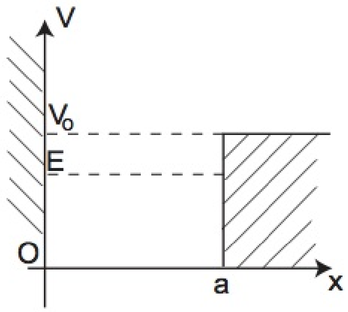
8 Corrigé mécanique quantique - Mines / Ponts

Soit une particule de masse m et d'énergie E. On suppose que son énergie potentielle vérifie :

$$\begin{cases} x<0 & : \quad V(x)=+\infty \\ 0\leqslant x\leqslant a & : \quad V(x)=0 \\ x>a & : \quad V(x)=V_0 \end{cases}$$



On s'intéresse aux états liés et on pose :

$$k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \textit{et } q=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$$

1. *Montrer que : $qa=-ka\ cotan(ka)$.*

On considère un état stationnaire quantique d'énergie E : $\Psi_{\text{stat}}=\varphi(x)\,e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$. La partie spatiale $\varphi(M)$ vérifie l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\varphi"(x)+V(x)\,\varphi(x)=E\varphi(x)$$

donc :

$$\varphi"(x)+\frac{2m\,[\,E-V(x)\,]}{\hbar}\,\varphi(x)=0$$

- Si $0\leqslant x\leqslant a$: $V(x)=0$ donc :

$$\varphi"(x)+\frac{2mE}{\hbar}\,\varphi(x)=0$$

Comme d'après le théorème du minimum d'énergie on a $E>V_{\min}=0$, en posant $k=\sqrt{2mE/\hbar^2}$, on a $k>0$ et la solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$\varphi(x)=A\,e^{ikx}+B\,e^{-ikx}$$

- Si $x>a$: $V(x)=V_0$ et donc :

$$\varphi"(x)+\frac{2m(E-V_0)}{\hbar}\,\varphi(x)=0$$

On peut poser $q=\sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$, ce qui donne l'équation différentielle $\varphi''(x)-q^2\varphi(x)=0$ dont la solution générale est :

$$\varphi(x)=C\,e^{-qx}+D\,e^{qx}$$

- Enfin on a $\varphi(x)=0$ si $x<0$ puisque c'est une marche de potentiel infinie.

D'une part, il faut maintenant assurer la continuité de φ en $x=0$ et en $x=a$, ainsi que la continuité de la dérivée φ' en $x=a$. D'autre part, pour éviter la divergence de φ lorsque $x\longrightarrow+\infty$ on doit imposer $\boxed{D=0}$.

Il vient :

$$\begin{cases} A+B & = & 0 \\ A\,e^{ika}+B\,e^{-ika} & = & C\,e^{-qa} \\ ik\,(A\,e^{ika}-B\,e^{-ika}) & = & -q\,C\,e^{-qa} \end{cases} \iff \begin{cases} B & = & -A \\ 2i\,A\sin(ka) & = & C\,e^{-qa} \\ 2ik\,A\cos(ka) & = & -qC\,e^{-qa} \end{cases}$$

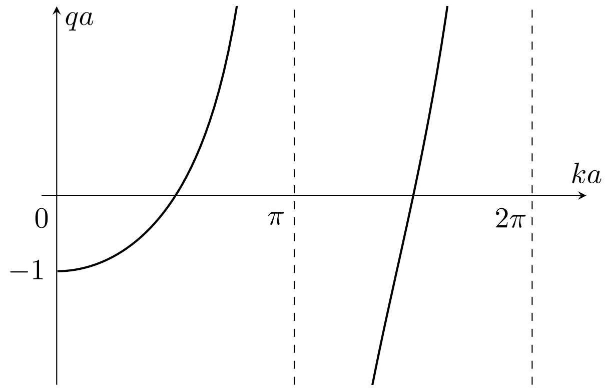
La deuxième équation donne $C=2i\,A\sin(ka)\,e^{qa}$. En reportant ce résultat dans la troisième équation on obtient :

$$A\,[\,k\cos(ka)+q\sin(ka)\,]=0$$

Comme on veut $A\neq0$ (sinon cela entraînerait $A=B=C=0$) on obtient :

$$\boxed{qa=-\,ka\,\mathrm{cotan}(ka)}$$

2. *Déterminer $(ka)^2+(qa)^2$. La figure ci-dessous donne une représentation de l'application $x\longmapsto -x\ cotan(x)$ sur $[0,2\pi]$.*



