

**Loi de Faraday. Inductances des circuits filiformes**

**Table des matières**

<b>I. Loi de Faraday</b>	<b>1</b>
1) Le problème physique étudié . . . . .	1
2) Loi de Faraday . . . . .	2
a) Cas d'une simple spire conductrice . . . . .	2
b) Cas d'un circuit série quelconque . . . . .	4
<b>II. Inductances des circuits filiformes</b>	<b>6</b>
1) Inductance propre d'un circuit série . . . . .	6
2) Inductance mutuelle entre deux circuits série . . . . .	8
a) Définition . . . . .	8
b) Loi de Faraday . . . . .	9
3) Propriétés des inductances . . . . .	9
4) Loi d'addition des inductances . . . . .	10
a) Cas de l'inductance propre . . . . .	10
b) Loi d'addition des inductances mutuelles . . . . .	11
c) Application à une bobine . . . . .	12
<b>III. Solutions des exercices</b>	<b>16</b>

*On étudie ici le phénomène d'induction électromagnétique dans le cas de circuits immobiles dans le référentiel d'étude et plongés dans un champ magnétique qui dépend du temps. Il s'agit de l'un des deux cas de l'induction électromagnétique : le cas de Neumann. L'autre cas (cas de Lorentz) ne sera pas abordé ici.*

8 exercices sont donnés au fur et à mesure. Les solutions sont en fin de document.

**I. Loi de Faraday**

**1) Le problème physique étudié**

Nous allons étudier un circuit électrique, c'est à dire un ensemble de dipôles électrocinétiques reliés par des fils de connexion (en pratique ce sont des fils de cuivre), placé dans un champ magnétique qui dépend du temps. Ce circuit est supposé immobile dans le référentiel d'étude ( $\mathcal{R}$ ) muni d'un repère d'espace ( $Oxyz$ ).

On suppose en outre que tous les points du circuit sont dans la zone A.R.Q.S. (c'est à dire la région de l'espace où s'applique l'approximation des régimes quasistationnaires). L'équation de Maxwell-Ampère est donc simplifiable en :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \tag{1}$$

ce qui entraîne :

$$\text{div } \vec{j} = \text{div} \left( \frac{\text{rot } \vec{B}}{\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} \text{div} (\text{rot } \vec{B}) = 0$$

par identité remarquable. Ainsi :

*Le vecteur densité de courant est à flux conservatif en tout point du circuit électrique étudié.*

Sachant qu'un fil de connexion canalise les lignes de courant de  $\vec{j}$ , cette propriété a pour conséquence que si on considère deux sections droites ( $S_1$ ) et ( $S_2$ ) dans un fil de connexion, orientées de la même façon (faces - et + "identiques", cf. figure 1) alors en posant :

$$i_1(t) = \Phi(\vec{j}/S_1) \quad \text{et} \quad i_2(t) = \Phi(\vec{j}/S_2)$$

on a, pour tout  $t$  :

$$\Phi(\vec{j}/S_1) = \Phi(\vec{j}/S_2) \quad \text{donc} \quad \boxed{i_1(t) = i_2(t)} \tag{2}$$

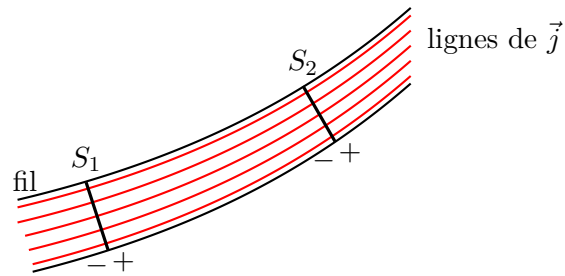


FIGURE 1 – Un fil de connexion canalise les lignes de courant électrique. La conservation du flux de  $\vec{j}$  entraîne l'égalité de l'intensité électrique qui traverse chaque section du fil.

L'intensité électrique est donc conservée le long d'un fil de connexion et on la note  $i(t)$ .

D'autre part, on rappelle que la flèche du courant  $\vec{i}(t)$  représente l'orientation des sections du fil de connexion (elle est dirigée de la face – vers la face + de chaque section).

Lorsque la section  $S$  de chaque section est très petite (ce qui est très souvent le cas) on peut faire l'approximation filiforme pour exprimer  $\vec{j}$  dans le fil :  $\vec{j}$  est uniforme sur chaque section et il est orthogonal à chaque section. On en déduit que :

$$\boxed{\vec{j}(P, t) = \frac{i(t)}{S} \vec{u}_T(P)} \quad (3)$$

où  $\vec{u}_T(P)$  est le vecteur unitaire tangent au fil au point  $P$  (c'est aussi le vecteur unitaire orthogonal à la section droite du fil passant par  $P$ ), orienté dans le sens de la flèche du courant (figure 2).

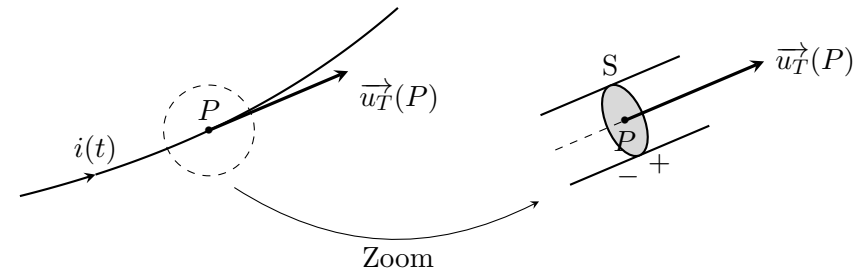


FIGURE 2 – Définition et orientation du vecteur unitaire  $\vec{u}_T$ .

