

Corrigé des sujets sur l'interféromètre de Michelson

1 Interféromètre de Michelson - (Banque-PT)

I. Généralités sur les interféromètres

- Exemples de dispositif à division du front d'onde : trous d'Young, miroir de Lloyd...
Exemple de dispositif à division d'amplitude : interféromètre de Michelson en lame d'air, lorsqu'on observe les anneaux dans le plan focal image d'une lentille.
- La longueur de cohérence est $\ell_c = c\tau_c$ où τ_c est le temps de cohérence. τ_c est le temps caractéristique de décroissance de la fonction d'autocorrélation $g(\tau) = \langle a(t)a(t-\tau) \rangle$. On peut dire qu'au bout de quelques τ_c , $g(\tau) \approx 0$.

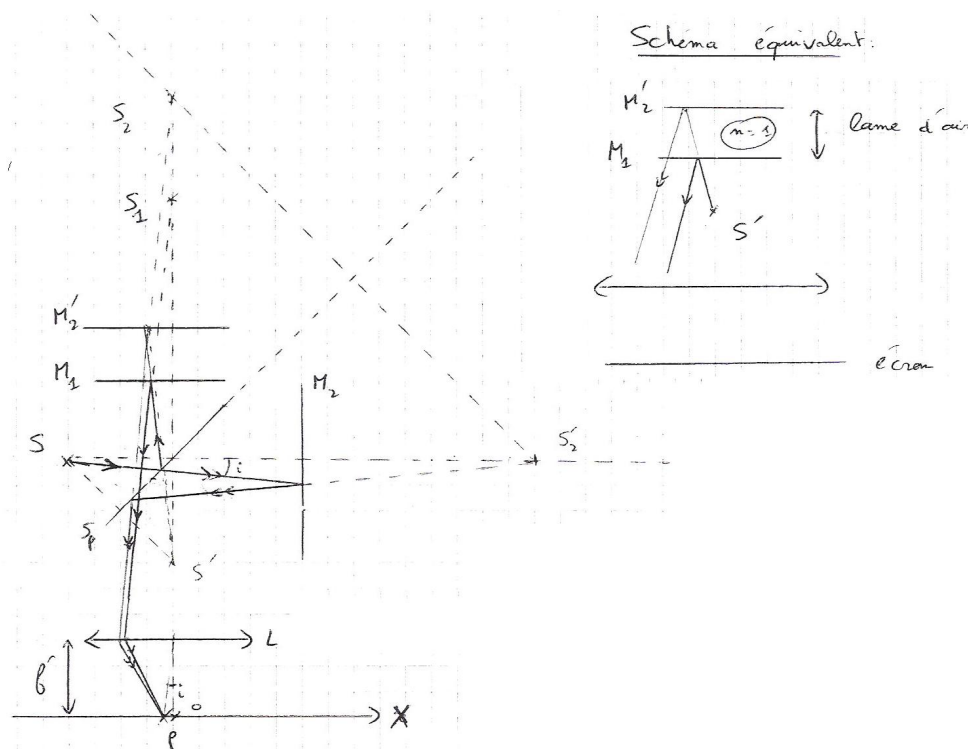
Dans un modèle de trains d'onde (morceaux de sinusoïde), τ_c correspond à la durée de chaque train d'onde.

On observe des interférences à condition que la différence de marche séparant deux rayons qui interfèrent ne soit pas grande devant la longueur de cohérence. Il faut rester dans les zones de cohérence $|\delta| \ll \ell_c$ ou de cohérence partielle $|\delta| \approx \ell_c$.

- On peut interposer entre la source et le dispositif un filtre interférentiel (coloré) correspondant à la raie souhaitée

II. Interféromètre de Michelson utilisé en lame d'air

- L'interféromètre est réglé au contact optique (les chemins optiques parcourus dans les deux bras sont identiques) : la différence de marche est nulle en tout point de l'écran, les interférences sont constructives partout. On observe donc un éclairement uniforme appelé "teinte plate".
- Les rayons émergents issus d'un même rayon incident sont parallèles entre eux.



Ils convergent au point P du plan focal image de la lentille, de position $X = f' \tan i \simeq f' i$.

