

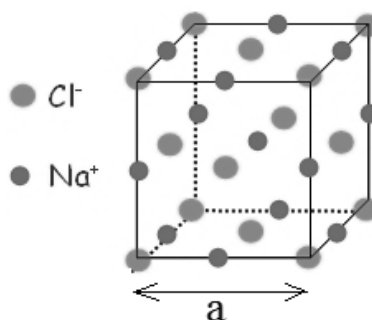
Corrigé du DS n°7 (CCINP)

1 Une eau traitée par électrolyse. Centrale TSI 2018 et Centrale PSI 2016

1.1 Étude du réseau cristallin NaCl

1. Le paramètre de maille a est défini sur le schéma ci-dessous. Il y a contact entre anion et cation le long d'une arête du cube (plus proches voisins), d'où :

$$a = 2R^+ + 2R^- = 556 \text{ pm}$$



2. On compte :

$$8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4 \text{ ions } \text{Cl}^-$$

et

$$12 \times \frac{1}{4} + 1 = 4 \text{ ions } \text{Na}^+$$

par maille. En conséquence :

$$\mu = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4(M_{\text{Cl}} + M_{\text{Na}})}{N_A a^3} = 2,26 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$$

ce qui est plus dense que l'eau ($1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$)

1.2 Exploitation du diagramme E - pH du chlore

1. Dans $\text{Cl}_{(aq)}^-$: $\text{no}(\text{Cl}) = -\text{I}$

Dans $\text{Cl}_{2(aq)}$: $2 \text{ no}(\text{Cl}) = 0$ donc $\text{no}(\text{Cl}) = 0$

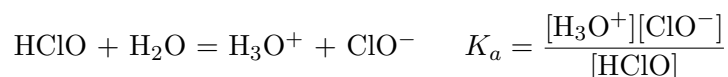
Dans $\text{HClO}_{(aq)}$: $\text{no}(\text{H}) + \text{no}(\text{Cl}) + \text{no}(\text{O}) = 0 \implies \text{no}(\text{Cl}) = -\text{I} - (-\text{II}) = +\text{I}$

Dans $\text{ClO}_{(aq)}^-$: $\text{no}(\text{Cl}) + \text{no}(\text{O}) = -\text{I} \implies \text{no}(\text{Cl}) = +\text{I}$

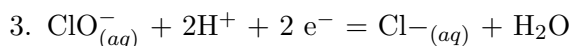
Le nombre d'oxydation augmente avec le potentiel et les espèces acides sont prédominantes à pH faible, on en déduit la répartition suivante, cohérente avec celle proposée par l'énoncé.

+I	C : $\text{HClO}_{(aq)}$	D : $\text{ClO}_{(aq)}^-$
0	B : $\text{Cl}_{2(aq)}$	
-I	A : $\text{Cl}_{(aq)}^-$	

2. HClO/ClO^- : il s'agit d'un couple acide-base :



À la frontière, $[\text{HClO}] = [\text{ClO}^-]$ donc $[\text{H}_3\text{O}^+]_f = K_a$ c'est à dire $\text{pH}_f = \text{p}K_a$. Graphiquement on lit $\text{pH}_f = 7,5$ donc $\text{p}K_a = 7,5$.

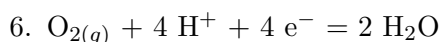


4. Relation de Nernst :

$$E = E^0(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{[\text{ClO}^-][\text{H}^+]^2}{[\text{Cl}^-]} \right)$$

À la frontière : $[\text{ClO}^-] = [\text{Cl}^-]$ donc $E_f = E^0 - 0,06 \text{ pH}$: la pente vaut donc $- 0,06 \text{ V/pH}$. En utilisant les points $(7,5; 1,3\text{V})$ et $(14; 0,9\text{V})$, on obtient une pente de $(0,9-1,3)/(14-7,5) = - 0,061 \text{ V}$. Ce résultat est cohérent avec la valeur théorique compte tenu de l'imprécision de la lecture graphique.

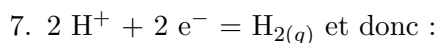
5. En utilisant le point $(14; 0,9 \text{ V})$ et la pente de $- 0,06 \text{ V}$, on trouve une ordonnée à l'origine $E^0 = 1,74 \text{ V}$



$$E = E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) + \frac{0,06}{4} \log \left\{ (P_{\text{O}_2}/P^0)[\text{H}^+]^4 \right\}$$

À la frontière, $P_{\text{O}_2} = 1 \text{ bar} = P^0$ donc :

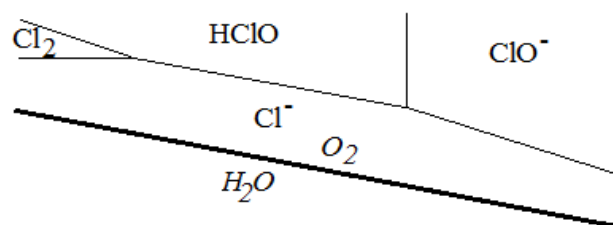
$$E_f = E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) - 0,06 \text{ pH} = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$$



$$E = E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) + \frac{0,06}{2} \log \left([\text{H}^+]^2 \frac{P^0}{P_{\text{H}_2}} \right)$$

À la frontière : $P_{\text{H}_2} = 1 \text{ bar} = P^0$ donc :

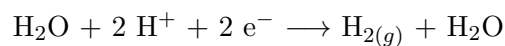
$$E_f = E^0(\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2) - 0,06 \text{ pH} = - 0,06 \text{ pH}$$



8. $\text{Cl}_{2(aq)}$, $\text{HClO}_{(aq)}$ et $\text{ClO}^-_{(aq)}$ ont des domaines disjoints de celui de H_2O donc ces espèces réagissent de façon quantitative en présence d'eau : elles sont instables en solution aqueuse. Le domaine de $\text{Cl}^-_{(aq)}$ recouvre partiellement celui de H_2O , donc $\text{Cl}^-_{(aq)}$ est stable en solution aqueuse.