## 2) Loi de Faraday

### a) Cas d'une simple spire conductrice

Considérons le circuit électrique le plus simple possible : une spire conductrice, c'est à dire un simple fil conducteur fermé sur lui-même.

La spire est supposée immobile dans le référentiel d'étude ( $\mathcal{R}$ ) et elle est plongée dans un champ magnétique qui dépend du temps (et de l'espace dans le cas général)  $\vec{B}(M, t)$ <sup>1</sup> (figure 3).

Les courants variables qui créent  $\vec{B}$  créent aussi un champ électrique variable  $\vec{E}$  relié à  $\vec{B}$  par l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

L'existence de  $\vec{E}$  met en mouvement les électrons de conduction dans la spire, ce qui crée un courant  $i(t)$ , appelé *courant induit*.

On suppose que le matériau qui constitue le fil est ohmique, de conductivité électrique  $\gamma$ . La densité de courant  $\vec{j}$  dans le fil vérifie

1. L'origine de ce champ magnétique sera discutée plus loin.

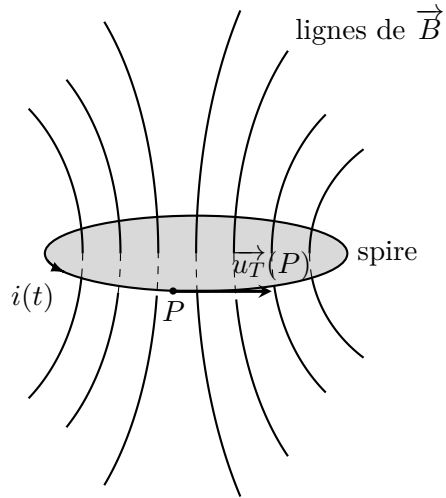


FIGURE 3 – Une simple spire conductrice placée dans un champ magnétique qui dépend du temps.

donc la loi d'Ohm locale :

$$\boxed{\vec{j}(P, t) = \gamma \vec{E}(P, t) \quad \text{avec} \quad \vec{j}(P, t) = \frac{i(t)}{S} \vec{u}_T(P)} \quad (4)$$

où  $P$  est un point de la spire et où  $S$  est l'aire de la section du fil.

Ce fil constitue une courbe fermée  $(\mathcal{C})$  **orientée par la flèche du courant**, qui délimite une surface  $(\Sigma)$  **orientée par la règle de la main droite**. On note  $P$  un point de  $(\mathcal{C})$  et  $N$  un point de  $(\Sigma)$  (figure 4).

En calculant la circulation de  $\vec{E}$  le long de la courbe  $(\mathcal{C})$  nous obtenons :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{\gamma} \vec{j}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \oint_{\mathcal{C}} \frac{i(t)}{\gamma S} \vec{u}_T(P) \cdot d\vec{\ell}_P$$

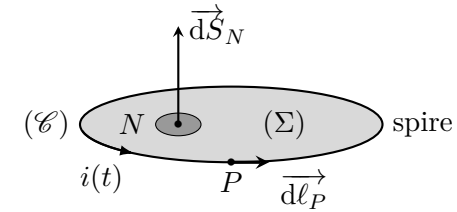


FIGURE 4 – Paramétrage géométrique de la spire.

Comme  $d\vec{\ell}_P = dl_P \vec{u}_T(P)$ , nous obtenons finalement ;

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \frac{i(t)}{\gamma S} \oint_{\mathcal{C}} dl_P = \frac{\ell}{\gamma S} i(t) \quad (5)$$

où  $\ell$  est la longueur totale du fil qui constitue la spire conductrice. On reconnaît dans le facteur multiplicatif de  $i(t)$  la *résistance électrique* de la spire :

$$\boxed{R \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\ell}{\gamma S}} \quad (6)$$

ce qui fait que l'équation (5) s'écrit :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = R i(t)$$

Transformons maintenant le premier membre de l'équation précédente en utilisant le théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{E}(N, t) \cdot d\vec{S}_N = - \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(N, t) \cdot d\vec{S}_N$$

Comme la spire est immobile dans  $(\mathcal{R})$  et donc la surface  $(\Sigma)$  aussi, on admet qu'il est légitime de permuter l'intégrale et la dérivée par

rapport au temps. On obtient donc :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = - \frac{d}{dt} \left\{ \iint_{\Sigma} \vec{B}(N, t) \cdot d\vec{S}_N \right\} = - \frac{d\Phi(\vec{B}/\Sigma)}{dt}$$

où  $\Phi(\vec{B}/\Sigma)$  est le flux du champ magnétique (qu'on appelle aussi plus simplement flux magnétique) à travers la surface ( $\Sigma$ ).

