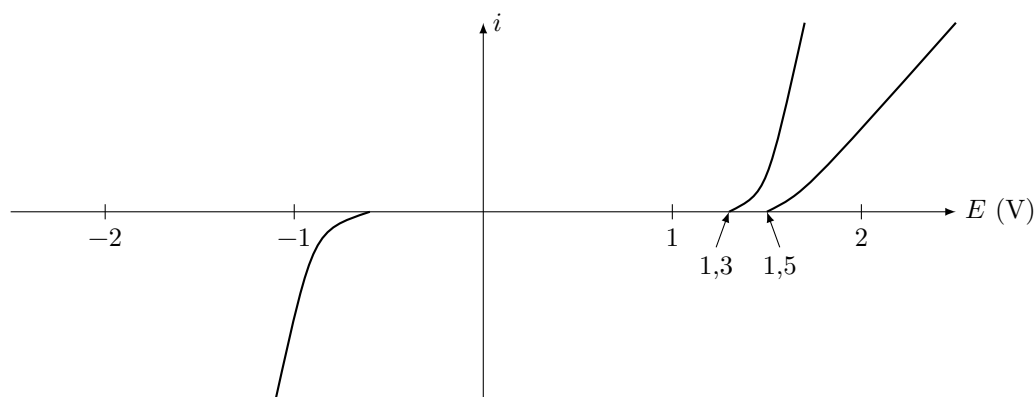


FIGURE 4 – Courbes intensité - potentiel

5. En réalité le rendement faradique de Cl_2 est de 0,75. Quelle est la production horaire de Cl_2 réellement obtenue ?
6. La tension d'alimentation de l'électrolyseur est $U = 7,5 \text{ V}$ et la résistance interne de l'électrolyseur est $R = 0,15 \Omega$. La valeur de l'intensité i étant celle calculée à la question 4., calculer la puissance électrique nécessaire à l'électrolyse. En déduire l'énergie électrique utilisée lors de la production de 1 kg de Cl_2 . Commenter le résultat.

4) Obtention de ClO^-

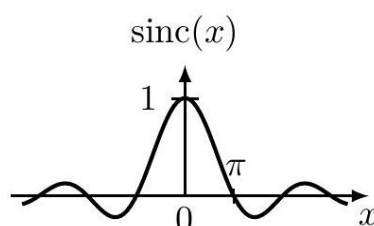
1. Écrire l'équation modélisant la réaction chimique qui, à partir de $\text{Cl}_{2(aq)}$ en solution aqueuse, forme $\text{Cl}^-_{(aq)}$ et $\text{ClO}^-_{(aq)}$. On l'équilibrera avec des ions $\text{H}_3\text{O}^+_{(aq)}$. Quels sont les deux couples rédox mis en jeu ?
2. Comment appelle-t-on ce type de réaction ? Déterminer sa constante d'équilibre K^0 en fonction des potentiels standard des deux couples en présence. Application numérique : calculer K^0 et conclure.

Deuxième problème. Interférences lumineuses à 2 ou 3 ondes

Données pour ce problème :

Sinus cardinal :

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



On considère (figure 5) un faisceau de lumière parallèle monochromatique de longueur d'onde λ , issu d'une source ponctuelle S très éloignée, se propageant dans la direction Oz . Ce faisceau arrive sur un écran placé dans le plan xOy ($z = 0$) percé de deux trous identiques T_1 et T_2 . Les centres des trous O_1 et O_2 ont pour coordonnées respectivement $(\frac{a}{2}, 0, 0)$ et $(-\frac{a}{2}, 0, 0)$. Le rayon des trous est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Ceci permet de supposer qu'il existe un champ d'interférences qui est la zone commune aux deux faisceaux diffractés par les trous. On modélise chaque trou par une source secondaire ponctuelle émettant une lumière uniforme dans le champ d'interférences. Ces sources secondaires sont cohérentes entre elles.

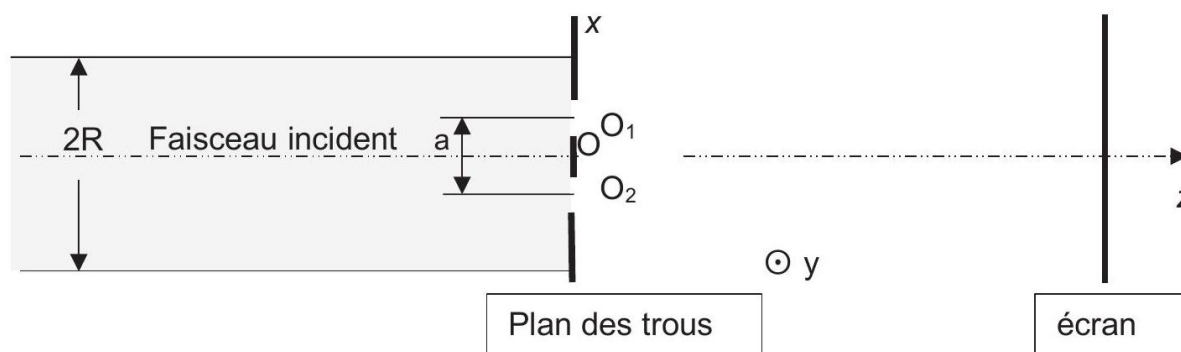


FIGURE 5 – Géométrie du dispositif à deux trous

- Q1.** On observe les interférences sur un écran placé dans le plan $z = D$, en un point M de coordonnées (x, y, D) . On suppose que D est très grand devant $a, |x|$ et $|y|$. Le montage est réalisé dans l'air d'indice égal à l'unité.
- De quel type de division interférentielle s'agit-il ? Les interférences sont-elles localisées ?
 - Établir (dans le cadre de l'approximation scalaire de l'optique) l'expression de la différence de marche $\delta(M)$. Établir l'expression de l'intensité $I(M)$ au point M en notant $I_{\max}$ l'intensité maximale.
- Q2.** Décrire ce qu'on voit sur l'écran dans le cadre de ces hypothèses et exprimer l'interfrange i en fonction de la fréquence d'émission ν , de c et des paramètres géométriques du dispositif.
- Q3.** La source est en réalité quasi-monochromatique à profil spectral "rectangulaire" de largeur $\Delta\lambda$ autour de λ_0 , avec $\Delta\lambda \ll \lambda_0$. Ce profil spectral, en fonction de la fréquence d'émission,

