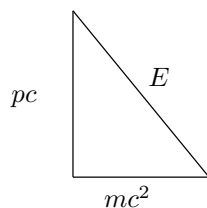


Mines-Ponts Physique 1 MP 2025

Q01. Formellement on peut représenter un triangle rectangle en énergie.



L'impulsion s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et pc est homogène à une l'énergie en joule (J) ou tout aussi bien en $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$.

Q02. Avec $p = 0$, il vient $E_0 = m_p c^2$ et donc d'après l'indication de l'énoncé $E_0 = 940 \text{ MeV}$.

Q03. $E_c = E - E_0 = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - mc^2 = mc^2 \left(\sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} - 1 \right)$

Avec $p^2 \ll m^2 c^2$, il vient : $E_c \approx mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2} - 1 \right) \Rightarrow E_c = \frac{p^2}{2m}$

En identifiant à l'expression non relativiste de l'énergie cinétique $E_c = mv^2/2$, on retrouve $\vec{p} = m\vec{v}$.

Dans la limite classique $E_c \approx \frac{mv^2}{2}$, à la limite la contrainte impose :

$$\frac{E_c}{E_0} = \frac{mv^2}{2mc^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{100}} \Rightarrow v \leq 0,14 c$$

Q04. $E^2 = m^2 c^4 + c^2 \frac{m^2 v^2}{1 - (v/c)^2} = m^2 c^4 \left(1 + \frac{(v/c)^2}{1 - (v/c)^2} \right) = m^2 c^4 \times \frac{1}{1 - (v/c)^2}$

$$E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma mc^2 \text{ avec } \gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$$

Q05. Dans le cas d'un photon, avec $v = c$ l'expression précédente de l'énergie diverge sauf à imposer une **masse nulle**.

Avec $\lambda = h/p$ et $E = pc$, il vient $E = \frac{hc}{\lambda}$.

$E_b = \frac{1,2}{0,4} \Rightarrow E_b = 3 \text{ eV}$. $E_r = \frac{1,2}{0,6} \Rightarrow E_r = 2 \text{ eV}$.

Q06. La conservation de l'énergie impose :

$$E_i = E_f + \frac{mv^2}{2} + E = E_i - \Delta E + \frac{mv^2}{2} + E \Rightarrow 0 = -\Delta E + \frac{mv^2}{2} + E$$

La conservation de la quantité de mouvement impose : $p = mv = E/c$. En éliminant v de la première expression, il vient :

$$0 = -\Delta E + \frac{E^2}{2mc^2} + E \Leftrightarrow E^2 + 2mc^2 E - 2mc^2 \Delta E = 0$$

La racine positive de cette équation a pour expression :

$$E = -mc^2 + \sqrt{m^2 c^4 + 2mc^2 \Delta E} = mc^2 \left(\sqrt{1 + 2 \frac{\Delta E}{mc^2}} - 1 \right) \Rightarrow \eta = \frac{\Delta E}{mc^2}$$

Q07. Avec $\Delta E \approx 1 \text{ eV}$ et $m_H c^2 \approx 940 \text{ MeV}$ (la masse de l'atome d'hydrogène est quasiment celle d'un proton), $\eta \ll 1$ et un développement limité de l'expression précédente conduit à :

$$E \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{2\Delta E}{mc^2} - 1 \right) \Rightarrow E \approx \Delta E$$

L'énergie de recul de l'atome est négligeable et **l'énergie du photon s'identifie à la variation d'énergie de l'atome d'hydrogène**.

Q08. La longueur d'onde maximale est associée à la variation d'énergie minimale pour l'atome, c'est-à-dire un passage du niveau 2 au niveau 1, la longueur d'onde maximale vérifie :

$$\frac{hc}{\lambda_{\max}} = -\frac{H}{2 \times 2^2} + \frac{H}{2 \times 1^2} = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \right) = \frac{3H}{8} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{8hc}{3H}$$

A.N. : $\lambda_{\max} = \frac{8 \times 1,2}{3 \times 27,2} = \frac{9,6}{3 \times 27,2} = \frac{3,2}{27,2} \Rightarrow \lambda_{\max} \approx 0,1 \mu\text{m}$

Ces longueurs d'onde se situent dans **l'ultraviolet**.

