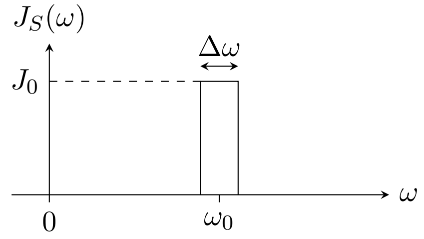
# 1 Raie à profil rectangulaire

Une source ponctuelle $S$ émet une lumière formée d'une seule raie spectrale que l'on modélise à une raie à profil rectangulaire comme indiqué ci-dessous :




avec $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$. On utilise un montage d'interférence dans lequel $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$ (les trous d'Young par exemple).

**1)** Déterminer l'intensité $I(M)$ en un point $M$ où la différence de marche est $\delta$. On exprimera $I(M)$ en fonction de $\delta$, $\lambda_0$ (longueur d'onde centrale de la raie), $\Delta\omega$, $I_s$ et $\kappa$ sous la forme :

$$I(M) = 2\kappa^2 I_S \left[1 + V(\delta)\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda_0}\right)\right]$$

où $V(\delta)$ est le facteur de visibilité des franges. Exprimer $V$ en introduisant la fonction sinus cardinal :

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

**2)** La durée de cohérence étant définie par $\tau_c = 2\pi/\Delta\omega$, que vaut $V(\delta = \ell_c)$ où $\ell_c$ est la longueur de cohérence de la lumière utilisée ? Donner l'expression de $I(M)$ en fonction de $\delta/\ell_c$.

**3)** Représenter $I$ en fonction de $\delta$.

# 2 Doublet jaune du sodium

Donnée : $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Le spectre d'émission du sodium contient deux raies quasi-monochromatiques de longueurs d'onde centrales $\lambda_a = 589{,}0$ nm et $\lambda_b = 589{,}6$ nm et de longueurs de cohérence respectives $\ell_{ca}$ et $\ell_{cb}$. C'est le doublet jaune du sodium.

On utilise une lampe à vapeur de sodium et un diaphragme circulaire pour réaliser une source ponctuelle $S$ qui éclaire le dispositif des trous d'Young.

**1)** Montrer que l'intensité lumineuse $I(M)$ en un point $M$ du champ d'interférence où la différence de marche est $\delta$ se met sous la forme $I(M) = I_a(M) + I_b(M)$.

Dans le cas particulier où $\delta \ll \min(\ell_{ca}, \ell_{cb})$ donner les expression de $I_a(M)$ et $I_b(M)$ en fonction de $\delta$. On notera $I_{Sa}$ et $I_{Sb}$ les intensités de chacune des deux raies du doublet jaune.

**2)** On suppose que $I_{Sa} = I_{Sb} = I_0$. Montrer que l'intensité lumineuse en $M$ s'écrit en fonction de $\delta$ sous la forme :

$$I(\delta) = KI_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\pi(\lambda_b - \lambda_a)}{\lambda_a\lambda_b}\,\delta\right)\cos\left(\frac{\pi(\lambda_a + \lambda_b)}{\lambda_a\lambda_b}\,\delta\right)\right]$$

où $K$ est une constante.

**3)** Déterminer les expressions et valeurs numériques des périodes $P_1$ et $P_2$ des deux fonctions :

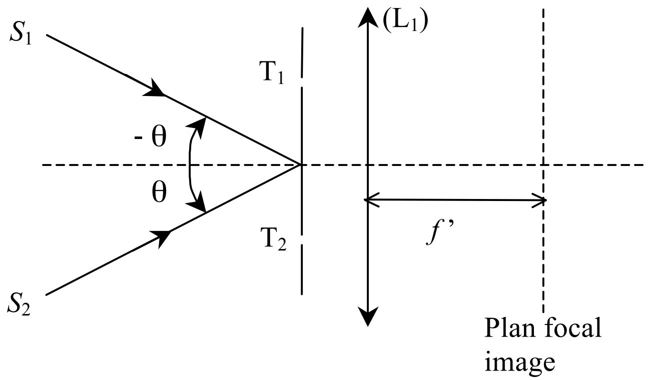
$$\delta \longmapsto \cos\left(\frac{\pi(\lambda_b - \lambda_a)}{\lambda_a\lambda_b}\,\delta\right) \text{ et } \delta \longmapsto \cos\left(\frac{\pi(\lambda_a + \lambda_b)}{\lambda_a\lambda_b}\,\delta\right)$$

En déduire l'allure de l'intensité $I$ en fonction de $\delta$.

## 3 Figure d'interférence produite par deux étoiles

L'axe optique d'une lentille mince convergente $(L_1)$, de distance focale image $f' = 1{,}0$ m, est dirigé vers le centre d'un groupe de deux étoiles très voisines $S_1$ et $S_2$ que l'on supposera ponctuelles étant donné leur éloignement. Elles émettent une lumière que l'on fait passer à traver un filtre interférentiel, ce qui produit une lumière quasi-monochromatique de longueur d'onde centrale $\lambda$ et on suppose que leurs intensité sont égales : on aura donc $I_1 = I_2 = I_0$. De plus on suppose que $|\delta| \ll \ell_c$.