Finalement l'équation (5) peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{- \frac{d\Phi(\vec{B}/\Sigma)}{dt} = R i(t)} \quad (7)$$

La grandeur

$$\boxed{e(t) \stackrel{\text{déf}}{=} - \frac{d\Phi(\vec{B}/\Sigma)}{dt}} \quad (8)$$

s'appelle *force électromotrice induite* dans la spire par le champ magnétique variable. Elle est homogène à une tension et s'exprime donc en Volts dans le S.I.

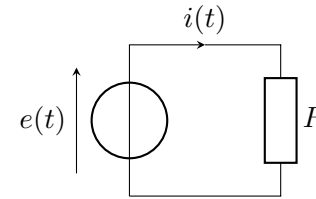
Les équations (8) et (7) peuvent être décrites par un dessin qu'on appelle schéma électrocinétique équivalent de la spire (figure 5) : tout se passe comme si la spire contenait un générateur idéal de tension de force électromotrice (f.é.m.)  $e(t)$  en série avec une résistance  $R$  : c'est la loi de Faraday.

**Loi de Faraday (cas d'une spire)**

Les effets d'un champ magnétique variable sur une spire conductrice sont équivalents à un générateur idéal de tension de f.é.m.

$$e(t) = - \frac{d\Phi(\vec{B}/\Sigma)}{dt}$$

qui serait placé dans la spire.



Une loi des mailles conduit en effet directement à l'équation :  $e(t) = R i(t)$

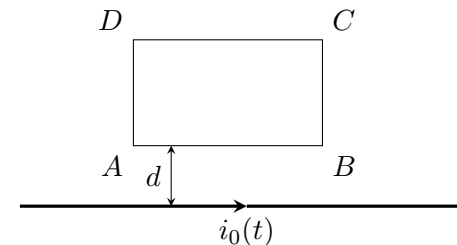
FIGURE 5 – Schéma électrocinétique équivalent de la spire placée dans un champ magnétique variable.

**Attention :**

Dans le schéma électrocinétique équivalent, la flèche de la force électromotrice  $e(t)$  doit toujours être dans le même sens que la flèche du courant  $i(t)$ .

**Exercice 1 : force électromotrice induite dans un cadre**

Un fil rectiligne infini est parcouru par un courant électrique d'intensité  $i_0(t)$ . Calculer la f.é.m.  $e(t)$  induite dans un cadre rectangulaire conducteur  $ABCD$  de côtés  $AB = a$ ,  $BC = b$ , immobile et situé à la distance  $d$  du fil.



**b) Cas d'un circuit série quelconque**

La loi de Faraday se généralise à un circuit électrique quelconque à condition que celui-ci ne contienne qu'une seule branche (on parle

alors de circuit série) et que la surface ( $\Sigma$ ) qu'il délimite soit définie sans ambiguïté. Le circuit est formée d'une association en série de plusieurs dipôles, qui peuvent être de toute nature : générateurs, résistors, condensateurs, ... **mais aucune inductance** : le cas des inductances sera traité plus loin. Cela signifie en particulier que si le circuit contient une bobine alors dans ce qui suit, elle sera seulement assimilée à un fil ayant une résistance ohmique mais sans plus.

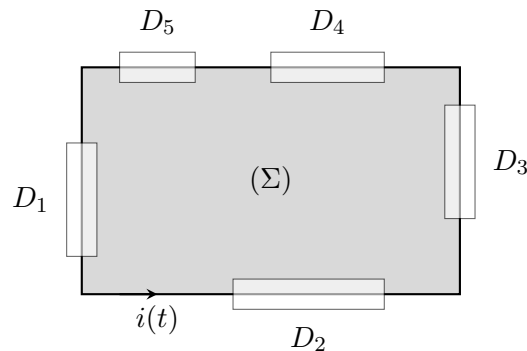


FIGURE 6 – Cas d'un circuit électrique série quelconque contenant plusieurs dipôles électriques  $D_1, D_2, \dots$ . La surface ( $\Sigma$ ) délimitée par le circuit est en gris.

### Loi de Faraday (cas d'un circuit série)

Lorsqu'un circuit série est plongé dans un champ magnétique dépendant du temps  $\vec{B}$ , tout se passe comme si, en plus des dipôles ( $D_k$ ) déjà présents dans le circuit, il existait un générateur idéal de tension de f.é.m.  $e(t)$  appelée *force électromotrice induite* (par le champ magnétique) et dont l'expression est :

$$e(t) = - \frac{d\Phi(\vec{B}/\Sigma)}{dt}$$

où ( $\Sigma$ ) est la surface délimitée par le circuit.

#### Remarques :

- Le circuit est assimilé à une courbe fermée ( $\mathcal{C}$ ) **orientée par la flèche du courant**.
- La surface ( $\Sigma$ ) est orientée par la règle de la main droite.
- $\Phi(\vec{B}/\Sigma)$  est le *flux magnétique* à travers la surface du circuit.

La figure 7 représente le schéma électrocinétique équivalent complet du circuit, compte-tenu de l'existence de cette force électromotrice.

On peut aussi y faire figurer en série avec les autres dipôles un résistor ohmique qui tient compte de la résistance électrique  $R_{\text{fils}}$  des fils de connexion. Toutefois, cette résistance additionnelle est souvent négligeable (de l'ordre de  $0,1 \Omega$ ) si d'autres résistances bien plus importantes sont déjà dans le circuit.