La longueur d'onde minimale est associée à la variation d'énergie maximale pour l'atome, c'est-à-dire un passage du niveau ∞ au niveau 3, la longueur d'onde minimale vérifie :

$$\frac{hc}{\lambda_{\min}} = 0 + \frac{H}{2 \times 3^2} = \frac{H}{18} \Rightarrow \lambda_{\min} = \frac{18hc}{H}$$

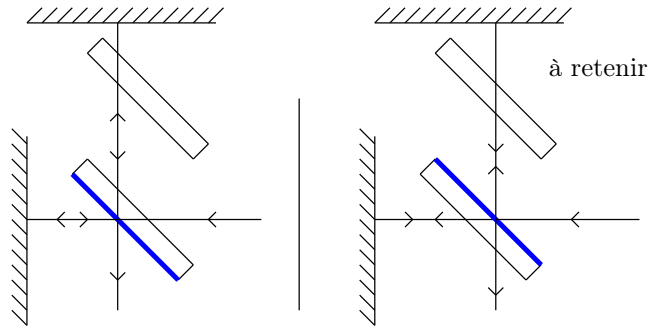
A.N. : $\lambda_{\min} = \frac{18 \times 1,2}{27,2} = \frac{21,6}{27,2} \Rightarrow \lambda_{\min} \approx 0,8 \mu\text{m}$

Ces longueurs d'onde se situent dans **l'infrarouge**.

Les longueurs d'onde intermédiaires dans le visible seront nécessairement associés à des **désexcitations vers le niveau 2**.

Q09. Il s'agit d'équilibrer les chemins optiques sur les deux voies et donc le nombre de

passages dans le verre pour chacun des faisceaux.



La face semi-réfléchissante a été représentée en traits plus épais. Sur le schéma de gauche l'un des faisceaux traverse trois fois le verre contre une fois pour l'autre faisceau. **Sur le schéma de droite, il y a équilibre des deux parcours dans les lames.** (Remarque : par souci de visibilité on n'a pas représenté les réfractions à la traversée des lames).

Q10. Dans une configuration « lame d'air », les franges sont localisées à l'infini et on observe des **anneaux**.

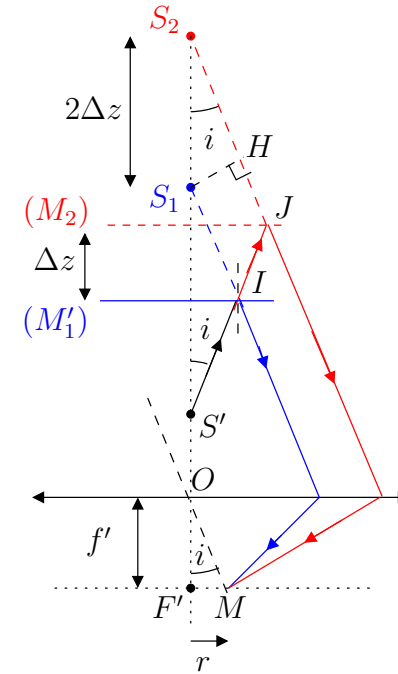
Si l'oculaire est déréglé, ce qui revient à une observation à distance finie, on observe une **perte de contraste** d'autant plus importante que le réglage est dégradé.

Q11. Au centre de la figure d'interférences, la différence de marche vaut $\delta = 2\Delta z$ (le facteur 2 est dû à l'aller-retour). Avec N franges qui défilent, il vient : $2\Delta z = N\lambda_0$.

Q12. Pour le calcul de la différence de marche, on fait intervenir, la source fictive S' (image de la source réelle par la séparatrice) et les sources secondaires S_1 et S_2 images de la source fictive S' par les miroirs (M'_1) et (M_2) .

Avec $S'I = S_1I$, il vient $(S'M)_1 = (S_1M)$ et de même $(S'M)_2 = (S_2M)$ comme si la lumière était issue des sources secondaires S_1 et S_2 , c'est-à-dire pour la différence de marche : $\delta(M) = (S'M)_2 - (S'M)_1 = (S_2M) - (S_1M) = S_2H + (HM) - (S_1M)$ avec H le projeté orthogonal de S_1 sur le segment S_2J .