On place devant $(L_1)$ un écran percé de deux trous d'épingles $T_1$ et $T_2$ dont on peut faire varier la distance $e$.




**Formulaire :** $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b)$

**1)** Montrer que, pour une valeur donnée de $e$, on observe en général des franges d'interférence rectilignes dans le plan focal image de $L_1$. Déterminer l'interfrange $i$. Application numérique : $e = 6{,}0$ mm et $\lambda = 0{,}60$ $\mu$m.

**2)** Montrer que les franges d'interférence disparaissent pour certaines valeurs de $e$. La plus petite distance entre $T_1$ et $T_2$ pour laquelle les franges disparaissent est $e_m = 52$ mm. Quelle est la distance angulaire $\varepsilon = 2\theta$ entre les deux étoiles ?

## 4 Trous d'Young et source étendue

**Formulaire :** $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

Deux trous d'Young $\mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_2$ sont percés dans un écran opaque et sont distants de $a$. L'espace est rapporté à un repère $(Oxyz)$ où $O$ est le milieu de $\mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_2$, $(Ox)$ l'axe défini par $\mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_2$ et $(Oz)$ l'axe perpendiculaire à l'écran opaque dans lequel sont percés les deux trous.

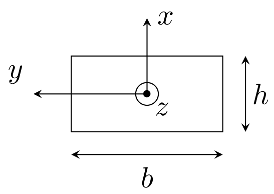
Le dispositif est éclairé par une source ponctuelle $S$, émettant une lumière formée d'une seule raie quasi-monochromatique de longueur d'onde centrale $\lambda$ et placée dans un plan $(P)$ orthogonal à $Oz$ et situé à la distance $d$ devant le plan des deux trous : les coordonnées de $S$ sont donc $(x_S, y_S, -d)$. On supposera que $|x_S| \ll d$, $|y_S| \ll d$ et $a \ll d$.

On observe la figure d'interférence sur un écran (E) placé à une distance $D$ du plan des deux trous, en un point $M(x, y, D)$, tel que $|x| \ll D$, $|y| \ll D$ et $a \ll D$.

**1)** Compte tenu des hypothèses, déterminer l'expression approchée de la différence de marche $\delta(M)$ entre les deux rayons qui interfèrent en $M$, en fonction de $x$, $x_s$ et des paramètres du montage.

**2)** On suppose que $|\delta| \ll \ell_c$. Quelle est l'expression de l'intensité $I(M)$. Où est située la frange brillante d'ordre $p = 0$ ? Quelle est l'expression de l'interfrange $i$ ?

**3)** .




La source est maintenant étendue $(D)$ et en forme de fente rectangulaire de largeur $b$ et de hauteur $h$ comme indiqué sur la figure ci-dessous.

On admet que chaque petit élément de surface $\mathrm{d}x_S\mathrm{d}y_S$ centré autour d'un point $S$ de coordonnées $(x_S, y_S, -d)$ de cette source étendue se comporte comme une source ponctuelle qui émet une intensité $\delta I_S = K\,\mathrm{d}x_S\,\mathrm{d}y_s$ où $K$ est une constante qui ne dépend pas de la position de $S$.

Calculer l'intensité totale $I(M)$ résultant au point $M$ des contributions de tous les points constituant la fente source et la mettre sous la forme :

$$I(M) = I_0\left[1 + V\cos\left(\frac{2\pi a x}{\lambda D}\right)\right]$$

où $I_0$ est une constante. Déterminer l'expression du facteur $V$ en fonction de $a$, $h$, $\lambda$ et $d$.

**4)** Calculer le contraste $C$ défini par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

en fonction de $V$. Donner un ordre de grandeur de $h$ au delà duquel l'intensité sur l'écran devient uniforme. Application numérique avec $a = 0{,}1$ mm, $d = 50$ cm et $\lambda = 546$ nm.

# 5 Mesure d'une durée de cohérence

**Donnée** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(\xi u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \pi\,e^{-|\xi|}$$

On éclaire un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air d'épaisseur $e$ avec une source ponctuelle émettant une lumière constituée d'une raie quasi-monochromatique lorentzienne, caractérisée par sa densité spectrale en fréquence :

$$\forall\,\nu \geqslant 0,\ \ J(\nu) = \frac{J_0}{1 + \left(\frac{\nu-\nu_0}{\nu_c}\right)^2}$$

où $\nu_0$, $J_0$ et $\nu_c \ll \nu_0$ sont des constantes positives.

**1)** Faire un graphique rapide du profil spectral et déterminer sa largueur à mi-hauteur $\Delta\nu$ en fonction de $\nu_c$. En déduire le temps de cohérence $\tau_c$ et la longueur de cohérence $\ell_c$ de cette lumière.