6. Les rayons qui interfèrent en P ont une différence de marche $\delta = 2e \cos i$ (cf cours, $n_{air} = 1$ ici).

L'intensité lumineuse ou éclairement s'écrit alors :

$$\begin{aligned} I(P) &= 2 I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \right) \\ &= 2 I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi e \cos i}{\lambda} \right) \right) \end{aligned}$$

L'ordre d'interférence au point P est $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2n_{air}e \cos i}{\lambda_0}$:

$$p = \frac{2e \cos i}{\lambda}$$

Cet ordre d'interférence est maximal pour $i = 0$ donc au centre de la figure d'interférences.

7. Les franges d'interférences sont localisées sur la surface constituée de l'intersection des rayons issus d'un même rayon incident : dans cette configuration, les interférences sont localisées à l'infini.

8. Au centre du système d'anneaux : $p_{\max} = \frac{2e}{\lambda} \simeq 4028,6$: le centre est presque sombre ($p_{\max}$ est quasiment demi-entier).

Note : ce niveau de précision exigerait en fait de considérer $n_{air} = 1,0003$.

Le premier anneau brillant est obtenu pour $p_1 = 4028$.

De plus, pour de petits angles, $p = \frac{2e}{\lambda} \cos i \simeq \frac{2e}{\lambda} \left(1 - \frac{i^2}{2} \right)$ donc :

$$i = \sqrt{2 - \frac{p\lambda}{e}}$$

Le rayon de l'anneau correspondant à l'ordre p vaut alors :

$$r = f' \sqrt{2 - \frac{p\lambda}{e}}$$

$AN : r(p_1) \simeq 1,7 \text{ cm} ; r(p_2 = 4027) \simeq 2,8 \text{ cm} ; r(p_3 = 4026) \simeq 3,6 \text{ cm}.$

L'écart entre les anneaux diminue à mesure que l'on s'éloigne du centre.

9. Cette lame augmente le chemin optique sur la voie 1 donc diminue la différence de marche entre les deux voies.

Au centre de la figure d'interférences : $\delta = 2e \cos(0) - 2 \times (n-1)e' \Rightarrow p'_1 = 4010,8$.

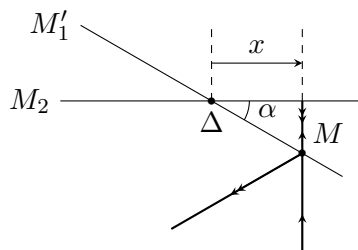
La variation de l'ordre d'interférence au centre est donc :

$$\Delta p = -\frac{2(n-1)e'}{\lambda_0} \simeq -17,8$$

.

III. Interféromètre de Michelson utilisé en coin d'air

10. Voir figure ci-dessous. Les deux miroirs M_2 et M'_1 (miroir fictif) forment un coin d'air d'arête Δ .



On place la source au foyer principal objet d'une lentille convergente.

11. Il faut conjuguer l'écran et les miroirs. La relation de conjugaison de Descartes donne :

$$\overline{OA'} = \frac{f' \overline{OA}}{f' + \overline{OA}} \quad AN : \overline{OA'} = 1 \text{ m} \quad \overline{\gamma} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \quad AN : \overline{\gamma} = -4$$

12. La différence de marche est $\delta = 2 \times x \tan \alpha \simeq 2\alpha x$. On observe des franges rectilignes ($x = C^{te}$).

$$I(i+x) = I(x) \Rightarrow i = \frac{\lambda}{2\alpha} \text{ donc } i_{ecran} = 2 \frac{\lambda}{\alpha} \quad AN : \alpha \simeq 2,91 \times 10^{-4} \text{ rad.}$$

13. Sur l'arête du coin d'air, $\delta = 0$ quelle que soit la longueur d'onde. L'image de l'arête du coin d'air correspond à des interférences constructives pour toutes les longueurs d'onde : on obtient une frange blanche.

Comme chaque longueur d'onde fournit son propre système de franges et que ces différents systèmes sont décalés les uns par rapport aux autres et sont incohérents entre eux, on obtient des franges irisées au voisinage de l'arête puis du blanc d'ordre supérieur.

Les interférences sont observables si $-\delta_{\text{lim}} < \delta < \delta_{\text{lim}} \Rightarrow -\frac{\delta_{\text{lim}}}{2\alpha} < x < \frac{\delta_{\text{lim}}}{2\alpha}$.