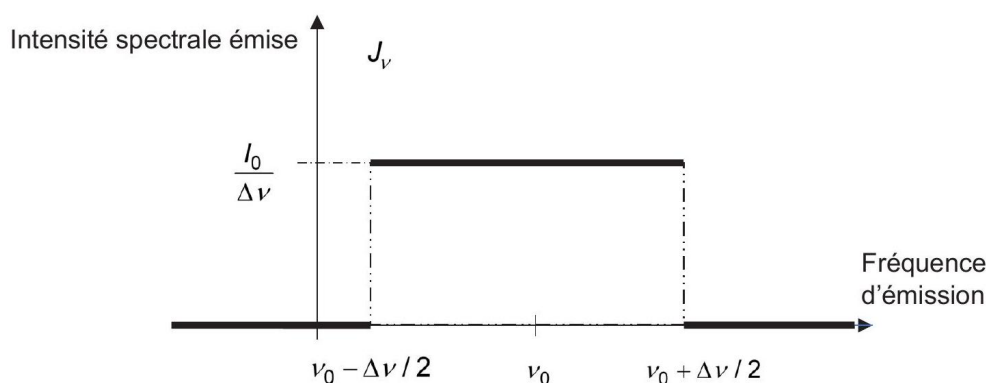


FIGURE 6 – Profil " rectangulaire " d'une source quasi-monochromatique Par commodité de représentation, l'échelle n'est pas respectée ($\Delta\nu \ll \nu_0$).

est représenté sur la figure 6. On admet que l'intensité émise par une bande spectrale de largeur $d\nu$ autour de ν vaut $dI = J_\nu d\nu$.

- a) Établir l'expression de l'intensité $I(M)$ au point M en notant $I_{\max}$ l'intensité maximale et montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme :

$$I(M) = \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + V(M) \cos \left(\frac{2\pi x}{i} \right) \right]$$

avec i l'interfrange correspondant à la valeur centrale ν_0 de la raie. On rappelle que :

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \left(\frac{p - q}{2} \right) \cos \left(\frac{p + q}{2} \right)$$

- b) Exprimer la visibilité $V(M)$ correspondante.
c) Exprimer en fonction de $\Delta\lambda$ et λ_0 la longueur de cohérence L , c'est-à-dire la plus petite valeur de la différence de marche δ à partir de laquelle les franges ne sont plus visibles.

On rappelle le lien entre les deux largeurs spectrales (largeurs à mi-hauteur de la raie quasi-monochromatique) : $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$.

- d) Si on adopte un modèle de trains d'onde, quelle est alors la durée τ des trains d'onde ?
e) Justifier pourquoi on définit le nombre d'interfranges visibles par $N = 2L/\lambda_0$.
f) Dans le tableau ci-dessous sont indiquées des caractéristiques de sources quasi-monochromatiques. Après l'avoir recopié sur votre copie, le compléter et le commenter.

Source	λ_0 en nm	$\Delta\lambda$ en nm	τ en s	L en m	N
Laser He-Ne	633	0,001	?	?	?
Raie rouge de l'hydrogène	656,2	0,1	?	?	?
Lumière blanche filtrée	500	20	?	?	?

Dans la suite de cette partie, on considère que la source est rigoureusement monochromatique de longueur d'onde λ .

Q4. Un troisième trou, identique aux deux autres est placé en $O(0, 0, 0)$.

Le plan des trois trous est placé orthogonalement à l'axe de révolution commun de deux lentilles minces convergentes de distance focale $f' = 50$ cm. La lumière provient d'une source monochromatique placée au foyer principal objet de la première lentille (lentille d'entrée). L'écran d'observation est confondu avec le plan focal image de la seconde lentille (lentille de sortie), placée en aval du plan percé.

- Faire une représentation schématique du montage.
- Représenter les cheminements des trois rayons qui interfèrent en un point M de l'écran.
- Établir la nouvelle fonction intensité $I(\varphi)$ en posant $\varphi = 2\pi \frac{ax}{\lambda f'}$. On fera figurer l'intensité I_0 qui serait produite en M par un unique trou.
- Représenter sur un même graphe la fonction intensité $I(\varphi)$ pour les deux trous de la question Q1. en posant dans ce cas $\varphi = \frac{2\pi ax}{D}$ et la fonction intensité $I(\varphi)$ pour les trois trous obtenue à la question Q4c). On fera la représentation pour $\varphi \in [0, 4\pi]$.
- Commenter en comparant la luminosité et la largeur des zones les plus brillantes.
- On donne sur la photo ci-dessous ce qu'on voit sur l'écran pour une lumière monochromatique rouge de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm. À partir de cette photo, évaluer la distance a entre O_1 et O_2 .

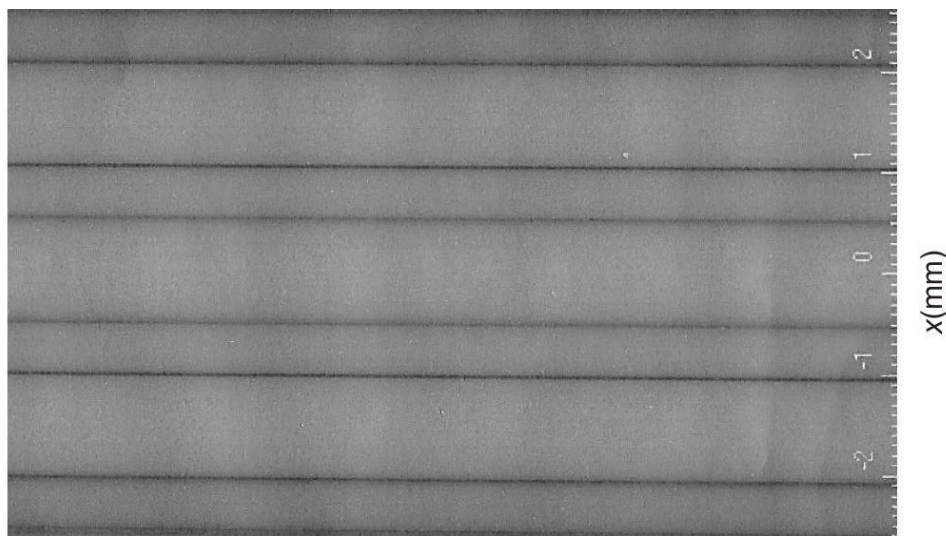


FIGURE 7 – Photo des interférences à 3 trous (plateforme.sillages.info) Les graduations sont en mm

Troisième problème. Voile solaire

On s'intéresse à la propulsion d'un satellite par une voile solaire qui pourrait remplacer les moteurs à combustion actuellement utilisés pour propulser les satellites.