Les rayons qui convergent en M , point du plan focal image, sont nécessairement issus de rayons parallèles. En considérant le retour inverse de la lumière, le théorème de Malus assure que $(MS_1) = (MH)$, et finalement : $\delta(M) = S_2H = 2\Delta z \cos(i)$



Au centre de la figure d'interférences, $\delta_0 = 2\Delta z_{\max}$. Pour un angle $\Delta\theta$, la différence de marche est $\delta = 2\Delta z_{\max} \cos(\Delta\theta)$. Le retour a une frange de même nature impose :

$$\delta_0 - \delta = \lambda_0 \Rightarrow 2\Delta z_{\max} \cos(\Delta\theta) = 2\Delta z_{\max} - \lambda_0$$

Q13. $\lambda_0 = \frac{2 \times 1035}{3156} = \frac{2070}{3156} \Rightarrow \lambda_0 \approx 0,65 \mu\text{m}$ donc la raie rouge H_α .

$$\text{Avec } \lambda_0 = \frac{2\Delta z}{N} \Rightarrow \frac{\delta\lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\delta(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{2}{1035} \Rightarrow \frac{\delta\lambda_0}{\lambda_0} \approx 2 \times 10^{-3}$$

Après le défilement de 1000 franges, l'expérience montre que les anneaux sont très rapprochés, l'angle $\Delta\theta$ est nécessairement faible, il vient :

$$2\Delta z_{\max} \left(1 - \frac{(\Delta\theta)^2}{2}\right) = 2\Delta z_{\max} - \lambda_0 \Rightarrow (\Delta\theta)^2 = \frac{\lambda_0}{\Delta z_{\max}} = \frac{2}{N}$$

$$\text{A.N. : } \Delta\theta = \sqrt{\frac{2}{3156}} \approx \sqrt{\frac{1}{1600}} \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{1}{40} \text{ rad} = 0,025 \text{ rad}$$

L'angle est de l'ordre de 1° ce qui reste très observable.

Q14. Pour deux sources cohérentes de même intensité, l'intensité résultante est donnée par la **formule de Fresnel** :

$$I(\delta) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right)$$

Avec I_{\max} et I_{\min} les intensités maximale et minimale, le contraste C est défini par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad \Rightarrow \quad \text{ici} \quad C = \frac{4I_0 - 0}{4I_0 + 0} = 1$$

Q15. Des sources de fréquence différente sont incohérentes, l'intensité résultante est la somme des intensités dues à chacune des sources individuelles :

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \right) \right) + 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \right) \right)$$

Avec un peu de trigonométrie et compte tenu des définitions de λ_0 et $\Delta\lambda$:

$$I = 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0} \right) \cos \left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right)$$

Compte tenu de $\Delta\lambda \ll \lambda_0$, la période de variation du second cosinus est beaucoup plus grande que celle du premier, on peut donc supposer que ce second terme est quasiment constant sur une variation de la différence de marche de l'ordre de la longueur d'onde, en conséquence :

$$I_{\max} = 4I_0 \left(1 + \left| \cos \left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right| \right) \quad \text{et} \quad I_{\min} = 4I_0 \left(1 - \left| \cos \left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right| \right)$$

Et pour le contraste :
$$C = \left| \cos \left(\frac{\pi\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) \right|$$

On note que le contraste s'annule pour $\frac{\pi\delta_k\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. L'**observation d'une succession d'annulations de contraste** permet donc grâce à cette dernière relation de remonter à $\Delta\lambda$ connaissant λ_0 .

Q16. Le contraste des franges sera minimal pour une différence de marche qui conduit à une interférence constructive pour une des longueurs d'onde et une interférence destructive pour l'autre longueur d'onde ce qui s'écrit :

$$\frac{\delta}{\lambda_1} = p \quad \text{et} \quad \frac{\delta}{\lambda_2} = p + m + \frac{1}{2} \quad \text{avec} \quad \{p, m\} \in \mathbb{Z}^2$$

$$\Rightarrow \delta \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \delta \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} \right) = m + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

La relation obtenue est tout à fait identique à la relation obtenue par une autre méthode à la question précédente.