Plus α augmente, plus la plage d'observation des interférences est réduite.

IV. Application 1 : détermination des longueurs d'onde d'un doublet

14. Les deux radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont incohérentes entre elles : leurs systèmes de franges se superposent en intensité. On a donc :

$$\begin{aligned} I &= 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) + 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right) \\ &= 4I_0 \left(1 + \cos \left(\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \cos \left(\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

soit

$$I = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{\text{moy}}^2} \delta \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_{\text{moy}}} \delta \right) \right)$$

$$\text{où } \lambda_{\text{moy}} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}.$$

Il apparaît un terme de visibilité $V = \cos \left(\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{\text{moy}}^2} \delta \right)$; le contraste est $\mathcal{C} = |V|$. Il peut s'annuler pour certaines valeurs de d car $\delta = 2\alpha x + 2d$.

15. Quand $d = 0$, les franges sont bien contrastées donc $\mathcal{C} = 1$ et $\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \times 2\alpha x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

Quand $d = 0,15$ mm, le contraste est nul donc :

$$\frac{\pi\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} \times 2(\alpha x + d) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

On en déduit $\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_{moy}^2} = \frac{1}{4d}$ donc :

$$\lambda_2 = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{4d}\right)^{-1} = \frac{\lambda_1 4d}{4d - \lambda_1}$$

AN : $\lambda_2 \simeq 589,6$ nm et $\Delta\lambda \simeq 0,6$ nm.

Remarque : On aurait pu retrouver l'expression précédente de $\Delta\lambda$ sachant qu'on passe ici d'une coïncidence à une anti-coïncidence des anneaux correspondant à chacune des longueurs d'onde. Dans le cas de la coïncidence, on a : $\Delta p = k$, et dans le cas de l'anti-coïncidence : $\Delta p = k + \frac{1}{2}$, soit

$$2d \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda_{moy}^2}{4d}$$

IV. Application 2 : détermination de la largeur spectrale d'une raie

16. La longueur d'onde $\lambda_0 = 643,8$ nm correspond à une raie rouge.
17. La mesure de L_c permet de déduire $\Delta\nu = \frac{c}{L_c} = 10^9$ Hz = 1 GHz, qui correspond à $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2 \Delta\nu}{c} = 1,38 \cdot 10^{-12}$ m = 0,0014 nm, ce qui est cohérent en comparaison avec l'écart du doublet du sodium obtenu précédemment, qui valait 0,6 nm.
- La durée du train d'onde vaut donc $\tau = \frac{1}{\Delta\nu} = 10^{-9}$ s = 1 ns. On obtient évidemment un temps de cohérence très court.
18. (a) Les radiations émises dans la raie du cadmium sont incohérentes entre elles puisqu'elles sont non synchrones, et il faut donc sommer les intensités élémentaires dI_ν produites sur l'écran par chaque radiation de largeur $d\nu \ll \Delta\nu$ centrée sur la fréquence $\nu \in [\nu_0 - \Delta\nu/2; \nu_0 + \Delta\nu/2]$:

$$I(\delta) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} dI_\nu$$

De plus, la raie est supposée avoir un profil rectangulaire de sorte qu'on peut définir une densité spectrale J_0 constante au niveau de la source telle que $dI_{0,\nu} = J_0 d\nu$. Finalement, chaque radiation donnant lieu à une interférence à deux ondes cohérentes de même intensité avec l'interféromètre de Michelson, on peut également écrire :

$$dI_\nu = 2J_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] d\nu$$

et donc

$$I(\delta) = \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} 2J_0 \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] d\nu$$

- (b) $I(\delta) = 2J_0 \left[\Delta\nu + \frac{c}{2\pi\delta} \left[\sin \left(\frac{2\pi\nu\delta}{c} \right) \right]_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} \right]$. En utilisant la formule de trigonométrie, on obtient :

$$I(\delta) = 2J_0\Delta\nu \left[1 + \sin_c \left(\frac{\pi\Delta\nu\delta}{c} \right) \cos(2\pi\nu_0\delta) \right]$$

où $\sin_c$ est la fonction sinus cardinal définie par : $\sin_c(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. C'est cette partie de l'intensité qui a une variation plus lente avec δ et qui sert d'enveloppe car $\Delta\nu \ll \nu_0$. C'est donc la fonction de visibilité, et on peut en déduire :

$$\mathcal{C} = \left| \sin_c \left(\frac{\pi\Delta\nu\delta}{c} \right) \right|$$

- (c) Le contraste s'annule pour la première fois lorsque l'argument du sinus cardinal est égal à π , soit pour $\delta = \frac{c}{\Delta\nu} = L_c$. On retrouve bien le résultat obtenu précédemment.