À une grandeur physique évoluant sinusoïdalement avec le temps $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, on associera la grandeur complexe $\tilde{f}(t) = A e^{i(\omega t + \varphi)}$, dont la partie réelle s'identifie à la grandeur physique $f(t)$ et où i est l'unité imaginaire, nombre complexe dont le carré vaut -1.

Par commodité de représentation, les figures de l'énoncé ne respectent pas les échelles.

Certaines données sont regroupées ci-dessous. Lorsqu'une application numérique est demandée, le candidat pourra se contenter d'exprimer le résultat avec un seul chiffre significatif.

Données

- intensité de la pesanteur à la surface de la Terre : $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$;
- charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$;
- masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$;
- permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$;
- célérité des ondes électromagnétiques dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Formulaire

- Double produit vectoriel : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

On se propose dans cette partie d'étudier le mouvement d'un satellite, en orbite autour du centre O de la Terre, modélisée par un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R_T et de masse M_T .

Partie I. Force centrale conservative

On commence par étudier le mouvement d'un mobile quelconque, de masse m et assimilé à un point matériel M , dans le référentiel géocentrique ($\mathcal{R}_T$) considéré comme galiléen. Le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la Terre.

- Q1.** Rappeler la définition du référentiel géocentrique et celle d'un référentiel galiléen.
- Q2.** Après avoir justifié la direction du champ de gravitation terrestre $\vec{\mathcal{G}}(M)$ et les invariances de sa norme, établir l'expression de celui-ci en un point M extérieur à la Terre en fonction de la constante de gravitation universelle G , de la masse M_T , de la distance $r = OM$ et du vecteur unitaire $\vec{u} = \overrightarrow{OM}/r$. En déduire l'expression $\vec{F}_g$ de la force de gravitation exercée par la Terre sur le mobile de masse m .
- Q3.** Montrer que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O$ du mobile par rapport au point O est une constante du mouvement. En déduire que la trajectoire du mobile est plane.

Dans la suite, on associera au référentiel ($\mathcal{R}_T$) le repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de façon à ce que le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_O$ soit aligné avec $\vec{e}_z$. On posera $\vec{\mathcal{L}}_O = \mathcal{L}_0 \vec{e}_z$ et on se placera en coordonnées polaires (r, θ) , de centre O , pour décrire le mouvement du mobile (figure 8).

- Q4.** Montrer que la force gravitationnelle s'exerçant sur le mobile dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. Établir l'expression de celle-ci en la prenant, par convention, nulle à l'infini.

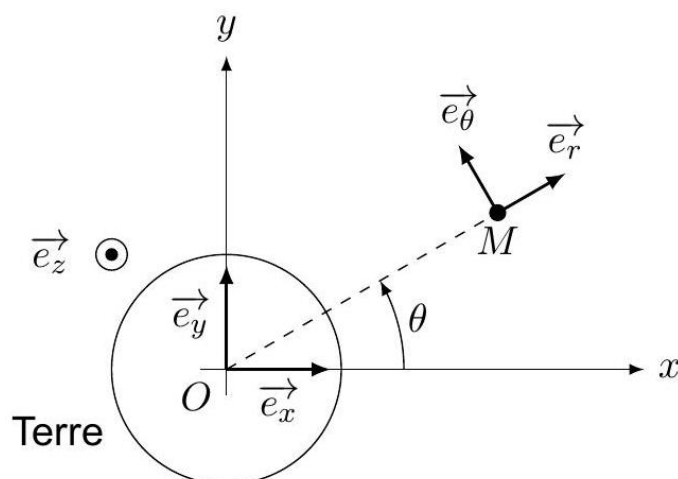


FIGURE 8 – Description du mouvement du mobile dans le système de coordonnées polaires

- Q5.** Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ est une constante du mouvement et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \quad (1)$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est un terme, appelé énergie potentielle effective, que l'on exprimera en fonction de $G, m, M_T, \mathcal{L}_0$ et de r .

- Q6.** Expliquer pourquoi l'énergie mécanique du mobile est nécessairement supérieure ou égale à son énergie potentielle effective.
- Q7.** Représenter graphiquement, pour une valeur donnée de $\mathcal{L}_0$, l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ du mobile en fonction de r . Faire apparaître sur le graphique l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié. On rappelle que, pour une force centrale en $1/r^2$, la trajectoire d'un état lié est elliptique.

La plupart des mesures effectuées par les satellites altimétriques se font à partir de l'orbite altimétrique de référence, que l'on considérera ici comme une orbite circulaire de rayon R . Dans la suite, le mobile étudié correspond à un satellite altimétrique de masse m , assimilable à un point matériel.

- Q8.** Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ du satellite situé sur l'orbite altimétrique de référence, en fonction de G, M_T, m et de R .
- Q9.** Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier d'une orbite circulaire, en utilisant les paramètres liés à l'orbite altimétrique.

On admettra que la troisième loi de Kepler est valable plus généralement pour un mouvement elliptique. Son expression peut se déduire de l'équation obtenue pour le mouvement circulaire, en remplaçant le rayon R de l'orbite circulaire par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique.

Partie II - Voile solaire

Une voile solaire est un dispositif de propulsion spatiale qui utilise la pression du rayonnement solaire pour générer une force de poussée. Le procédé permettrait à un engin déjà placé en orbite de quitter l'attraction terrestre. Plusieurs prototypes de petite taille, destinés à mettre au point les systèmes de déploiement et de contrôle d'orientation particulièrement délicats, ont été placés en orbite, comme par exemple le NanoSail-D2, lancé par la NASA en 2019 et dont une vue d'artiste est représentée figure 9.