#### Remarque très importante :

*La flèche de la f.é.m. induite doit toujours être dans le même sens que la flèche du courant.*

### Exercice 2 : courant induit dans un circuit RC

Un circuit rectangulaire de dimension  $a \times b$  et contenu dans le plan ( $Oxy$ ) est constitué d'une résistance  $R$  en série avec un condensateur

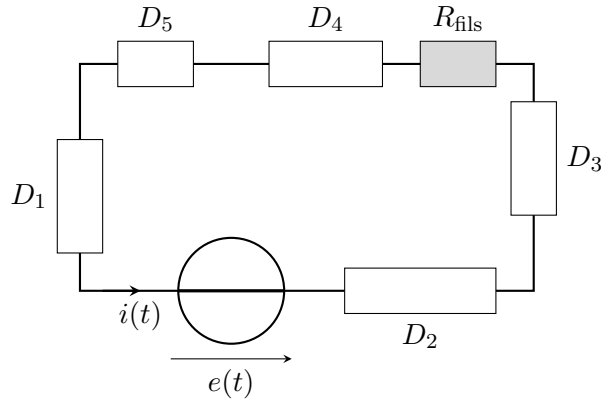
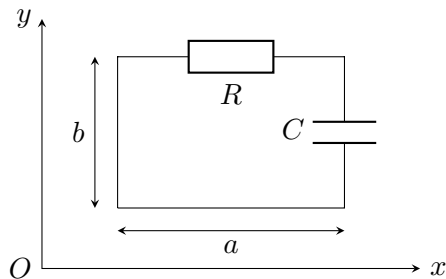


FIGURE 7 – Schéma électrocinétique équivalent au circuit électrique placé dans un champ magnétique qui dépend du temps. Un résistor additionnel peut y être mis en série avec les autres dipôles pour tenir compte de la résistance des fils de connexion.

de capacité  $C$ . Le condensateur est initialement déchargé. Un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B(t) \vec{e}_z$  est appliqué à partir de l'instant  $t = 0$ . Déterminer le courant induit  $i(t)$  dans le circuit pour  $t \geq 0$  :



- 1) Dans le cas où  $B(t) = B_0 \frac{t}{\tau_b}$  avec  $\tau_b > 0$  (constante de temps).
- 2) Dans le cas où  $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$ .

## II. Inductances des circuits filiformes

### 1) Inductance propre d'un circuit série

Dans la section précédente nous n'avons pas discuté de l'origine du champ magnétique  $\vec{B}$  dans lequel est placé le circuit série. De plus nous avons explicitement exclu les inductances de notre étude. Le moment est venu d'aborder cette question.

En général,  $\vec{B}$  est la somme de deux champs magnétiques :

- D'une part le champ magnétique créé par le courant  $i(t)$  qui circule dans le circuit série. On l'appelle *champ magnétique propre* du circuit et on le note  $\vec{B}_p$ . Il est proportionnel au courant  $i(t)$  :

$$\vec{B}_p(M, t) = \vec{K}(M) i(t)$$

où  $\vec{K}(M)$  est un champ vectoriel qui ne dépend que des coordonnées d'espace mais pas de l'intensité  $i(t)$ , ni du temps.

Le flux magnétique de ce champ propre à travers la surface ( $\Sigma$ ) du circuit est appelé *flux magnétique propre* et on le note  $\Phi_p(t)$ . On a donc :

$$\Phi_p(t) = \iint_{\Sigma} \vec{B}_p(N, t) \cdot d\vec{S}_N = \left\{ \iint_{\Sigma} \vec{K}(N) \cdot d\vec{S}_N \right\} i(t)$$

où  $N$  est un point de la surface ( $\Sigma$ ). On remarque donc que  $\Phi_p$  est proportionnel à  $i(t)$ . Par définition, le facteur de proportionnalité est l'*inductance propre du circuit*, notée  $L$  :

$$L \stackrel{\text{déf}}{=} \iint_{\Sigma} \vec{K}(N) \cdot d\vec{S}_N \quad \text{donc} \quad \boxed{\Phi_p(t) = L i(t)} \quad (9)$$

$L$  est une grandeur proportionnel à  $\mu_0$ , dépend de la géométrie de la spire et on démontre qu'elle est toujours strictement positive :  $L > 0$ . Son unité dans le S.I. est le Henry : symbole  $H$ .

- D'autre part il existe aussi éventuellement un champ magnétique créé par d'autres sources que le circuit : aimants, autres circuits électriques placés dans le voisinage du circuit étudié. On note  $\vec{B}_{\text{autre}}$  le champ magnétique créé par ces sources et  $\Phi_{\text{autre}}$  le flux magnétique associé :

$$\Phi_{\text{autre}}(t) = \iint_{\Sigma} \vec{B}_{\text{autre}}(N, t) \cdot \vec{dS}_N \quad (10)$$