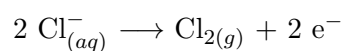
1.3 Étude de la cellule d'électrolyse

1. $m_{\text{sel}} = cV_0 = 5.10^{-3} \times 150.10^3 = 750 \text{ kg}$
2. On ne tient compte que des espèces initialement présentes. À la cathode, il y a une réduction :

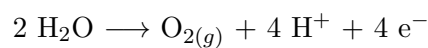


Il y a donc production de di-hydrogène $\text{H}_{2(g)}$:

À l'anode, il y a une oxydation :

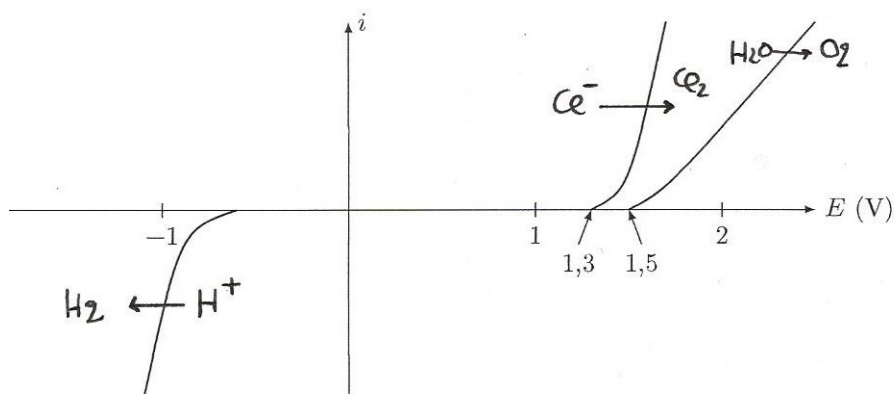


et

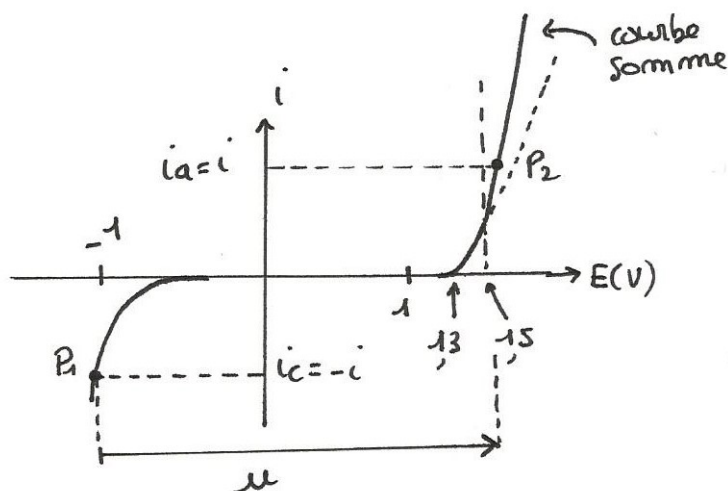


Il y a donc production de $\text{Cl}_{2(g)}$ et de $\text{O}_{2(g)}$.

3. a) La courbe est donnée ci dessous :



- b) Comme il y a compétition entre deux couples sur l'anode, il faut construire la courbe somme. De plus on a $i_a = i > 0$ et $i_c = -i < 0$, ce qui conduit au schéma ci-dessous :



Comme on néglige la résistance interne de l'électrolyseur, on a $U = u_{ESH}(\text{anode}) - u_{ESH}(\text{cathode})$, ce qui conduit à la tension représentée sur la figure ci-dessus (différence des abscisses des deux points de fonctionnement P_1 et P_2).

- c) En l'absence de surtension, la courbe du couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ devrait démarrer au potentiel apparent qui vaut $1,23 - 0,06 \text{ pH} = 0,81 \text{ V}$. Le fait que cette courbe ne démarre qu'à $1,5 \text{ V}$ est dû à une surtension anodique de l'ordre de $0,79 \text{ V}$.
4. Pour une heure de fonctionnement, l'électrolyse produit 26 g de dichlore donc $n_{\text{Cl}_2} = 0,37 \text{ mol}$. D'après la demi-équation à l'anode, cela correspond à la circulation de $n_e = 2 n_{\text{Cl}_2} = 0,73 \text{ mol}$ d'électrons. Une charge $Q = n_e \times F = 7,1 \cdot 10^4 \text{ C}$ traverse donc le circuit.

Par ailleurs $Q = i \Delta t$ avec $\Delta t = 1 \text{ h}$ donc $i = Q/\Delta t = 20 \text{ A}$.

5. La véritable masse horaire obtenue est $m = 0,75 \text{ m}' = 0,19 \text{ g.h}^{-1}$.
6. Si on renverse le sens de la flèche du courant pour orienter l'électrolyseur en convention récepteur avec $i' = -i$, la relation fondamentale de l'électrolyseur est :

$$U = u_{ESH}(\text{anode}) - u_{ESH}(\text{cathode}) + Ri' = u_{ESH}(\text{anode}) - u_{ESH}(\text{cathode}) - Ri$$

On en déduit que $u_{ESH}(\text{anode}) - u_{ESH}(\text{cathode}) = 10,5 \text{ V}$, ce qui correspond à une puissance électrique :

$$P = [u_{ESH}(\text{anode}) - u_{ESH}(\text{cathode})] \times i = 210 \text{ W}$$

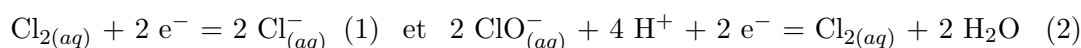
En multipliant par $\Delta t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$, ce qui correspond à la formation de $m = 0,19 \text{ g}$ de Cl_2 , on obtient l'énergie massique :

$$E = \frac{P \Delta t}{m} = 3,87 \cdot 10^9 \text{ J.kg}^{-1}$$

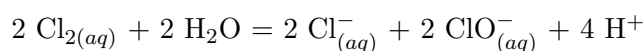
ce qui est une énergie considérable !