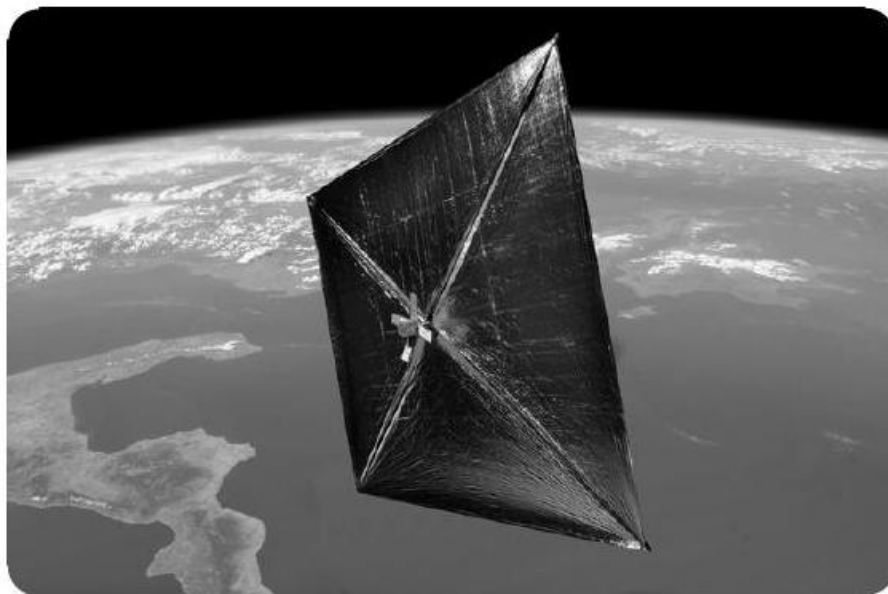


FIGURE 9 – Voile solaire NanoSailD2. Vue d'artiste. Crédit : NASA

On considère une voile solaire de surface carrée $S = a^2$ modélisée par un conducteur parfait. Le rayonnement solaire est assimilé à une onde plane progressive harmonique (OPPH) de pulsation ω , de polarisation rectiligne suivant $\vec{e}_z$ et se propageant selon $\vec{e}_x$ depuis les $x < 0$. L'onde incidente, en un point $M(x, y, z)$ et à l'instant t , s'écrit en notation complexe :

$$\vec{E}_i(M, t) = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_z \quad E_0 > 0$$

où $k = \|\vec{k}\| = \omega/c$ est la pulsation spatiale de l'onde, norme du vecteur d'onde $\vec{k}$ et où E_0 représente l'amplitude réelle de l'onde.

On admet que les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ associés à une onde électromagnétique sont nuls dans un conducteur parfait.

II. 1 - Pression de radiation

On suppose tout d'abord que la normale à la surface S est colinéaire à la direction de propagation de l'OPPH. Le référentiel d'étude est lié à la voile. Dans ce référentiel, la voile solaire se confond avec le plan $x = 0$, comme représenté figure 10.

On donne les relations de passage à l'interface entre deux milieux (1) et (2), de normale $\vec{n}_{12}$ orientée de (1) vers (2) :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \quad \text{et} \quad \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

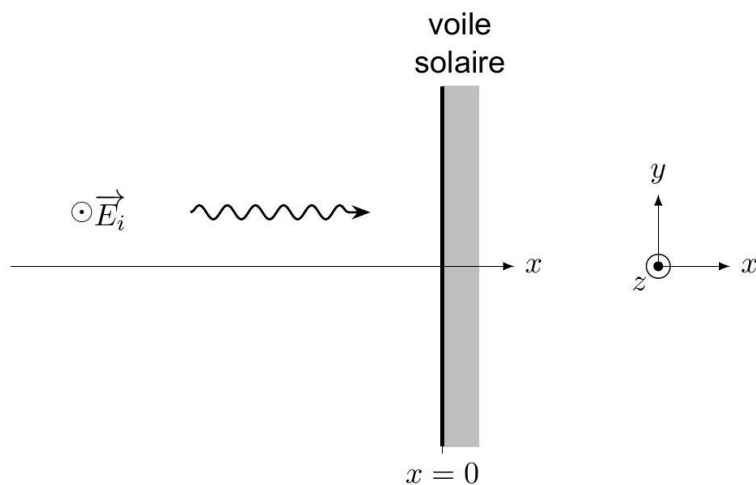


FIGURE 10 – Représentation de l'onde incidente arrivant en incidence normale sur la voile solaire

où $\vec{E}_1, \vec{B}_1, \vec{E}_2$ et $\vec{B}_2$ désignent les champs électriques et magnétiques au voisinage immédiat de l'interface dans les milieux (1) et (2) et où σ et $\vec{j}_s$ sont les densités surfaciques de charge et de courant à l'interface, respectivement.

- Q10.** La voile donne naissance à une onde réfléchie de même pulsation ω que celle de l'onde incidente. On cherche cette onde réfléchie sous la forme d'une OPPH se propageant en sens inverse de l'onde incidente et de polarisation transverse a priori quelconque :

$$\vec{E}_r(M, t) = \underline{E'_{0y}} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y + \underline{E'_{0z}} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_z.$$

En utilisant la relation de passage relative au champ électrique, simplifier l'expression du champ électrique complexe de l'onde réfléchie.

- Q11.** Après avoir déterminé le champ magnétique réel total $\vec{B}(0^-, t)$ régnant au voisinage extérieur de la surface de la voile (en $x = 0^-$), établir l'expression de la densité surfacique de courant réelle $\vec{j}_s(t)$ qui apparaît sur celle-ci.

On s'intéresse, dans la suite, à la force électromagnétique exercée par l'onde sur la voile. On admet que cette force est égale, dans ce cas d'étude particulier, à la force de Laplace exercée sur les courants surfaciques par la moitié du champ magnétique total régnant au voisinage extérieur de la surface de la voile (en $x = 0^-$). On définit le scalaire j_s par la relation :

$$\vec{j}_s = j_s \vec{e}_z.$$

On considère un élément de la voile rectiligne, représenté en grisé sur la figure 11, de longueur a , de largeur dy , assimilé à un fil conducteur parcouru par un courant d'intensité $\delta i = j_s dy$ orienté vers les $z > 0$.

- Q12.** Exprimer la force électromagnétique $\vec{\delta F}_L$ due au champ électromagnétique sur cette portion rectiligne en fonction de a , dy , $\vec{j}_s(t)$ et du champ magnétique total à la surface de la voile $\vec{B}(x = 0^-, t)$.