2 Expérience de Michelson et Morley - CCINP MP

Partie I - L'expérience "MM" : Michelson et Morley (1887)

Configuration α : l'interféromètre est positionné de telle sorte que le trajet lumineux sur le bras n° 1 soit colinéaire au vent d'éther. Le bras n° 2 est perpendiculaire à cette direction.

Configuration β : on fait subir à l'ensemble $S = \{\text{Source, interféromètre, observateur}\}$ une rotation de 90° autour de l'axe Oz dans le sens horaire, de telle sorte que ce soit le bras n° 2 qui devienne colinéaire au vent d'éther.

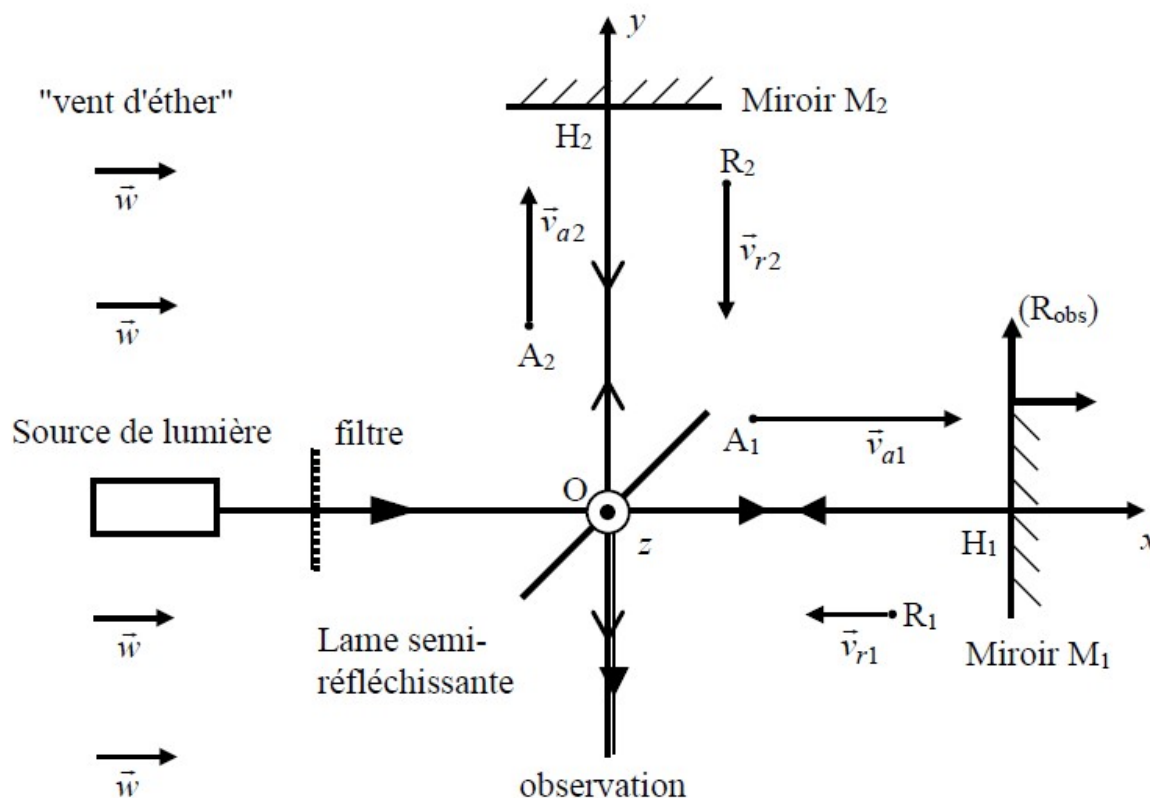


Figure 1-Schéma de l'interféromètre de Michelson dans la configuration α

- 1) À l'aide de la loi galiléenne de composition des vitesses, donner la relation entre les vecteurs $\vec{v}_{\varepsilon i}$, $\vec{c}_{\varepsilon i}$ et $\vec{w}$ aux points A_1 , A_2 , R_1 et R_2 . Attribuer à chaque expression fournie ci-dessous la norme $v_{\varepsilon i}$ correspondante :