Le flux magnétique total  $\Phi$  à travers la surface ( $\Sigma$ ) du circuit série est donc la somme :

$$\Phi(t) = \Phi_p(t) + \Phi_{\text{autre}}(t)$$

et la force électromotrice induite est donc la somme :

$$e(t) = - \frac{d\Phi_p}{dt} - \frac{d\Phi_{\text{autre}}}{dt}$$

- La force électromotrice propre aussi appelée *force électromotrice auto-induite* du circuit est :

$$e_p(t) = - \frac{d\Phi_p}{dt} = -L \frac{di}{dt} \quad (11)$$

- La force électromotrice induite par les autres sources de champ magnétique est :

$$e_{\text{autre}}(t) = - \frac{d\Phi_{\text{autre}}}{dt} \quad (12)$$

La force électromotrice induite dans le circuit série est donc la somme :

$$e(t) = e_p(t) + e_{\text{autre}}(t) = -L \frac{di}{dt} + e_{\text{autre}}(t) \quad (13)$$

L'équation (13) donne lieu à l'un des deux schémas électrocinétiques équivalents d'un circuit série qui contient déjà des dipôles électrocinétiques non inductifs ( $D_1$ ), ( $D_2$ ), ..., etc... (figure 8)

### Schéma a)

Deux générateurs de tension idéaux et de f.é.m. respectives  $e_p(t)$  et  $e_{\text{autre}}(t)$  sont insérés dans le circuit série (les flèches des f.é.m. étant dans le même sens que la flèche du courant). On y a ajouté une résistance  $R_{\text{fils}}$  pour tenir compte éventuellement de la résistance des fils de connexion.

La loi des mailles donne :

$$e_p + e_{\text{autre}} + u_1 + u_2 + u_3 + u_R = 0 \quad \text{avec} \quad u_L = -L \frac{di}{dt}$$

et donc :

$$-L \frac{di}{dt} + e_{\text{autre}} + u_1 + u_2 + u_3 + u_R = 0$$

### Schéma b)

Un seul générateur de tension idéal et de f.é.m.  $e_{\text{autre}}(t)$  a été inséré. On tient compte de la f.é.m. auto-induite grâce à l'inductance propre  $L$  du circuit placée en série.

La loi des mailles donne :

$$u_L + e_{\text{autre}} + u_1 + u_2 + u_3 + u_R = 0$$

donc

$$-L \frac{di}{dt} + e_{\text{autre}} + u_1 + u_2 + u_3 + u_R = 0$$

*Bien sûr les deux schémas sont équivalents et conduisent à la même équation. Il faut cependant faire attention à ne pas mélanger les éléments des deux schémas : on travaille soit avec l'un, soit avec l'autre.*

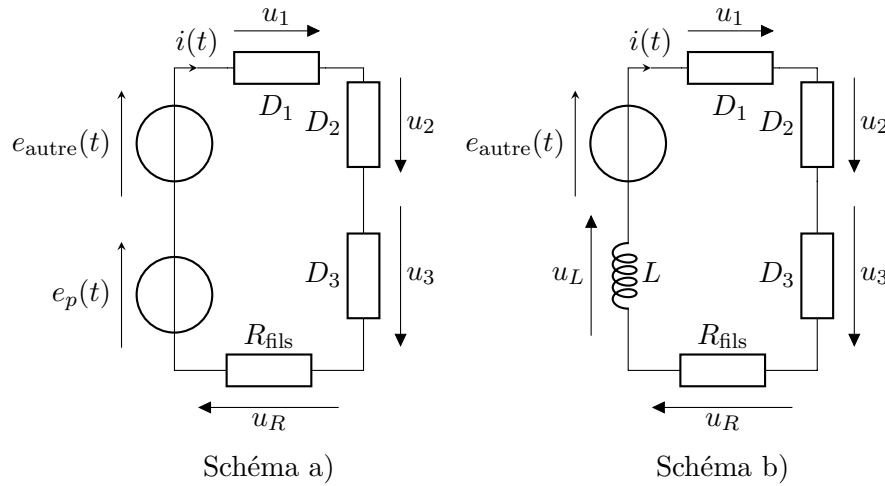
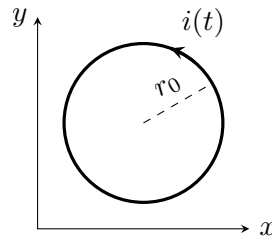


FIGURE 8 – Les deux schémas électrocinétiques équivalents d'un circuit série plongé dans un champ magnétique variable. **Schéma a)** Deux générateur idéaux de tension en série avec les f.é.m. induites  $e_p$  et  $e_{\text{autre}}$ . **Schéma b)** Un seul générateur idéal de tension de f.é.m.  $e_{\text{autre}}$  en série avec une inductance  $L$  qui est l'inductance propre du circuit.

**Exercice 3**

Un anneau métallique circulaire de rayon  $r_0$  possède une résistance  $R$  et une inductance propre  $L$ . Il est contenu dans le plan  $(Oxy)$ . On le soumet à partir de l'instant  $t = 0$  à un champ magnétique  $\vec{B}_{\text{autre}} = B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z$  uniforme.

Déterminer l'intensité  $i(t)$  dans l'anneau, en régime sinusoïdale forcé.



**2) Inductance mutuelle entre deux circuits série**

**a) Définition**

Considérons maintenant deux circuits série représentés respectivement par deux courbes fermées  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  orientées par leurs flèches des courants et parcourues par des courants électriques d'intensité  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ . Chaque circuit délimite une surface :  $(\Sigma_1)$  pour  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\Sigma_2)$  pour  $(\mathcal{C}_2)$  (surfaces orientées par la règle de la main droite).