En déduire que la force électromagnétique totale $\vec{F}_L$ exercée sur l'ensemble de la voile peut s'écrire :

$$\vec{F}_L = 2a^2 \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) \vec{e}_x$$

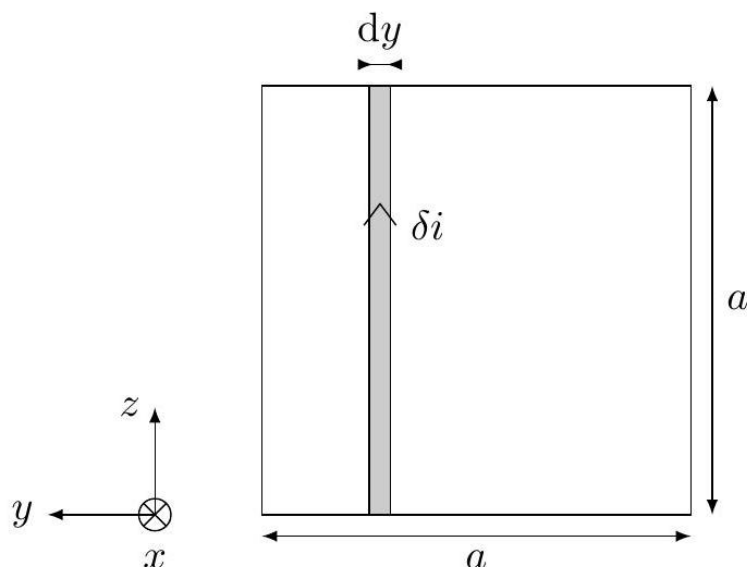


FIGURE 11 – Représentation d'un élément de la voile rectiligne, parcouru par un courant d'intensité δi

- Q13.** En déduire la force électromagnétique surfacique moyennée temporellement $\langle \vec{f} \rangle$ et montrer qu'elle peut s'écrire de la façon suivante :

$$\langle \vec{f} \rangle = P_m \vec{e}_x$$

où P_m est une grandeur, appelée pression de radiation, que l'on exprimera en fonction de la célérité c et de la grandeur $I = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}$ appelée puissance surfacique ou encore intensité de l'onde électromagnétique incidente.

- Q14.** Évaluer l'ordre de grandeur de la surface S nécessaire pour donner à un vaisseau de masse $m = 2000$ kg une accélération environ égale au millième de l'intensité de la pesanteur g régnant à la surface de la Terre, sachant que la puissance surfacique du rayonnement solaire à proximité de la Terre est d'environ 1000 W.m^{-2} . Commenter.

Dans le cas plus général d'une inclinaison quelconque de la voile (figure 12), on peut montrer que la force électromagnétique surfacique moyennée temporellement $\langle \vec{f} \rangle$ peut se mettre sous la forme :

$$\langle \vec{f} \rangle = P_m \cos^2(\varphi) \vec{n} \quad (2)$$

où φ est l'angle caractérisant l'inclinaison par rapport à l'axe Ox du vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la voile.

II. 2 - Libération du vaisseau

Position du problème

On va chercher dans cette sous-partie à étudier une manœuvre permettant à un vaisseau, assimilable à un point matériel M et parcourant initialement une orbite circulaire autour de la Terre, d'atteindre grâce à une voile solaire la vitesse de libération et "d'échapper ainsi à l'attraction terrestre". Pour simplifier l'étude, on considérera l'orbite initiale dans le plan de l'écliptique, qui est le plan de l'orbite du centre de la Terre autour du Soleil et que l'ensemble de la trajectoire restera contenue dans ce plan.

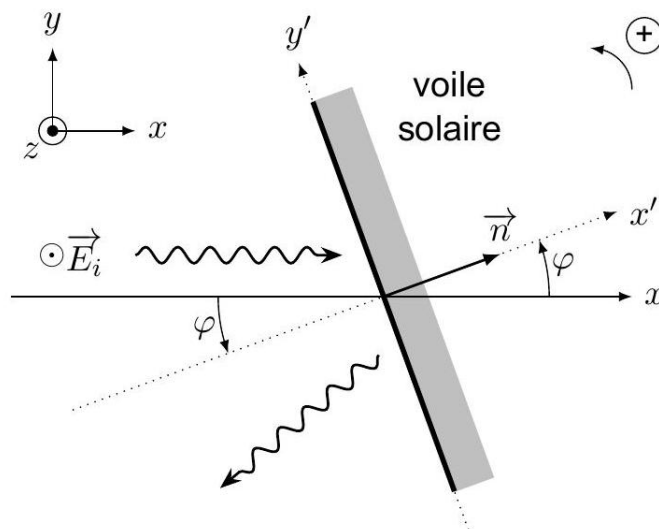


FIGURE 12 – Représentation de la réflexion d’une onde arrivant avec un angle d’incidence quelconque sur la voile

On décrira le mouvement dans le système de coordonnées polaires, dans le plan de l’écliptique, caractérisé par les paramètres $r = OM$ et θ , l’angle entre l’axe Ox , aligné avec la direction du rayonnement solaire et la direction radiale portée par $\vec{e}_r$ (figure 13). Comme l’étude du mouvement du vaisseau ne va durer que quelques jours, on peut négliger le mouvement de la Terre autour du Soleil et considérer le référentiel géocentrique d’étude comme galiléen.