1.4 Obtention de ClO^-

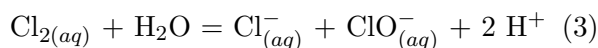
1. Les couples concernés sont $\text{Cl}_{2(aq)}/\text{Cl}_{(aq)}^-$ et $\text{ClO}_{(aq)}^-/\text{Cl}_{2(aq)}$. Demi-équations électroniques :



d'où l'équation-bilan :



c'est à dire :



2. Il s'agit d'une *dismutation* : $\text{Cl}_{2(aq)}$ joue à la fois le rôle d'oxydant et de réducteur. On constate que $(3) = \frac{1}{2} [(1) - (2)]$ et donc :

$$\Delta_r G_3^0 = \frac{\Delta_r G_1^0 - \Delta_r G_2^0}{2} = -F (E_1^0 - E_2^0)$$

Il vient alors :

$$K^0 = \exp \left(-\frac{\Delta_r G_3^0}{RT} \right) = 3,6 \cdot 10^{-8}$$

ce qui est une réaction très limitée. Cependant, la conversion en ClO^- est néanmoins favorable si on fixe $\text{pH} = 7$ puisque la loi d'action des masses donne alors :

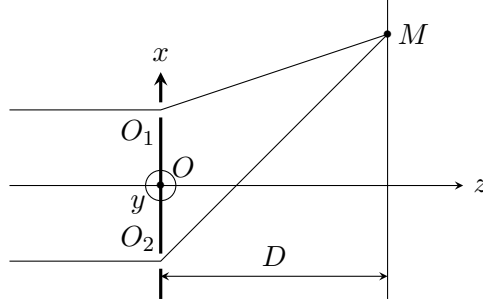
$$\frac{[\text{ClO}^-][\text{Cl}^-]}{[\text{Cl}_2]^2} = \frac{K^0}{[\text{H}^+]^2} = 3,8 \cdot 10^6 \gg 1$$

2 Interférences à 2 ou 3 ondes. CCINP MP 2024

- Q1.** a) Le faisceau lumineux issu de S est séparé en deux par les deux trous : on a donc une division interférentielle du front d'onde.

On peut placer l'écran à différentes positions pour observer les interférences : elles sont donc non-localisées.

- b) Avec l'hypothèse $D \gg |x|$, $D \gg |y|$ et $D \gg |a|$, on peut considérer le schéma suivant :



On trace alors les deux rayons issus O_1 et de O_2 qui se coupent en M . Les deux rayons incidents venant de S étant parallèles, le théorème de Malus indique que les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires aux rayons incidents. On a donc : $(SO_1) = (SO_2)$.

La différence de marche est alors la différence $\delta = O_2M - O_1M$. Dans le repère $(Oxyz)$ les différents points ont pour coordonnées :

$$O_1(a/2, 0, 0) ; O_2(-a/2, 0, 0) \text{ et } M(x, y, D)$$

donc :

$$O_2M = \sqrt{(x + a/2)^2 + y^2 + D^2} \text{ et } O_1M = \sqrt{(x - a/2)^2 + y^2 + D^2}$$

On approxime :

$$O_2M = D \left(1 + \frac{(x + a/2)^2 + y^2}{D^2} \right)^{1/2} \approx D \left(1 + \frac{(x + a/2)^2 + y^2}{2D^2} \right)$$

et

$$O_1M = D \left(1 + \frac{(x - a/2)^2 + y^2}{D^2} \right)^{1/2} \approx D \left(1 + \frac{(x - a/2)^2 + y^2}{2D^2} \right)$$

d'où :

$$\delta = \frac{(x + a/2)^2 - (x - a/2)^2}{2D} = \frac{ax}{D}$$

La source S étant monochromatique de longueur d'onde λ , l'intensité est donnée par la formule de Fresnel (avec $I_1 = I_2 = I_0$) :

$$I(M) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right) = \frac{I_{\max}}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda D} \right) \right)$$

- Q2.** Sur l'écran on observe la figure d'interférence de trous d'Young, c'est-à-dire des franges rectilignes parallèles à Oy . L'interfrange i est la périodicité spatiale de l'intensité calculée dans la question précédente, c'est donc la périodicité du terme $\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda D}\right)$, on a donc :

$$i = \frac{\lambda D}{a} = \frac{cD}{a\nu}$$

- Q3.** a) Les composantes monochromatiques composant la lumière émise par S et dont la fréquence est comprise entre ν et $\nu+d\nu$ peuvent être assimilées à une onde sinusoïdale de fréquence ν . Elles produisent en M une intensité élémentaire

$$\delta I(M) = J_\nu \left[1 + \cos\left(\frac{\omega\delta}{c}\right) \right] d\nu$$

avec $\omega = 2\pi\nu$. L'intensité en M est alors la somme (intégrale) :

$$I(M) = \int_0^\infty J_\nu \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] d\nu = \int_{\nu_0-\Delta\nu/2}^{\nu_0+\Delta\nu/2} J_\nu \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right] d\nu$$

Le calcul donne :

$$I(M) = \frac{I_0}{\Delta\nu} \left[\Delta\nu + \frac{c}{2\pi\delta} \left[\sin\left(\frac{2\pi\delta}{c}\left(\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}\right)\right) - \sin\left(\frac{2\pi\delta}{c}\left(\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}\right)\right) \right] \right]$$