**2)** On place dans l'espace de sortie de l'interféromètre une lentille convergente et on place un détecteur ponctuel en $F'$, foyer image de la lentille. Ce détecteur mesure l'intensité lumineuse $I(F')$. Déterminer $I(F')$ en fonction de $e$.

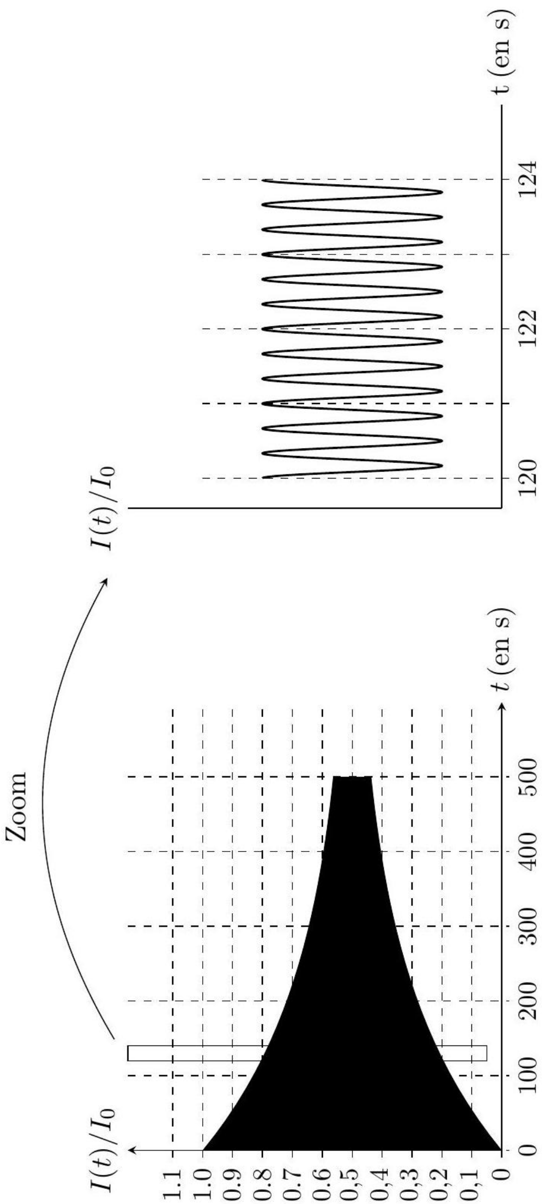
**3)** Un moteur électrique permet de déplacer lentement le miroir $(M_1)$ de l'interféromètre de sorte que l'épaisseur optique $e$ dépend du temps selon la loi : $e(t) = Vt$ où la vitesse $V > 0$ est constante.

Montrer que l'intensité $I(t)$ détectée par la photodiode en fonction du temps peut se mettre sous la forme :

$$I(t) = \frac{I_0}{2}\left[1 + e^{-t/\tau}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right]$$

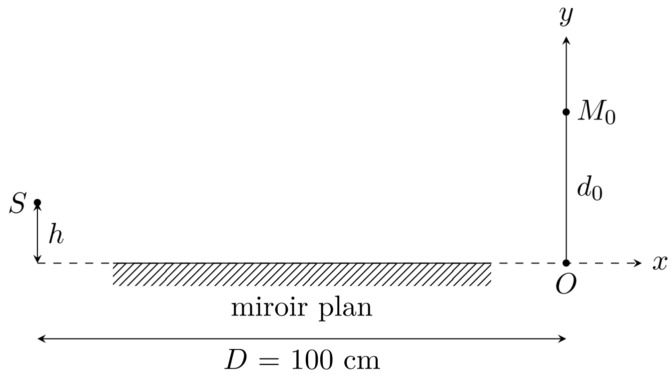
où $I_0$ est l'intensité émise par la source. Déterminer la constante de temps $\tau$ et la période $T$ en fonction de $\tau_c$, $\nu_0$, $V$ et $f'$.

**4)** Un enregistrement de l'intensité lumineuse $I(t)$ a été réalisé sur une durée totale de 500 s et il a fourni le résultat donné sur les deux figures page suivante, pour une vitesse $V = 11{,}7\ \mu$m.min$^{-1}$. En déduire $\nu_0$ et $\tau_c$.




## 6 Spectre cannelé

On éclaire un miroir de Lloyd avec une source ponctuelle $S$ située à une distance $h = 0{,}25$ mm du plan du miroir et qui émet une lumière blanche dont le spectre contient toutes les longueurs d'onde comprises entre 400 nm et 700 nm. En plaçant le point d'entrée d'un spectromètre en un point $M_0$ situé à une distance $d_0 = 6$ mm du point $O$ sur l'axe $Oy$, on observe un spectre cannelé.




**1)** Déterminer la différence de marche $\delta(M_0)$ entre les deux rayon lumineux qui interfèrent en $M_0$. L'indice de l'air sera pris égal à 1.

**2)** Quel est le nombre de cannelures sombres ainsi que les longueurs d'onde associées ?