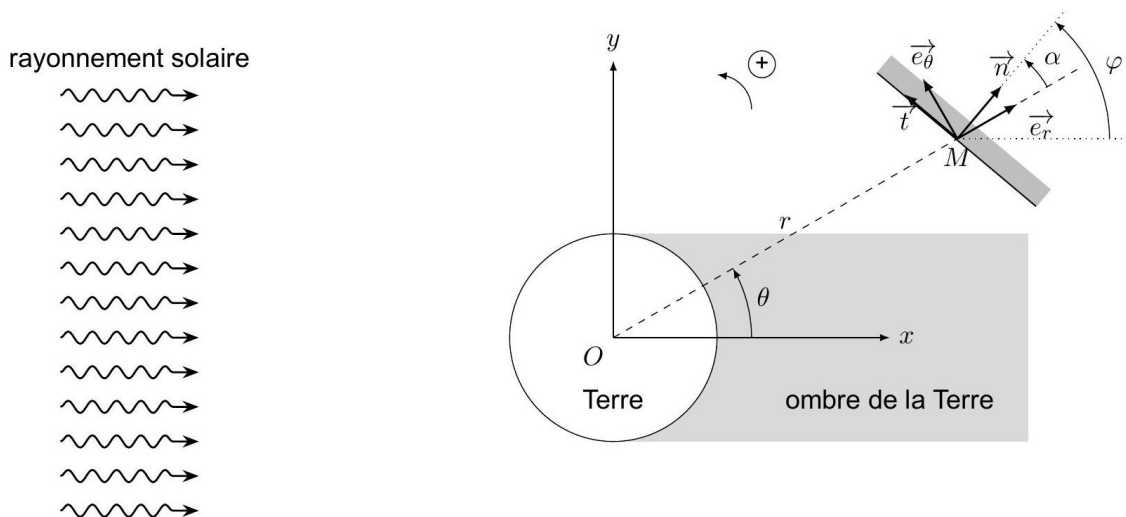


Figure 13 - L’orientation de la voile est repérée par l’angle α que fait le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à la voile avec la direction radiale. Le vecteur $\vec{t}$ est le vecteur unitaire tangent à la voile tel que $(\vec{n}, \vec{t}, \vec{e}_z)$ forme un trièdre direct droit

Grâce à la présence de sa voile, le vaisseau va subir la force $\vec{F}_p$ de pression de radiation exercée par le rayonnement solaire dont la valeur surfacique a été décrite à la sous-partie II.1. En raison du passage du vaisseau dans l’ombre de la Terre, on introduit une fonction $L(r, \theta)$ qui rend compte de la présence ou non du rayonnement solaire sur la voile :

$$\vec{F}_p = L(r, \theta) \langle \vec{f} \rangle S = L(r, \theta) P_m S \cos^2(\varphi) \vec{n}$$

avec

$$L(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \text{ est dans l'ombre de la Terre} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

et où l'angle φ sera à tout instant compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

- Q15.** Donner les expressions en coordonnées polaires du vecteur position $\vec{r}$, du vecteur vitesse $\vec{v}$ et du vecteur accélération $\vec{a}$ du point matériel M qui modélise le vaisseau.
- Q16.** En considérant la Terre comme un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, déterminer les composantes radiale F_r et orthoradiale F_θ de la résultante des forces extérieures s'appliquant sur le vaisseau en fonction de la constante de gravitation universelle G , de la masse M_T de la Terre, de la masse m du vaisseau, de la fonction $L(r, \theta)$ et des grandeurs r, θ, P_m, S et φ .

On note dans la suite v_r et v_θ les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse :

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta.$$

- Q17.** Montrer que les dérivées temporelles $\dot{v}_r$ et $\dot{v}_\theta$ peuvent s'écrire :

$$\dot{v}_r = \frac{F_r}{m} + \frac{v_\theta^2}{r} \quad \text{et} \quad \dot{v}_\theta = \frac{F_\theta}{m} - \frac{v_r v_\theta}{r}.$$

Énergie et manœuvre optimale

On cherche à optimiser la manœuvre du vaisseau en ajustant l'orientation de la voile pour que la force de pression de radiation permette à chaque instant d'augmenter le plus possible l'énergie mécanique du vaisseau.

- Q18.** Donner l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du vaisseau en fonction de G, M_T, m, r, v_r et de v_θ .
- Q19.** Montrer que la dérivée temporelle de l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = K_m L(r, \theta) \cos^2(\varphi) (v_r \cos(\varphi - \theta) + v_\theta \sin(\varphi - \theta))$$

où K_m est une constante que l'on exprimera en fonction de P_m et de S .

II. 3 - Simulation numérique du mouvement du vaisseau

Seul le langage Python est autorisé dans cette sous-partie de simulation numérique. On suppose que le module numpy a été importé grâce à l'instruction :

```
import numpy as np
```

Le candidat pourra à tout moment supposer qu'une fonction ou une instruction définie dans une question précédente est disponible, même s'il n'a pas traité la question correspondante. Une documentation relative au module numpy est fournie en annexe à la fin du sujet.

Dans l'énoncé, une même grandeur peut être écrite suivant le contexte dans deux polices de caractères différentes : une police en italique pour représenter une grandeur physique ou mathématique (par exemple : dt) et une police de type machine pour définir son équivalent dans le code informatique (par exemple : `dt`).

Instruction	Grandeur correspondante
$G = 6.67\text{e-}11$ # en $\text{N.m}^2/\text{kg}^2$	G : constante de la gravitation universelle
$M_T = 5.98\text{e}24$ # en kg	M_T : masse de la Terre
$R_T = 6.37\text{e}6$ # en m	R_T : rayon de la Terre supposée sphérique
$m = 2.0\text{e}3$ # en kg	m : masse du vaisseau
$g = 9.8$ # en N/kg	g : intensité de la pesanteur à la surface de la Terre
$K_m = g / 1000 * m$	K_m : constante apparaissant dans la question Q19

Tableau 1 - Variables définies de manière globale en début de programme

Pour la résolution numérique, on définit de manière globale en début de programme les variables répertoriées dans le **tableau 1**. Elles pourront être utilisées directement dans la suite.