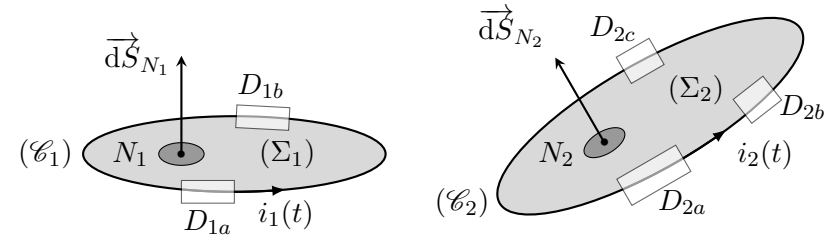


FIGURE 9 – Deux circuits série en influence magnétique mutuelle.

En un point  $M$  et à l'instant  $t$ , on note :

- $\vec{B}_1(M, t)$  le champ magnétique créé par  $(\mathcal{C}_1)$  ;
- $\vec{B}_2(M, t)$  le champ magnétique créé par  $(\mathcal{C}_2)$ .

On définit les flux magnétiques :

$$\Phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\Sigma_2} \vec{B}_1(N_2, t) \cdot d\vec{S}_{N_2} \quad \text{et} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{\Sigma_1} \vec{B}_2(N_1, t) \cdot d\vec{S}_{N_1} \tag{14}$$

De façon imagée, on dit que  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  est le *flux magnétique envoyé* par le circuit  $(\mathcal{C}_1)$  à travers la surface du circuit  $(\mathcal{C}_2)$ . De même,  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  est le *flux magnétique envoyé* par le circuit  $(\mathcal{C}_2)$  à travers la surface du circuit  $(\mathcal{C}_1)$ .

Comme  $\vec{B}_1$  est proportionnel à  $i_1(t)$  et  $\vec{B}_2$  est proportionnel à  $i_2(t)$  on peut écrire :

$$\boxed{\Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{21} i_1(t) \quad \text{et} \quad \Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{12} i_2(t)} \quad (15)$$

Les deux coefficients  $M_{12}$  et  $M_{21}$  s'appellent *inductances mutuelles entre les deux circuits*. Ce sont des coefficients qui sont proportionnels à  $\mu_0$ , qui dépendent de la forme de chaque circuit ainsi que de la position relative d'un circuit par rapport à l'autre.

Contrairement à l'inductance propre  $L$  qui est toujours positive, les inductances mutuelles peuvent être positives ou bien négatives : cela dépend des orientations des deux circuits, c'est à dire du sens de la flèche du courant dans les deux circuits.

### b) Loi de Faraday

Les deux flux  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  et  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$  variables dans le temps produisent des forces électromotrices induites dont l'expression est donnée par la loi de Faraday :

$$\boxed{e_1 = - \frac{d\Phi_{2 \rightarrow 1}}{dt} = - M \frac{di_2}{dt} \quad \text{dans} \quad (\mathcal{C}_1)} \quad (16)$$

et

$$\boxed{e_2 = - \frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt} = - M \frac{di_1}{dt} \quad \text{dans} \quad (\mathcal{C}_2)} \quad (17)$$

Du point de vue électrocinétique, tout se passe comme si le circuit ( $\mathcal{C}_1$ ) (resp. le circuit ( $\mathcal{C}_2$ )) contenait, en plus des dipôles déjà présents, un générateur idéal de tension de force électromotrice  $e_1$  (resp.  $e_2$ ).

On peut donc dresser les schémas électrocinétiques équivalents des deux circuits (figure 10),  $e_1$  (resp.  $e_2$ ) jouant le rôle du  $e_{\text{autre}}$  de la partie 1).

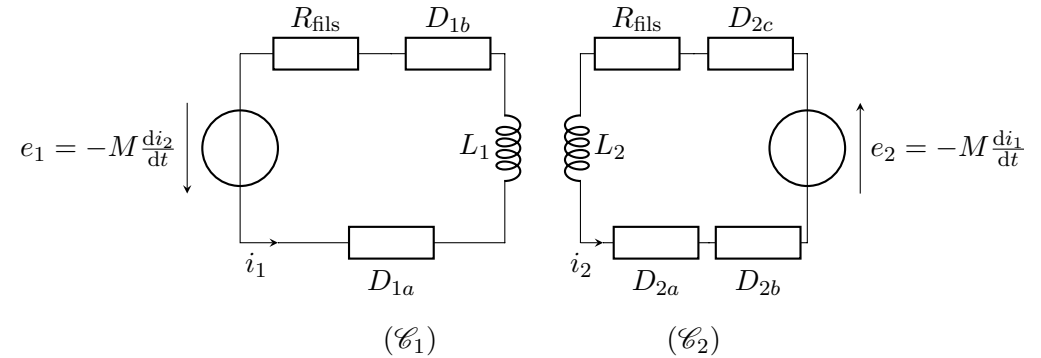


FIGURE 10 – Schéma électrocinétique équivalent des deux circuits.