$$c - w ; \sqrt{c^2 - w^2} ; c + w ; \sqrt{c^2 - w^2}$$

Prenons ($\mathcal{R}_{\text{obs}}$) comme référentiel absolu et le référentiel lié au vent d'éther (c'est à dire le référentiel dans lequel l'éther est immobile) comme référentiel relatif. La vitesse d'entraînement est donc $\vec{w} = w \vec{e}_x$ et la loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{v}_{\varepsilon i} = \vec{c}_{\varepsilon i} + \vec{w} \iff \vec{c}_{\varepsilon i} = \vec{v}_{\varepsilon i} - \vec{w}$$

On distingue alors les 4 cas de vitesses possibles :

- **Aller - bras 1** : $\vec{v}_{a1} = v_{a1} \vec{e}_x$ avec $v_{a1} > 0$

$\vec{c}_{a1} = \vec{v}_{a1} - \vec{w} = (v_{a1} - w) \vec{e}_x$. En prenant la norme : $\|\vec{c}_{a1}\| = c = |v_{a1} - w|$. Si on suppose que $v_{a1} > w$ (ce qui est raisonnable vu l'ordre de grandeur de la vitesse de la lumière) on obtient $c = v_{a1} - w$ et donc :

$$v_{a1} = c + w$$

- **Retour - bras 1** : $\vec{v}_{r1} = -v_{r1} \vec{e}_x$ avec $v_{r1} > 0$

$\vec{c}_{r1} = \vec{v}_{r1} - \vec{w} = -(v_{r1} + w) \vec{e}_x$. La norme est alors $\|\vec{c}_{r1}\| = c = v_{r1} + w$. Il vient :

$$v_{r1} = c - w$$

- **Aller - bras 2** : $\vec{v}_{a2} = v_{a2} \vec{e}_y$ avec $v_{a2} > 0$

$\vec{c}_{a2} = \vec{v}_{a2} - \vec{w} = v_{a2} \vec{e}_y - w \vec{e}_x$. On a donc : $\|\vec{c}_{a2}\| = c = \sqrt{v_{a2}^2 + w^2}$, ce qui entraîne :

$$v_{a2} = \sqrt{c^2 - w^2}$$

- **Retour - bras 2** : $\vec{v}_{r2} = -v_{r2} \vec{e}_y$ avec $v_{r2} > 0$

$\vec{c}_{r2} = \vec{v}_{r2} - \vec{w} = -v_{r2} \vec{e}_y - w \vec{e}_x$. On a donc : $\|\vec{c}_{r2}\| = c = \sqrt{v_{r2}^2 + w^2}$, ce qui entraîne à nouveau :

$$v_{r2} = \sqrt{c^2 - w^2}$$

- 2) En déduire l'expression du décalage temporel $\tau(\alpha) = \tau_1(\alpha) - \tau_2(\alpha)$ entre les durées de parcours de la lumière arrivant à l'oculaire en suivant la voie 1 et la voie 2 dans la configuration α . Faire un développement limité de $\tau(\alpha)$ à l'ordre 2 en w/c .

De S à O puis de O au point d'observation les temps de parcours sont identiques pour les deux voies (mêmes distances parcourues et mêmes vitesses). Le décalage temporel se fait au cours des aller-retours dans les deux bras. On a :

$$\tau_1(\alpha) = \frac{L}{c + w} + \frac{L}{c - w} = \frac{2Lc}{c^2 - w^2}$$

et

$$\tau_2(\alpha) = \frac{L}{\sqrt{c^2 - w^2}} + \frac{L}{\sqrt{c^2 - w^2}} = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - w^2}}$$

On a donc :

$$\tau(\alpha) = \frac{2L}{c} \left(\frac{1}{1 - \frac{w^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}} \right) \approx \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{w^2}{c^2} - 1 - \frac{w^2}{2c^2} + \dots \right)$$

d'où :

$$\tau(\alpha) \approx \frac{Lw^2}{c^3}$$

En déduire le déphasage entre les deux signaux puis l'ordre d'interférence $p(\alpha)$ en fonction de la fréquence ν , L , c et du rapport w/c .