Résolution numérique

On propose la fonction suivante, incomplète :

```
1 def simulation(r, theta , vr, vtheta , tmax, dt) :
    """ Calcule itérativement, par la méthode d'Euler explicite, la position
        et la vitesse du vaisseau ainsi que l'orientation de la voile réglée
        de manière optimale au cours du temps.
    Entrées :
        - r (float) : distance initiale entre le vaisseau et le centre de la
            Terre (en m) ;
        - theta (float) : angle polaire initial (en radians) ;
        - vr (float) : vitesse radiale initiale (en m/s) ;
        - vtheta (float) : vitesse orthoradiale initiale (en m/s) ;
        - tmax (float) : durée de la simulation (en s) ;
        - dt (float) : pas temporel de la simulation (en s).
    Sortie :
        - R ([float]) : liste de la distance entre le centre de la Terre et
            le vaisseau aux différents instants (en m) ;
        - Theta ([float]) : liste de l'angle polaire aux différents instants
            (en radians) ;
        - Vr ([float]) : liste de la vitesse radiale aux différents instants
            (en m/s) ;
        - Vtheta ([float]) : liste de la vitesse orthoradiale aux différents
            instants (en m/s) ;
        - Phi ([float]) : liste de l'angle phi optimal aux différents
            instants (en radians).
    """
    2     instruction 1
    3     R, Theta, Vr, Vtheta, Phi = [], [], [], [], []
    4     for t in T :
    5         x, y = r*np.cos(theta), r*np.sin(theta)
    6         if x > RT and abs(y) < RT :
    7             L = 0 # vaisseau dans ombre terrestre
    8         else :
    9             L = 1
```

```
10     phi = recherche_phi_optimal(L,vr,vtheta,theta)
11     vr_pt, vth_pt = derivees_comp_vitesse(L, r, theta, vr, vtheta, phi)
12     instruction 2
13     R.append(r)
14     Theta.append(theta)
15     Vr.append(vr)
16     Vtheta.append(vtheta)
17     Phi.append(phi)
18     return T, R, Theta, Vr, Vtheta, Phi
```

Q20. À la ligne 2, proposer une instruction à la place de `instruction 1` permettant de définir le tableau numpy `T` contenant les valeurs de t , séparées par le pas de temps constant `dt` et comprises entre 0 (inclus) et `tmax` (exclu).

Q21. Lorsque $L(r, \theta) = 1$, pour une vitesse et une position du vaisseau données, il existe un unique angle φ compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ permettant de maximiser la dérivée temporelle de l'énergie mécanique, comme décrit à la question Q19.

Écrire la fonction `recherche_phi_optimal(L,vr,vtheta,theta)` permettant, pour une vitesse radiale v_r , une vitesse orthoradiale v_θ et un angle polaire θ , de déterminer cet angle φ optimal à $\varepsilon = 2.10^{-3}$ rad près. On pourra se contenter d'un algorithme naïf de recherche d'un maximum, fonctionnant avec une complexité temporelle linéaire.

Dans le cas où $L(r, \theta) = 0$ la fonction renvoie l'angle θ .

Q22. Écrire une fonction `derivees_comp_vitesse(L,r,theta,vr,vtheta,phi)`, permettant, à partir des paramètres $L, r, \theta, v_r, v_\theta$ et φ , de calculer les dérivées temporelles $\dot{v}_r$ et $\dot{v}_\theta$ des composantes radiale et orthoradiale de la vitesse, suivant les résultats obtenus aux questions Q16 et Q17.

Q23. À la ligne 12, remplacer `instruction 2` par une instruction (ou un bloc d'instructions) permettant d'incrémenter les valeurs $r(t), \theta(t), v_r(t)$ et $v_\theta(t)$ des variables `r`, `theta`, `vr` et `vtheta`, par les valeurs de ces mêmes paramètres à l'instant $t + dt$: $r(t + dt), \theta(t + dt), v_r(t + dt)$ et $v_\theta(t + dt)$, en appliquant une itération de la méthode d'Euler explicite.

Exploitation de la simulation

On souhaite lancer la simulation avec les paramètres suivants :

- durée totale de la simulation : $t_{\max} = 7$ jours ;
- pas temporel : $dt = 1$ s ;
- orbite initiale circulaire de rayon $r_0 = 30000$ km ;
- angle polaire initial $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$.

On procède à la simulation grâce aux instructions suivantes :

```
tmax = 24*3600*7 # en s
dt = 1 # en s
vr = 0 # en m/s
r = 30000e3 # en m
vtheta = np.sqrt(G*MT/r)
theta = -np.pi/2
T, R, Theta, Vr, Vtheta, Phi = simulation(r,theta,vr,vtheta,tmax,dt)
```

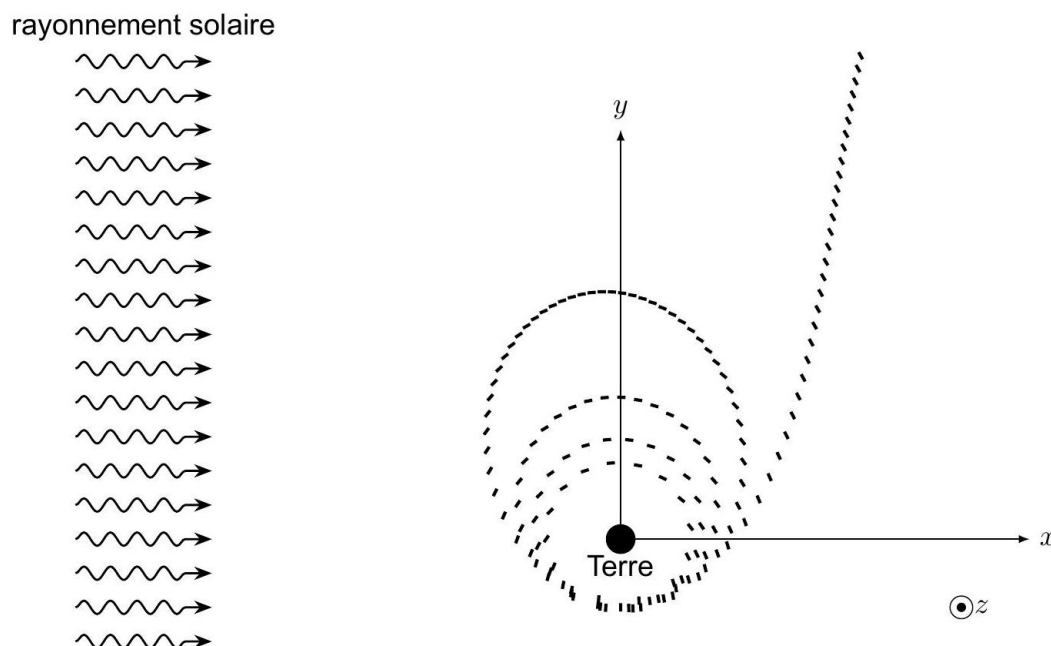


FIGURE 14 – Résultat de la simulation. Chaque position du vaisseau est séparée de la précédente par une durée d'une heure. Le vaisseau est représenté par un trait qui précise l'orientation du plan de la voile

On exploite ensuite les listes **R**, **Theta** et **Phi** pour représenter la trajectoire, telle qu'elle apparaît sur la figure 14. On constate que, compte tenu du rayon de l'orbite initiale, la zone d'ombre n'influence quasiment pas le mouvement du vaisseau.