### Remarques :

- Les flèches des f.é.m.  $e_1$  et  $e_2$  sont orientées dans le même sens que les flèches des courants.
- On a placé les deux inductances propres  $L_1$  et  $L_2$  dans chaque circuit pour tenir compte de l'auto-induction.
- On a de plus inséré deux résistances  $R_{\text{fils}}$  dans chaque circuit pour tenir compte de la résistance des fils de connexion. Dans la très grande majorité des cas cette résistance est négligeable devant les autres résistances des circuits.

### 3) Propriétés des inductances

On démontre et nous admettrons les deux propriétés suivantes. Soient ( $\mathcal{C}_1$ ) et ( $\mathcal{C}_2$ ) deux circuits séries d'inductances propres respectives  $L_1$  et  $L_2$  et d'inductances mutuelles  $M_{12}$  et  $M_{21}$  :

1. Symétrie :

$$\boxed{M_{12} = M_{21} \stackrel{\text{noté}}{=} M} \quad (18)$$

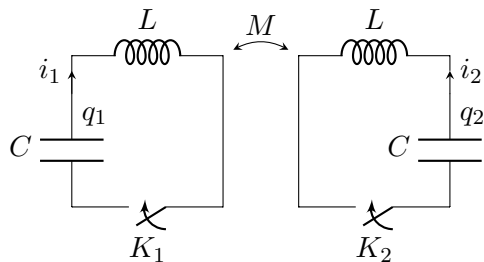
2. Couplage :

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2} \tag{19}$$

Le coefficient  $k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$ , sans dimension et tel que  $k \in [-1, 1]$  est appelé *coefficient de couplage magnétique des deux circuits*.

**Exercice 4 : Circuits couplés par une inductance mutuelle**

Deux circuits ont la même inductance propre  $L$  et une inductance mutuelle  $M > 0$ . On suppose que le coefficient de couplage magnétique est tel que  $0 < k < 1$ . Les circuits contiennent deux condensateurs de même capacité  $C$ . On néglige les résistances totales des deux circuits. Pour  $t < 0$  les deux condensateurs sont déchargés et les courants sont nuls dans chaque circuit. Les deux interrupteurs  $K_1$  et  $K_2$  sont fermés de façon instantanée à l'instant  $t = 0$ .



- 1) Écrire le système d'équations différentielles auxquelles satisfont les charges  $q_1$  et  $q_2$  des armatures supérieures des deux condensateurs, pour  $t > 0$ .
- 2) Résoudre ce système et donner pour  $t > 0$  l'expression de  $q_1(t)$  et de  $q_2(t)$  avec les conditions initiales suivantes :  $q_1(0) = Q_0$  ;  $q_2(0) = 0$  ;  $i_1(0) = i_2(0) = 0$ .

4) Loi d'addition des inductances

a) Cas de l'inductance propre

Considérons un circuit série parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$  et assimilé à une courbe fermée ( $\mathcal{C}$ ) orientée par la flèche du courant. Ce circuit contient des dipôles  $D_1, D_2, \dots$  de nature quelconque. Il délimite une surface ( $\Sigma$ ).

Plaçons  $n$  points  $P_1, P_2, \dots, P_n = P_1$  sur ce circuit tous distincts deux à deux, sauf le dernier  $P_n$  confondu avec  $P_1$ , et rangés dans le sens de la flèche du courant (figure 11). Cela permet de définir  $n - 1$  tronçons  $[P_k; P_{k+1}]$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ .

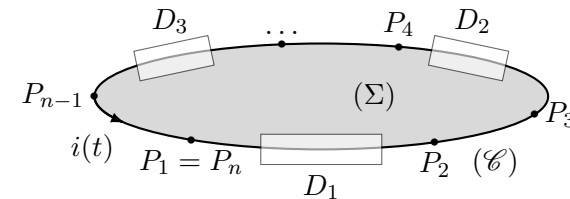


FIGURE 11 – Découpage d'un circuit série assimilé à une courbe fermée ( $\mathcal{C}$ ) en  $n - 1$  tronçons.

Soit  $\vec{B}_p$  le champ magnétique propre de ce circuit et  $\vec{A}_p$  le potentiel vecteur magnétique associé à  $\vec{B}_p$  :

$$\vec{B}_p = \text{rot } \vec{A}_p$$

Le potentiel vecteur magnétique est hors programme mais on va l'utiliser pour démontrer une propriété intéressante de l'inductance propre  $L$  : la **propriété d'additivité**.

Grâce au théorème de Stokes :

$$\begin{aligned} L i(t) &= \Phi_p = \iint_{\Sigma} \vec{B}_p(N, t) \cdot d\vec{S}_N \\ &= \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{A}_p(N, t) \cdot d\vec{S}_N = \oint_{\mathcal{C}} \vec{A}_p(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P \end{aligned}$$

où  $N$  est un point de  $(\Sigma)$  et  $P$  un point de  $(\mathcal{C})$ . Or la circulation de  $\vec{A}_p$  le long de  $(\mathcal{C})$  peut être "découpée" de la façon suivante :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A}_p(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{P_k, \mathcal{C}}^{P_{k+1}} \vec{A}_p(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P$$

Comme  $\vec{B}_p$  est proportionnel à  $i(t)$ , cela est aussi vrai pour  $\vec{A}_p$ . Il s'ensuit que chacune des intégrales de la somme à droite de l'égalité est proportionnelle à l'intensité électrique  $i(t)$ . On peut donc poser :

$$\int_{P_k, \mathcal{C}}^{P_{k+1}} \vec{A}_p(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = L_{k,k+1} i(t)$$

On a donc :

$$L i(t) = \sum_{k=1}^{n-1} L_{k,k+1} i(t)$$

d'où :

$$\boxed{L = \sum_{k=1}^{n-1} L_{k,k+1}} \quad (20)$$

On peut interpréter l'équation (20) en disant que  $L_{k,k+1}$  est l'inductance du tronçon de spire compris entre  $P_k$  et  $P_{k+1}$ .