En utilisant la formule de trigonométrie fournie, on peut mettre $I(M)$ sous la forme :

$$I(M) = \frac{I_0}{\Delta\nu} \left[\Delta\nu + \frac{c}{\pi\delta} \sin\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c}\nu_0\right) \right]$$

c'est à dire :

$$I(M) = I_0 \left[1 + \frac{c}{\pi\delta\Delta\nu} \sin\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right) \right]$$

avec $\delta = ax/D$ et $i = \frac{cD}{a\nu_0}$. On obtient donc finalement :

$$I(M) = \frac{I_{\max}}{2} \left[1 + \text{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{i}\right) \right]$$

- b) En comparant le résultat à l'expression fournie, on obtient le facteur de visibilité :

$$V(M) = \text{sinc}\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right)$$

- c) Selon l'énoncé, la longueur de cohérence L correspond à la différence de marche produisant la première annulation du facteur de visibilité $V(\delta)$. On a donc la première annulation de $\sin\left(\frac{\pi\delta}{c}\Delta\nu\right)$ pour une différence de marche non nulle :

$$\frac{\pi L}{c}\Delta\nu = \pi \quad \text{d'où} \quad L = \frac{c}{\Delta\nu}$$

Remarque : ceci est bien conforme à la définition de la durée de cohérence $\tau_c = 1/\Delta\nu$ pour une raie quasi-monochromatique et au fait que $L = c\tau_c$.

Compte-tenu de la donnée de l'énoncé $\Delta\nu = \frac{c}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$, on en déduit :

$$L = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

- d) Dans un modèle de trains d'onde on a $\tau_c = \frac{L}{c} = \tau$. On en déduit :

$$\tau = \frac{\lambda_0^2}{c \Delta \lambda}$$

- e) On ne peut observer d'interfranges que dans l'intervalle où les interférences ne sont pas brouillées en raison de la longueur de cohérence. La différence de marche δ doit donc vérifier :

$$|\delta| \leq L \iff -L \leq \delta \leq L \iff -\frac{LD}{a} \leq x \leq \frac{LD}{a}$$

L'intervalle de positions x sur lequel on peut observer les franges est donc : $\Delta x = \frac{2LD}{a}$. On trouve le nombre de franges visibles en divisant par l'interfrange :

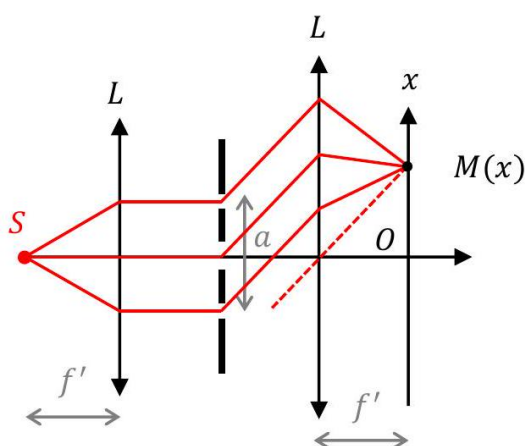
$$N = \frac{\Delta x}{i} = \frac{2LD}{a} \frac{a}{\lambda_0 D} = \frac{2L}{\lambda_0}$$

On retrouve bien l'expression indiquée dans le sujet.

- f) On recopie et on complète le tableau fourni.

Source	λ_0 en nm	$\Delta \lambda$ en nm	τ en s	L en m	N
Laser He -Ne	633	0,001	$1 \cdot 10^{-9}$	$4 \cdot 10^{-1}$	$1 \cdot 10^6$
Raie rouge de l'hydrogène	656,2	0,1	$1 \cdot 10^{-11}$	$4 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^4$
Lumière blanche filtrée	500	20	$4 \cdot 10^{-14}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^1$

- Q4.** a) et b) On réalise le schéma du montage et on y ajoute trois rayons qui interfèrent en M dans le plan focal image.



- c) On utilise la notation complexe. Si $\underline{a}(t) = A_m e^{i(\omega t + \varphi)}$ est la vibration lumineuse émise par la source S , les trois vibrations des ondes en M qui sont passées respectivement par les trous O_2 , O et O_1 s'écrivent :

$$\underline{a}_2(M, t) = \kappa \underline{a}(t - \tau_2) ; \quad \underline{a}_0(M, t) = \kappa \underline{a}(t - \tau_0) \quad \text{et} \quad \underline{a}_1(M, t) = \kappa \underline{a}(t - \tau_1)$$

où κ est le facteur de transmission des trous et où τ_2 , τ_0 et τ_1 sont les temps de propagation associées à ces trois ondes. On a donc :

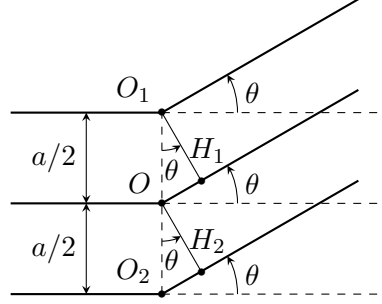
$$\underline{a}_2(M, t) = \kappa \underline{a}(t) e^{-i\omega\tau_2} ; \quad \underline{a}_0(M, t) = \kappa \underline{a}(t) e^{-i\omega\tau_0} \quad \text{et} \quad \underline{a}_1(M, t) = \kappa \underline{a}(t) e^{-i\omega\tau_1}$$

La vibration complexe totale en M s'écrit :

$$\underline{a}(M, t) = \underline{a}_2(M, t) + \underline{a}_0(M, t) + \underline{a}_1(M, t) = \kappa \underline{a}(t) \left[e^{-i\omega\tau_2} + e^{-i\omega\tau_0} + e^{-i\omega\tau_1} \right]$$