Pour une telle valeur de δ , l'intensité lumineuse passe de $I_{\max} = 4I_1$ (interférences constructives pour la raie λ_1 et destructives pour λ_2) à $I_{\max} = 4I_2$ (interférences construc-

tives pour la raie λ_2 et destructives pour λ_1) et donc pour le contraste :

$$C = \frac{4I_1 - 4I_2}{4I_1 + 4I_2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$$

On note que le contraste ne s'annule plus pour $I_1 \neq I_2$.

$$\text{A.N. : } \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = \frac{(6,5 \times 10^{-7})^2}{1,4 \times 10^{-11}} \approx \frac{40 \times 10^{-14}}{1,4 \times 10^{-11}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \approx 3 \text{ cm}$$

Il faudrait faire varier la différence de marche de plusieurs centimètres pour observer au moins deux annulations de contraste. La **longueur de cohérence des lampes spectrales est plutôt de l'ordre du millimètre. L'observation n'est pas possible.**

Par ailleurs, une telle différence de marche nécessiterait un déplacement comparable du miroir mobile (à un facteur 2 près toutefois). Les interféromètres de Michelson des lycées permettent rarement un déplacement de plus de deux centimètres de part et d'autre du contact optique.

Q17. Le circuit d'eau assure le **refroidissement du système**.

Les raies de l'hydrogène apparaissant sur la figure sont les raies de la série de Balmer dans le visible. Les longueurs d'onde sont donc exprimées en **angstrom**, $1 \text{ \AA} = 0,1 \text{ nm}$.

L'allure de ce spectre continu fait penser à un **spectre de corps noir**. On peut également penser au spectre du dihydrogène moléculaire.

Q18. Cette lampe ne contient pas de dihydrogène ce qui évite la perturbation par l'apparition de bandes spectrales associées au dihydrogène moléculaire. Le spectre moléculaire du groupement hydroxyle se situant dans l'ultraviolet.

Q19. De manière générale : $\lambda = \lambda_\infty \left(1 + \frac{m_e}{m_N} \right) > \lambda_\infty$. Le noyau de deutérium ayant une masse approximativement double de celle du noyau d'hydrogène, la correction positive est plus faible et **les raies du deutérium sont décalées vers le bleu**.

$$\lambda_H - \lambda_D = \lambda_\infty \left(\frac{m_e}{m_p} - \frac{m_e}{m_n + m_p} \right) \approx \lambda_\infty m_e \left(\frac{1}{m_p} - \frac{1}{2m_p} \right) \approx \frac{\lambda_\infty m_e}{2m_p}$$

où l'on a confondu la masse du proton et du neutron $m_n \approx m_p$.

Par lecture graphique $\lambda_{H\beta} \approx 490 \text{ nm}$ et donc :

$$\lambda_H - \lambda_D = \frac{490 \times 0,51}{2 \times 940} \approx \frac{2,5 \times 10^2}{2 \times 10^3} \quad \Rightarrow \quad \lambda_H - \lambda_D \approx 0,12 \text{ nm}$$

Le spectromètre doit posséder une **résolution meilleure que 0,1 nm**.

Q20. $|\psi(x, t)|^2 = |\psi_0|^2$. **La densité de probabilité de présence est indépendante du temps**, ce qui caractérise un état stationnaire.

Les couples $\{x, t\}$ associés à une phase nulle vérifie : $Et - p(E)x = 0$, c'est-à-dire $x =$

$\frac{E}{p(E)}t$. Avec $E > 0$ et $p(E) > 0$, ceci correspond bien à un déplacement dans le sens des x

croissants. Le coefficient de proportionnalité est la vitesse de phase $v_\varphi = \frac{E}{p(E)}$ et pour

la vitesse de groupe $v_g = \frac{dE}{dp}$.

Q21. En reportant la forme de l'onde proposée dans l'équation de Schrödinger, il vient :

$$\forall x, \forall t, -\frac{\hbar^2}{2m} \times -\frac{p^2(E)}{\hbar^2} \psi(x, t) + V_0 \psi(x, t) = i\hbar \times -\frac{i}{\hbar} E \psi(x, t) \Rightarrow \boxed{E = V_0 + \frac{p^2(E)}{2m}}$$

Ou tout aussi bien $p(E) = \sqrt{2m(E - V_0)}$. On reconnaît une relation du type « énergie=énergie potentielle + énergie cinétique » avec l'énergie cinétique qui s'identifie à l'énergie cinétique d'une particule classique. L'équation de SCHRÖDINGER est **non relativiste**.