On remarque que :

$$\boxed{(ka)^2 + (qa)^2 = \frac{2mEa^2}{\hbar^2} + \frac{2m(V_0 - E)a^2}{\hbar^2} = \frac{2mV_0\, a^2}{\hbar^2} = \text{Cste}}$$

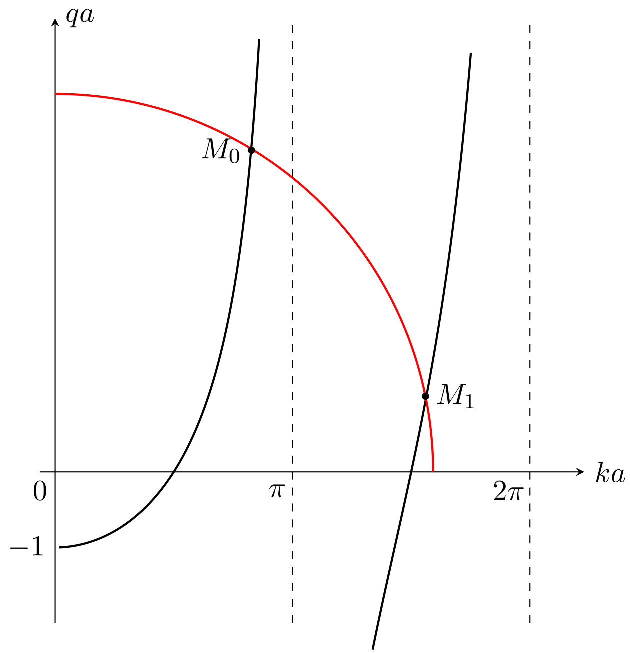
En raisonnant dans le plan (ka, qa), en déduire :

a) *Que l'énergie est quantifiée.*

Dans le plan (ka, qa), l'équation $(ka)^2+(qa)^2 = \frac{2mV_0\,a^2}{\hbar^2}$ est celle d'un cercle de centre $(0,0)$ et de rayon $\sqrt{2mV_0}a/\hbar$ (plus précisément un quart de cercle puisque $ka > 0$ et $qa > 0$).

Les solutions de l'équation $qa = -\,ka\,\text{cotan}(ka)$ sont à l'intersection de la courbe donnée par l'énoncé et de ce quart de cercle, ce qui donne une suite finie de solutions (V_0 étant fini).

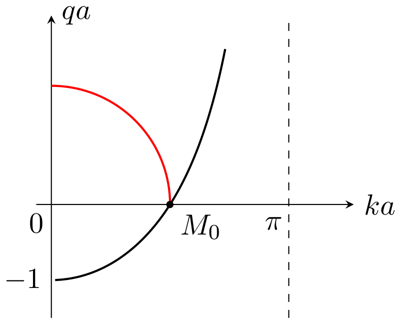
Par exemple, pour une certaine valeur de V_0 on peut obtenir les deux solutions représentées par les points M_0 et M_1 sur le graphique page suivante.



b) *La valeur minimale de a pour qu'une particule dans ce puit ait un état lié.*

Cela correspond au cas ci-dessous. Le point M_0 est de coordonnées $(\pi/2, 0)$. Le rayon du cercle est alors :

$$\sqrt{2mV_0}\,a/\hbar = \frac{\pi}{2} \quad \text{et donc} \quad \boxed{a = \frac{\pi\hbar}{2\sqrt{2mV_0}}}$$


qa
ka
0
−1
M0
π