Prenons le rayon passant par O comme rayon de référence :

$$\underline{a}(M, t) = \kappa \underline{a}(t) e^{-i\omega\tau_0} \left[e^{i\omega(\tau_0 - \tau_2)} + 1 + e^{i\omega(\tau_0 - \tau_1)} \right]$$



Or, selon le théorème de Malus mais aussi le principe du retour inverse on a : $\tau_0 - \tau_2 = \{(SM)_0 - (SM_2)\}/c = -O_2H_2/c = -\frac{a}{2c} \sin \theta$. De la même façon $\tau_0 - \tau_1 = \{(SM)_0 - (SM)_1\}/c = +OH_1/c = +\frac{a}{2c} \sin \theta$. On a donc :

$$\begin{aligned} \underline{a}(M, t) &= \kappa \underline{a}(t) e^{-i\omega\tau_0} \left[1 + e^{i\frac{\omega a \sin \theta}{2c}} + e^{-i\frac{\omega a \sin \theta}{2c}} \right] \\ &= \kappa \underline{a}(t) e^{-i\omega\tau_0} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\omega a \sin \theta}{2c} \right) \right] \end{aligned}$$

d'où :

$$I(M) = \frac{\underline{a}(M, t) \underline{a}^*(M, t)}{2} = \kappa^2 \frac{\underline{a}(t) \underline{a}^*(t)}{2} \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\omega a \sin \theta}{2c} \right) \right]^2$$

donc :

$$I(M) = \kappa^2 I_S \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\omega a \sin \theta}{2c} \right) \right]^2$$

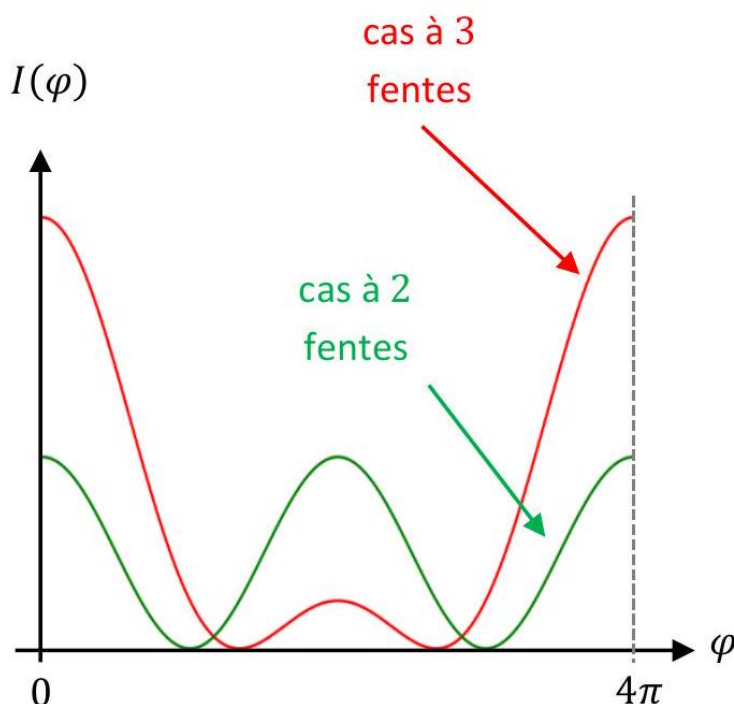
où I_S est l'intensité lumineuse émise par la source. D'autre part les rayons sont paraxiaux, ce qui entraîne : $\sin \theta \approx \theta$ et $x/f' = \tan \theta \approx \theta$. Comme $\omega/c = \frac{2\pi}{\lambda}$, on obtient finalement :

$$I(M) = I_0 \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]^2$$

avec $I_0 = \kappa^2 I_S$.

d) On réalise la représentation graphique demandée.

- Pour 3 trous : $I(\varphi) = I_0 \left[1 + 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right]^2$
- Pour 2 trous : $I(\varphi) = 2I_0 [1 + \cos(\varphi)]$



- e) On voit que la luminosité des zones brillantes est plus importante dans le cas à 3 trous que dans le cas à 2 trous. On note également que les zones brillantes sont un peu plus larges dans le cas à 3 trous que dans le cas à 2 trous.
- f) Sur la photo donnée, on mesure que la largeur de la frange centrale est : $2x_1 = 1,0$ mm. On cherche la première annulation de l'intensité : $I(\varphi_1) = 0$ ce qui conduit à :

$$\cos\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \varphi_1 = \frac{4\pi}{3}$$

Or on a : $\varphi_1 = 2\pi \frac{ax_1}{\lambda f'}$ d'où $a = \frac{2\lambda f'}{3x_1}$

AN. $a = \frac{2 \times 633 \times 10^{-9} \times 50 \times 10^{-2}}{3 \times 0,50 \times 10^{-3}} = 4,4 \times 10^{-4} \text{ m} = 0,44 \text{ mm}.$

3 Troisième problème. Voile solaire

- Q1.** Le référentiel géocentrique est le référentiel lié au centre de la Terre. Il est constitué de trois axes qui restent parallèles aux axes du référentiel de Copernic.

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié : le mouvement de tout point matériel isolé ou pseudo-isolé est rectiligne et uniforme (ou encore le mouvement du centre d'inertie de tout système matériel isolé ou pseudo-isolé est uniforme).