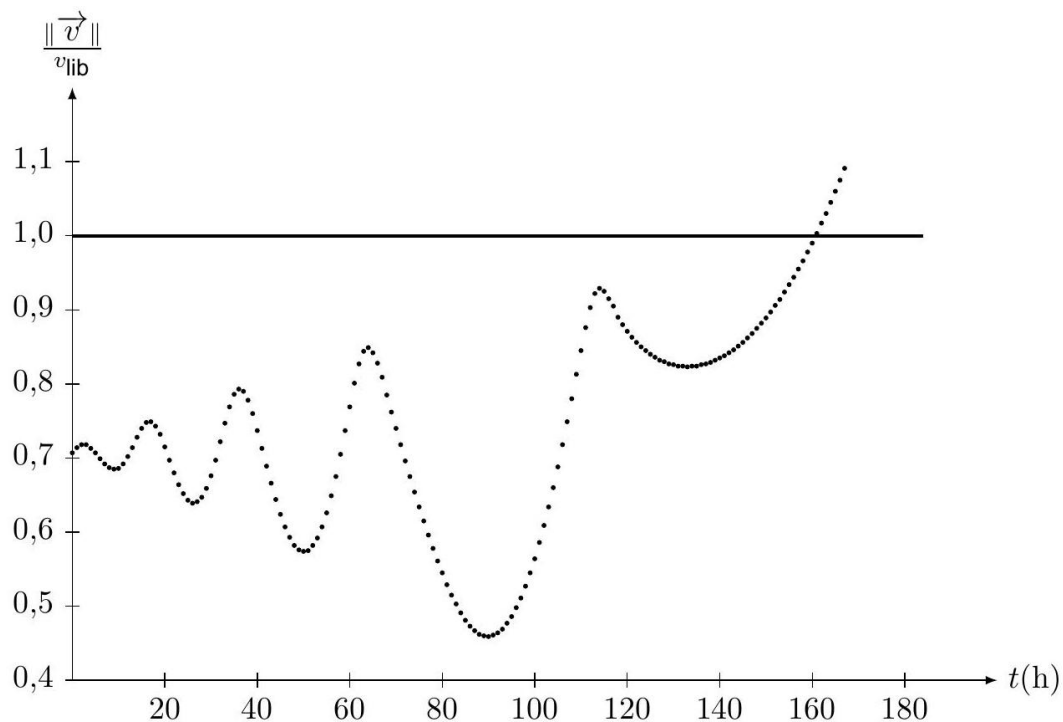
- Q24.** Expliquer physiquement la raison pour laquelle il faut que le plan de la voile soit approximativement parallèle au plan xOz de la figure 14 lorsque le vaisseau est aux environs des points repérés par les coordonnées $x \simeq 0$ et $y > 0$.

Pour suivre l'état du vaisseau dans le champ de gravitation terrestre, il peut être intéressant de tracer, en fonction du temps, le rapport de la norme $\|\vec{v}\|$ de la vitesse sur la vitesse de libération v_{lib} du satellite. On rappelle que la vitesse de libération $v_{\text{lib}}(r)$ associée à un astre considéré comme seul attracteur est la vitesse minimale permettant à un corps, situé à la distance r du centre de cet astre, de s'en éloigner définitivement. Le résultat est représenté figure 15.

- Q25.** Dédurre de l'application d'un théorème énergétique l'expression de la vitesse de libération $v_{\text{lib}}(r)$ d'un corps soumis à l'attraction terrestre.
- Q26.** Donner, pour une masse m évoluant sans voile solaire autour de la Terre suivant une trajectoire elliptique d'énergie $\mathcal{E}_m = \text{cte}$, l'expression du rapport $\frac{\|\vec{v}\|}{v_{\text{lib}}}$ en fonction de $\mathcal{E}_m, m, G, M_T$ et de r . Expliquer les oscillations de la courbe de la figure 16. Expliquer pourquoi l'amplitude des premières oscillations augmente au cours du temps.

Annexe - Aide relative à l'utilisation du module numpy

- `np.array(u)` crée un tableau numpy (N-dimensional array) contenant les éléments de la liste `u`. La taille et le type des éléments de ce tableau sont déduits du contenu de `u` :

FIGURE 15 – Évolution du rapport $\frac{\|\vec{v}\|}{v_{\text{lib}}}$ en fonction du temps

```
>>> u = [1, 2, 3]
>>> np.array(u)
array([1, 2, 3])
```

- `np.arange(a,b,p)` crée un tableau numpy de flottants contenant les valeurs comprises entre `a` (inclus) et `b` (exclu), régulièrement espacées du pas `p` :

```
>>> np.arange(0.5, 1.6, 0.1)
array([0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1., 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5])
```

- `np.linspace(a,b,n)` crée un tableau numpy de flottants contenant `n` valeurs régulièrement espacées et comprises entre `a` (inclus) et `b` (inclus) :

```
>>> np.linspace(0.5, 1.5, 11)
array([0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1., 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5])
```

- `np.sqrt(x)` calcule la racine carrée du nombre `x` ;
- `np.cos(x)` et `np.sin(x)` renvoient le cosinus et le sinus de l'angle `x` exprimé en radians ;
- `np.arccos(x)` et `np.arcsin(x)` renvoient l'arccosinus et l'arcsinus du réel `x` compris entre `-1` et `1` ;
- Les opérations élémentaires (`*`, `+`, `/`, `-`, `%`, etc) et les fonctions de calcul du module numpy, telles que `cos` ou `sqrt` par exemple, peuvent s'appliquer sur des tableaux numpy. Le résultat renvoyé est un tableau de même dimension que le tableau utilisé :

```
>>> 100+2*np.array([18,6,40])
array([136, 112, 180])
>>> np.cos(np.array([0,np.pi/2,np.pi]))
array([ 1.000000e+00,  6.123234e-17, -1.000000e+00])
```

- Il est possible de manipuler membre à membre plusieurs tableaux numpy de même dimension :

```
>>> np.array([1,2,3])+np.array([10,20,30])  
array([11, 22, 33])
```