En lumière monochromatique de pulsation $\omega = 2\pi\nu$, le déphasage est donné par :

$$\Delta\varphi(\alpha) = \omega\tau(\alpha) = 2\pi\nu \frac{L}{c} \frac{w^2}{c^2}$$

d'où :

$$p(\alpha) = \frac{\Delta\varphi(\alpha)}{2\pi} = \nu \frac{L}{c} \frac{w^2}{c^2}$$

3) Avec le moins possible de calculs, donner de même les expressions :

- de la différence $\tau(\beta) = \tau_1(\beta) - \tau_2(\beta)$ des durées de parcours de la lumière arrivant à l'oculaire en suivant la voie 1 (respectivement 2) dans la configuration β ;
- du développement limité de $\tau(\beta)$ à l'ordre 2 en $\frac{w}{c}$;
- de l'ordre d'interférence $p(\beta)$ en fonction de ν , L , c et du rapport $\frac{w}{c}$.

Cette rotation revient à permuter les rôles des bras 1 et 2 et donc à faire $\tau_1(\beta) = \tau_2(\alpha)$ et $\tau_2(\beta) = \tau_1(\alpha)$. On aura donc :

$$\tau(\beta) = -\tau(\alpha) \approx -\frac{Lw^2}{c^3}$$

et

$$p(\beta) = -p(\alpha) = -\nu \frac{L}{c} \frac{w^2}{c^2}$$

4) Soit $\Delta p = p(\beta) - p(\alpha)$ la variation de l'ordre d'interférence produite lors du passage de l'interféromètre de la configuration α à la configuration β . Montrer que :

$$\Delta p = 2L \frac{\nu}{c} \left(\frac{w}{c} \right)^2$$

Réponse évidente d'après les résultats des deux questions précédentes.

5) En faisant l'hypothèse d'un éther immobile dans le référentiel héliocentrique et ne subissant aucun effet d'entraînement par l'atmosphère terrestre, Michelson et Morley comptaient observer cette modification avec une vitesse de vent d'éther de norme $w = 30,0 \text{ km.s}^{-1}$ environ.

a) Retrouver cette valeur numérique à partir des données suivantes :

- Constante universelle de la gravitation : $G = 6,67.10^{-11} \text{ N.kg}^{-2}.\text{m}^2$
- Masse du Soleil : $M_S = 1,99.10^{30} \text{ kg}$
- Durée de l'année terrestre : $T_{\text{an}} = 365,25 \text{ jours}$

La Terre décrit une trajectoire quasi-circulaire de rayon R autour du centre du Soleil. Le principe fondamental de la dynamique conduit à (en projection sur $\vec{e}_r$) :

$$-M_T \frac{v_T^2}{R} = -G \frac{M_T M_S}{R^2} \implies v_T^2 = \frac{GM_S}{R}$$

D'autre part, le mouvement étant uniforme on a : $v_T = \frac{2\pi R}{T_{\text{an}}}$. On peut donc éliminer le rayon R pour trouver :

$$v_T = \left(\frac{2\pi GM_S}{T_{\text{an}}} \right)^{1/3} \stackrel{\text{A.N.}}{=} 29,8 \text{ kms}^{-1} \approx 30 \text{ km.s}^{-1}$$

On obtient bien la bonne valeur.

La sensibilité du dispositif était de l'ordre de $\Delta p = 0,01$.

- b) Avec $w = 30,0 \text{ km.s}^{-1}$, $L = 11,2 \text{ m}$ et $\nu = 4,57.10^{14} \text{ Hz}$, donner la valeur numérique de la variation Δp de l'ordre d'interférence escomptée par Michelson et Morley.

L'application numérique donne : $\Delta p = 0,34$. Cette valeur est très supérieure à la sensibilité du dispositif.

Aucune variation de l'ordre d'interférence ne fut jamais détectée. Le résultat négatif de l'expérience de Michelson et Morley a révélé la mise en défaut de la transformation de Galilée appliquée à la célérité de la lumière.