$dE = pdp/m \Rightarrow v_g = \frac{p}{m}$. La vitesse du paquet d'ondes s'identifie à la vitesse de la particule classique.

Q22. En reportant la forme de l'onde proposée dans l'équation de KLEIN-GORDON, il vient :

$$\hbar c^2 \times -\frac{p^2(E)}{\hbar^2} \psi(x, t) + \left[-\hbar^2 \times -\frac{E^2}{\hbar^2} - 2V_0 i\hbar \times -\frac{iE}{\hbar} + V_0^2 \right] \psi(x, t) = m^2 c^4 \psi(x, t)$$

En conséquence : $E^2 - 2V_0 E + V_0^2 = (E - V_0)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$. Pour $V_0 = 0$, on reconnaît la relation relativiste (1) fournie au début de l'énoncé. L'équation de KLEIN-GORDON est **relativiste**.

$$-2pc^2 dp + 2E dE - 2V_0 dE = 0 \Rightarrow \boxed{v_g = \frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{E - V_0}}$$

Q23. Au sein de la barrière de potentiel avec $E < V_0$, l'onde est la **superposition de deux ondes évanescentes**.

R et T sont déterminés en exploitant la **continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée spatiale** en $x = 0$ et $x = a$ (barrière de potentiel finie).

La situation présentée ici est connue sous le nom d'**effet tunnel**. Contrairement au cas classique, une particule quantique a une probabilité non nulle de traverser la barrière même si $E < V_0$.

Dans le cas des ondes de de Broglie, le vecteur courant de probabilité de présence est donné par $\vec{J} = \frac{p}{m} |\psi(x, t)|^2 \vec{u}_x$. Ainsi le rapport des normes des vecteurs courants transmis et incident est donné par :

$$\frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|} = |T|^2$$

$|T|^2$ représente la **probabilité pour la particule quantique de traverser la barrière de potentiel**.

Q24. Pour cette question, on exploite la relation de dispersion obtenue à la question Q22 : $(E - V_0)^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$.

En amont et en aval de la barrière $V = 0$ et $p^2 c^2 = E^2 - m^2 c^4 > 0$. Les ondes sont des ondes de de Broglie.

Au sein de la barrière : $q^2 c^2 = (E - V_0)^2 - m^2 c^4 = (\varepsilon^2 - m^2 c^4) = (\varepsilon - mc^2)(\varepsilon + mc^2) > 0$. Bien que $V_0 > E$, avec $\varepsilon > mc^2$, on obtient quand même des **ondes de de Broglie au sein de la barrière** ! Très généralement au sein de la barrière la solution est de la forme $\psi(x, t) = C \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - qx)\right] + D \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et + qx)\right]$

Q25. Par définition même $|T|^2 \leq 1$.

Très généralement le dénominateur peut prendre la valeur unité dans deux situations :

- $\forall \varphi$ à condition que $\alpha = 1$, c'est-à-dire $p = q$. Cette situation correspondrait à l'absence de barrière ($V_0 = 0$) ce qui représente le cas trivial non pertinent ici ;
- $\forall \alpha$, à condition que $\varphi = \pi [\pi]$, c'est-à-dire pour $\frac{q_n a}{\hbar} = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $q_n = \frac{n\pi\hbar}{a}$, le facteur de transmission est donc unitaire, **la particule traverse avec certitude** !

Ce résultat est inattendu :

- dans le cas classique, la particule ne passe jamais pour $E < V_0$;
- dans le cas quantique non relativiste, la particule peut certes passer (effet tunnel) mais avec une probabilité qui décroît exponentiellement compte tenu de l'écart d'énergie et de la largeur de la barrière ;
- dans le cas quantique relativiste étudié ici, bien que $E < V_0$, pour certaines valeurs de l'impulsion au sein de la barrière, du fait d'interférences constructives des ondes de de Broglie, la particule passe avec certitude.