- Q2.** On considère la Terre comme une masse M_T répartie uniformément dans une boule de rayon R . On se place en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . À priori :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = G_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + G_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + G_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi$$

- Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de masse contenant M , donc des plans de symétrie de $\vec{\mathcal{G}}(M)$. On en déduit :

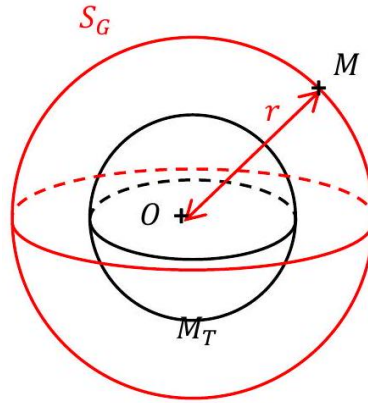
$$\vec{\mathcal{G}}(M) = G_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

- Il y a invariance de la distribution de masses par rotation autour de l'origine O . Cela implique $G_r = G_r(r)$.

Le champ gravitationnel s'écrit donc : $\vec{\mathcal{G}}(M) = G_r(r) \vec{e}_r = G_r(r) \vec{u}$.

On utilise comme surface de Gauss la sphère de rayon r centrée sur O . Le flux sortant du champ gravitationnel s'écrit alors : $\Phi_{(S_G)}(\vec{\mathcal{G}}) = \iint_{(S_G)} \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{dS} = 4\pi r^2 G_r(r)$.

Le théorème de Gauss gravitationnel s'écrit : $\Phi_{(S_G)}(\vec{\mathcal{G}}) = -4\pi G M_{\text{int}}$. Comme $r > R_T$ on a donc : $M_{\text{int}} = M_T$.



Le champ gravitationnel est donc :

$$\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{u} \implies \vec{F}_g = m \vec{\mathcal{G}} = -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{u}$$

- Q3.** Le mobile n'est soumis qu'à la force gravitationnelle $\vec{F}_g$. Le théorème du moment cinétique par rapport à O (fixe dans le référentiel géocentrique) s'écrit alors :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_g) = \vec{OM} \wedge \left(-\frac{GmM_T}{r^2} \vec{u} \right) = \vec{0}$$

On a donc : $\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{0}$ et donc : $\vec{\mathcal{L}}_O = \text{cte}$. Par définition du moment cinétique, on a : $\vec{\mathcal{L}}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$.

Le moment cinétique est constant et orthogonal à la fois à $\vec{OM}$ et à $\vec{v}$. On a donc nécessairement le point M et le vecteur $\vec{v}$ inclus dans le plan orthogonal à $\vec{\mathcal{L}}_O$ passant par O . La trajectoire du mobile est donc plane.

- Q4.** La force gravitationnelle s'écrit en coordonnées sphériques considérées : $\vec{F}_g = -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{e}_r$. Si la force gravitationnelle est une force conservative alors il existe $\mathcal{E}_p$ telle que :

$$\vec{F}_g = -\vec{\text{grad}}(\mathcal{E}_p) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{e}_r$$

En projection selon $\vec{e}_r$, on a : $-\frac{GmM_T}{r^2} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}$ d'où :

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{GmM_T}{r} + \text{Cste}$$

En prenant l'énergie potentielle nulle à l'infini, on a finalement :

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{GmM_T}{r}$$

- Q5.** La seule force qui s'exerce sur le mobile est une force conservative, d'après le théorème de l'énergie mécanique, l'énergie mécanique du mobile se conserve. Cette énergie mécanique s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2) - \frac{GmM_T}{r}$$

Le moment cinétique s'écrit : $\vec{\mathcal{L}}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z$, d'où : $\dot{\theta} = \frac{\mathcal{L}_O}{mr^2}$.

$$\text{On a donc } \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GmM_T}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2} - \frac{GmM_T}{r}$$

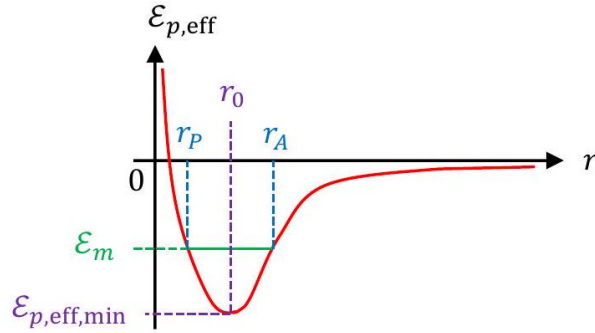
L'énergie mécanique peut bien se mettre sous la forme : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ avec :

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2} - \frac{GmM_T}{r}$$

- Q6.** Dans l'expression de l'énergie mécanique, le terme $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ est positif ou nul. On a donc bien :

$$\forall r, \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \geq \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$$

- Q7.** On réalise le graphique demandé. On trace la forme habituelle d'un tel potentiel effectif. Un état lié correspond à un état où le rayon r est borné, soit ici un cas où $\mathcal{E}_m < 0$.



Il y a deux positions pour lesquelles $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$. La plus proche, de rayon r_P , est le périégée. Le périégée correspond au point le plus proche du centre attracteur d'une orbite elliptique. La plus éloignée, de rayon r_A , est l'apogée. L'apogée correspond au point le plus éloigné du centre attracteur d'une orbite elliptique.

Dans le cas où l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective minimale, le rayon $r = r_0$ est fixé. On a alors un mouvement circulaire.

- Q8.** On considère un mouvement circulaire de rayon R . Le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{F}_g$. On a alors :

$$m(-R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta) = m\left(-\frac{v^2}{R} \vec{e}_r + \dot{v} \vec{e}_\theta\right) = -\frac{GmM_T}{R^2} \vec{e}_r$$

La projection sur $\vec{e}_r$ permet d'écrire :

$$-m\frac{v^2}{R} = -\frac{GmM_T}{R^2} \quad \text{d'où} \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}} = \text{Cste}$$

L'énergie mécanique s'écrit alors :

$$\mathcal{E}_{m,\text{alt}} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{R} = \frac{GmM_T}{2R} - \frac{GmM_T}{R} = -\frac{GmM_T}{2R}$$

Q9. La période de révolution du mobile s'écrit : $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R \times \sqrt{\frac{R}{GM_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM_T}}$.