3 Extrait Mines-Ponts MP

III Contrôle d'épaisseur de certaines pièces

III.A Contrôle d'épaisseur d'un dépôt métallique

19. Calculons d'abord la différence de marche au point I d'incidence d'un rayon incident avec la face supérieure (lame semi-réfléchissante) du système (figure 3 à gauche). Un des rayons est directement réfléchi tandis que l'autre doit effectuer en plus le trajet IJI . Si on néglige toute différence de phase lors des réflexions (ou si elles se compensent), $\delta = (IJI) = 2IJ = 2x \tan \epsilon$.

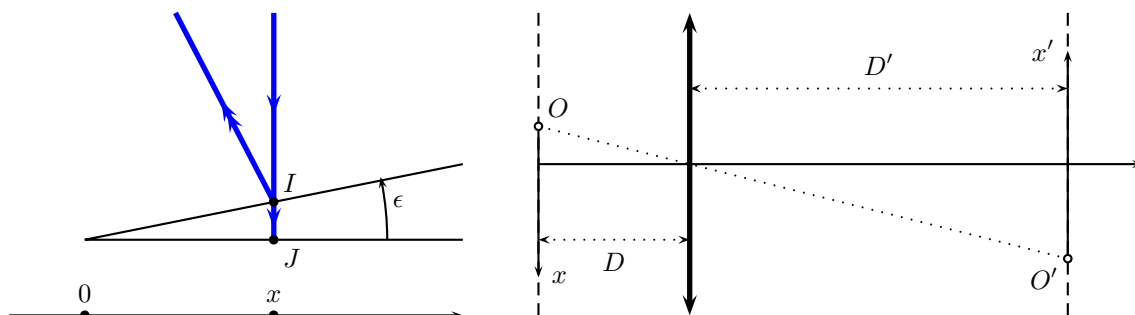


FIGURE 3 – Mesure interférentielle dans un coin d'air

L'observation sur l'écran (figure 3 à droite) se fait sans différence de marche supplémentaire mais avec conjugaison : $x' = \gamma x$ (on a ici choisi $\gamma > 0$) donc $\delta = \frac{\tan \epsilon}{\gamma} x'$; la relation $\delta = p\lambda_0$ définit la frange d'ordre p ; l'interfrange est $d_0 = x'_{p+1} - x'_p$ donc $d_0 = \frac{\gamma \lambda_0}{\tan \epsilon}$. Ici, $\gamma = \frac{D'}{D}$ avec $\frac{1}{D} + \frac{1}{D'} = \frac{1}{f'}$ (relation de conjugaison) donc $\gamma = \frac{D'}{D} - 1 = 11,5$; de plus, $\tan \epsilon = 1,75 \cdot 10^{-3}$ (on aurait pu écrire $\epsilon = 1,75 \text{ mrad}$) donc $d_0 = 3,51 \text{ mm}$

20. Dans la partie où est situé le dépôt métallique, l'aller-et-retour se fait sur une épaisseur diminuée de e donc la nouvelle différence de marche est $\delta_D = \delta - 2e$; en dehors de celui-ci, $\delta = \frac{2\epsilon}{\gamma} x'$ tandis que dans la zone « décalée », $\delta_D = \frac{2\epsilon}{\gamma} x'_D$. Si on suit une frange donnée, $\delta = \delta_D = p\lambda_0$ donc $x'_D = x' + \frac{\gamma e}{\epsilon}$; il y a décalage de $u = x'_D - x'$ soit $u = \frac{\gamma e}{\epsilon}$ ou, numériquement, $e = \frac{\epsilon u}{\gamma} = 89,5 \text{ nm}$. On évalue un décalage d'une fraction d'interfrange donc une épaisseur d'une fraction de demi-longueur d'onde : c'est l'ordre de grandeur des meilleurs mesures possibles par un dispositif interférométrique.
21. Dans un milieu d'indice n , la vitesse de la lumière est $v_\varphi = c/n$ donc la longueur d'onde $\lambda = v_\varphi / f$ (si f est la fréquence de l'onde lumineuse, indépendante du milieu de propagation) vérifie $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$. Reprenant les

résultats ci-dessus en remplaçant λ_0 par λ , on en déduit que d_0 est diminué (dans un rapport n) tandis que u est inchangé.

22. Reprenant de même les résultats précédents avec $\epsilon \rightarrow \epsilon' > \epsilon$, on en conclut que d_0 et u diminuent dans la même proportion : la figure d'interférences subit une homothétie de rapport ϵ/ϵ' .