On retrouve alors l'expression de la troisième loi de Kepler pour une orbite circulaire :

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$$

Partie II - Voile solaire

II. 1 - Pression de radiation

Q10. La relation de passage pour le champ électrique s'écrit : $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}$. Le conducteur est parfait, le champ électrique y est donc nul : $\vec{E}_2 = \vec{0}$. Dans le milieu (1) il y a superposition du champ incident et du champ réfléchi : $\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r$.

On a donc au niveau de la surface du métal, pour $x = 0$ et en complexes :

$$-E_0 e^{i(\omega t)} \vec{e}_z - E'_{0y} e^{i(\omega t)} \vec{e}_y - E'_{0z} e^{i(\omega t)} \vec{e}_z = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x$$

Les projections donnent donc :

$$E'_{0y} = 0 \quad \text{et} \quad E'_{0z} = -E_0 \quad \text{et} \quad \sigma = 0$$

Le champ électrique complexe de l'onde réfléchie peut donc s'écrire :

$$\boxed{\vec{E}_r(M, t) = -E_0 e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_z}$$

Q11. Les champs incidents et réfléchis sont des OPPS, on peut donc utiliser la relation de structure. Pour l'onde incidente, on a :

$$\vec{B}_i = \frac{+k \vec{e}_x \wedge \vec{E}_i}{\omega} = -\frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y$$

Pour l'onde réfléchie, on a :

$$\vec{B}_r = \frac{-k \vec{e}_x \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kx)} \vec{e}_y$$

Le champ résultant est donc :

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_r = -\frac{E_0}{c} e^{i\omega t} (e^{ikx} + e^{-ikx}) \vec{e}_y = -\frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \cos(kx) \vec{e}_y$$

Au voisinage du conducteur on a alors :

$$\vec{B}(x = 0^-, t) = -\frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \vec{e}_y \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{B}(x = 0^-, t) = -\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \vec{e}_y}$$

La relation de passage pour le champ magnétique s'écrit : $\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$.

En remplaçant par les expressions trouvées on a donc :

$$\boxed{\vec{j}_s = +\frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{e}_z}$$

Q12. La force de Laplace élémentaire s'écrit : $\vec{\delta F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$. Ici cela donne pour un ruban de longueur a et d'épaisseur dy assimilé à un fil :

$$\vec{\delta F}_L = \delta i a \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{B}(x=0^-, t)}{2} = j_S dy a \vec{e}_z \wedge \frac{\vec{B}(x=0^-, t)}{2}$$

On en déduit la force totale en intégrant :

$$\boxed{\vec{F}_L = \int_0^a \vec{\delta F}_L = 2a^2 \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) \vec{e}_x}$$

Q13. La force surfacique correspondante est :

$$\vec{f} = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) \vec{e}_x$$

d'où la valeur moyenne :

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \vec{e}_x = \frac{2I}{c} \vec{e}_x$$

et donc :

$$\boxed{P_m = \frac{2I}{c}}$$

Q14. En ne considérant que la force de la pression de radiation, le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = S\langle \vec{f} \rangle$. On a donc $S = \frac{mac}{2I}$ avec $a = 10^{-3}g$. AN.
 $S = \frac{2000 \times 10^{-3} \times 9,8 \times 3,0 \cdot 10^8}{2 \times 1000} = 3 \cdot 10^6 \text{ m}^2 = 3 \text{ km}^2$.
 Les dimensions de la voile solaire sont donc très importantes !

II. 2 - Libération du vaisseau

Position du problème

Q15 Dans les coordonnées polaires le vecteur position s'écrit : $\vec{r} = r\vec{e}_r$. Les vecteurs vitesse et accélération sont alors donnés par :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Q16 Le vaisseau est soumis à la force gravitationnelle $\vec{F}_g$ et la force de la pression de radiation $\vec{F}_P$. La force gravitationnelle s'exprime selon :

$$\vec{F}_g = -G \frac{M_T m}{r^2} \vec{e}_r$$

La force de pression de radiation s'exprime :

$$\vec{F}_P = L(r, \theta) P_m S \cos^2(\varphi) (\cos(\alpha) \vec{e}_r + \sin(\alpha) \vec{e}_\theta)$$

avec $\alpha = \varphi - \theta$.

Les composantes polaires de la résultante des forces sont donc :

$$F_r = -G \frac{M_T m}{r^2} + L(r, \theta) P_m S \cos^2(\varphi) \cos(\varphi - \theta)$$

$$F_\theta = L(r, \theta) P_m S \cos^2(\varphi) \sin(\varphi - \theta)$$

Q17 En utilisant les notations de l'énoncé on a : $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$ avec $v_r = \dot{r}$ et $v_\theta = r\dot{\theta}$. On a alors : $\dot{v}_r = \ddot{r}$ et $\dot{v}_\theta = \dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$.

Il vient :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\dot{r}(r\dot{\theta})}{r} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \right) \vec{e}_\theta = \left(\dot{v}_r - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{v_r v_\theta}{r} + \dot{v}_\theta \right) \vec{e}_\theta$$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$\begin{cases} m \left(\dot{v}_r - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = F_r \\ m \left(\frac{v_r v_\theta}{r} + \dot{v}_\theta \right) = F_\theta \end{cases}$$

d'où directement les deux expressions proposées :

$$\dot{v}_r = \frac{F_r}{m} + \frac{v_\theta^2}{r} \quad \text{et} \quad \dot{v}_\theta = \frac{F_\theta}{m} - \frac{v_r v_\theta}{r}$$

Énergie et manœuvre optimale

Q18 L'énergie mécanique du vaisseau est : $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,\text{grav}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r}$. On a donc finalement :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) - \frac{GM_T m}{r}$$

Q19 Le théorème de la puissance mécanique permet d'écrire :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \sum \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{non conservatif}})$$

On a donc ici :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &= \vec{F}_P \cdot \vec{v} \\ &= [L(r, \theta) P_m S \cos^2(\varphi) (\cos(\varphi - \theta) \vec{e}_r + \sin(\varphi - \theta) \vec{e}_\theta)] \cdot [v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta] \end{aligned}$$

On a donc l'expression demandée :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = K_m L(r, \theta) \cos^2(\varphi) \{ v_r \cos(\varphi - \theta) + v_\theta \sin(\varphi - \theta) \}$$

avec $K_m = P_m S$.

III. 3 - Simulation numérique du mouvement du vaisseau

Résolution numérique

Q20. On génère le tableau T avec l'instruction :

T = np.arange(0, tmax, dt)

Q21. On cherche l'angle φ optimal permettant d'avoir la dérivée $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt}$ la plus grande possible. On construit alors la fonction suivante :

```
def recherche_phi_optimal(L,vr,vtheta,theta):
    if L == 0 :
        return theta
    else :
        eps = 2e-3
        phi = -np.pi/2
        dEm_max = 0
        phi_opt = -np.pi/2
        while phi <= np.pi/2 :
            derivee_Em = Km * np.cos(phi)**2 * (vr*np.cos(phi-theta) + vth*np.sin(phi-theta))
            if dEm_max < derivee_Em :
                dEm_max = derivee_Em
                phi_opt = phi
        return phi_opt
```

Q22. On rédige un programme calculant $\dot{v}_r$ et $\dot{v}_\theta$ à partir des expressions trouvées dans les questions Q16 et Q17 :

```
def derivees_comp_vitesse(L,r,theta,vr,vtheta,phi):
    Fr = -G*MT*m/r**2 + Km*L* np.cos(phi)**2* np.cos(phi-theta)
    Fth = Km*L* np.cos(phi)**2* np.sin(phi-theta)
    vr_pt = Fr/m + vtheta**2/r
    vtheta_pt = Fth/m - vr*vtheta/r
    return vr_pt,vtheta_pt
```

Q23. On incrémente les quatre grandeurs considérées par les instructions suivantes.

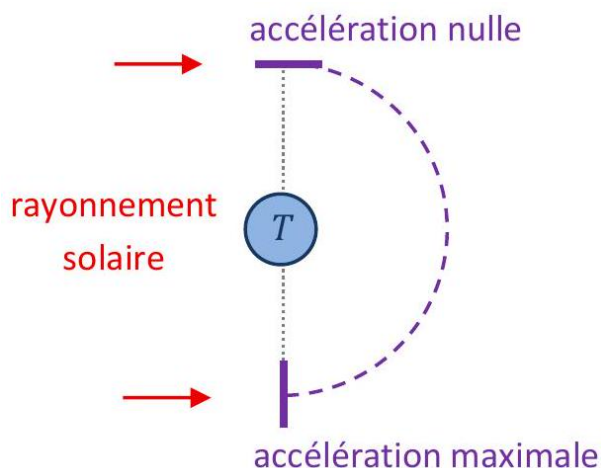
```
r += vr*dt
th += vth*dt
vr += vr_pt*dt
vtheta += vth_pt*dt
```

Exploitation de la simulation

Q24. On souhaite accélérer le vaisseau lors de ses révolutions autour de la Terre, il faut donc que l'accélération soit maximale lorsque qu'il s'éloigne du Soleil, et qu'elle soit nulle lorsqu'il s'en approche.

Lorsque le vaisseau s'éloigne du Soleil, on est alors en $\theta = -\frac{\pi}{2}$ et il faut que la voile soit orthogonale au rayonnement solaire, donc selon le plan yOz .

Au contraire, lorsque le vaisseau s'approche du Soleil, on est alors en $\theta = +\frac{\pi}{2}$ et il faut que la voile soit tangente au rayonnement solaire, donc selon le plan xOz .



Q25. L'énergie mécanique du vaisseau est : $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_T m}{r}$. Pour pouvoir échapper à l'attraction terrestre, il faut que $\mathcal{E}_m \geq 0$ pour quitter l'état lié. La trajectoire sera alors soit une parabole, soit une hyperbole. On doit donc avoir :

$$\frac{1}{2}mv^2 \geq \frac{GM_T m}{r} \quad \text{d'où} \quad v \geq \sqrt{\frac{2GM_T}{r}}$$

On pose alors :

$$v_{\text{lib}}(r) = \sqrt{\frac{2GM_T}{r}}$$

Q26. En utilisant l'expression de la question précédente, on a :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2$$

d'où :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2 \left[\left(\frac{v}{v_{\text{lib}}} \right)^2 - 1 \right] = \frac{GM_T m}{r} \left[\left(\frac{v}{v_{\text{lib}}} \right)^2 - 1 \right]$$

et donc :

$$\frac{v}{v_{\text{lib}}} = \frac{\|\vec{v}\|}{v_{\text{lib}}} = \sqrt{1 + \frac{r\mathcal{E}_m}{GM_T m}}$$

Lors de la révolution du vaisseau, le rayonnement solaire accélère lorsque le vaisseau s'éloigne du Soleil du fait de l'orientation de la voile. Le vaisseau décrit une trajectoire elliptique de plus en plus excentrée mais en ayant de plus en plus d'énergie mécanique. Il y a donc bien une augmentation de l'amplitude des oscillations de la vitesse.

Lorsque la vitesse du vaisseau dépasse la vitesse de libération, les oscillations s'arrêtent et le vaisseau peut alors s'arracher à l'attraction terrestre.