L'équation (20) indique que l'inductance propre  $L$  de la spire est la somme des inductances  $L_{k,k+1}$  de chaque tronçon. C'est la **loi d'addition des inductances**.

## b) Loi d'addition des inductances mutuelles

On peut refaire le même raisonnement avec les inductances mutuelles. Considérons deux circuits série assimilés à des courbes fermées  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$ , orientées par les flèches des courants.

Au champ magnétique  $\vec{B}_2$  créé par  $(\mathcal{C}_2)$  est associé le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}_2$ . Le flux magnétique envoyé par  $(\mathcal{C}_2)$  à travers la surface  $(\Sigma_1)$  de  $(\mathcal{C}_1)$  s'écrit donc :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \iint_{\Sigma_1} \vec{B}_2(N, t) \cdot d\vec{S}_N \stackrel{\text{Stokes}}{=} \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{A}_2(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P$$

où  $N$  est un point de  $(\Sigma_1)$  et  $P$  un point de  $(\mathcal{C}_1)$ .

En découpant le circuit  $(\mathcal{C}_1)$  en  $n - 1$  tronçons  $[P_k; P_{k+1}]$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$  de sorte que  $P_n = P_1$ , on peut écrire l'intégrale de circulation sous la forme d'une somme.

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{P_k, \mathcal{C}_1}^{P_{k+1}} \vec{A}_2(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P$$

D'autre part, sachant que  $\vec{B}_2$  est proportionnel à l'intensité électrique  $i_2$  et qu'il en est de même pour  $\vec{A}_2$ , chaque terme dans la somme à droite de l'égalité est proportionnel à  $i_2$ . On a donc :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \sum_{k=1}^{n-1} M_{k,k+1}^{(12)} i_2$$

où :

$$M_{k,k+1}^{(12)} = \frac{1}{i_2} \int_{P_k, \mathcal{C}_1}^{P_{k+1}} \vec{A}_2(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P$$

La grandeur  $M_{k,k+1}^{(12)}$  est l'inductance mutuelle du tronçon de circuit  $(\mathcal{C}_1)$  compris entre  $P_k$  et  $P_{k+1}$ . En notant que  $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{12} i_2$ , on

obtient finalement :

$$M_{12} = \sum_{k=1}^{n-1} M_{k,k+1}^{(12)} \quad (21)$$

ce qui est la **loi d'addition des inductances mutuelles** pour le circuit  $(\mathcal{C}_1)$ .

On peut faire le même raisonnement pour le circuit  $(\mathcal{C}_2)$  en le découpant en  $m - 1$  tronçons. On obtient alors le résultat :

$$M_{21} = \sum_{q=1}^{m-1} M_{q,q+1}^{(21)} \quad (22)$$

### Remarque :

La propriété de symétrie  $M_{12} = M_{21}$  ne s'applique qu'aux deux inductances mutuelles totales des circuits  $(\mathcal{C}_1)$  et  $(\mathcal{C}_2)$  mais **jamais aux inductances mutuelles des tronçons** (c'est logique puisque les nombres et les tailles des tronçons peuvent être vraiment différents dans les deux circuits, sans relations les uns avec les autres).

### c) Application à une bobine

*La démonstration de la loi d'addition (pour  $L$  ou pour  $M$ ) est hors programme mais on peut très bien en utiliser le résultat. Son application la plus importante concerne les bobines.*

Considérons une bobine, c'est à dire un fil en métal enroulé sur un cylindre. Chaque tour de fil constitue ce qu'on appelle *une spire* de la bobine (figure 12).

- Cette bobine est insérée dans un circuit série  $(\mathcal{C})$  et on peut la considérer comme un tronçon du circuit : il est donc possible de parler de l'inductance de la bobine  $L_b$  et de son inductance mutuelle  $M_b$  avec un autre circuit.

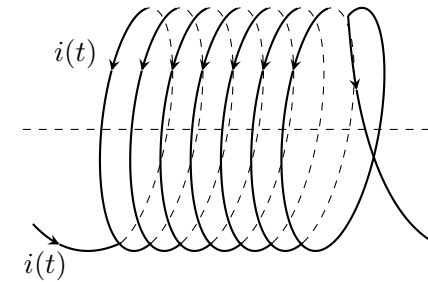


FIGURE 12 – Bobine : enroulement de fil sur un cylindre.

Si  $L$  désigne l'inductance de  $(\mathcal{C})$  et  $M$  son inductance mutuelle avec un autre circuit, alors la loi d'addition donne :

$$L = L_{\text{reste du circuit}} + L_b \quad \text{et} \quad M = M_{\text{reste du circuit}} + M_b$$

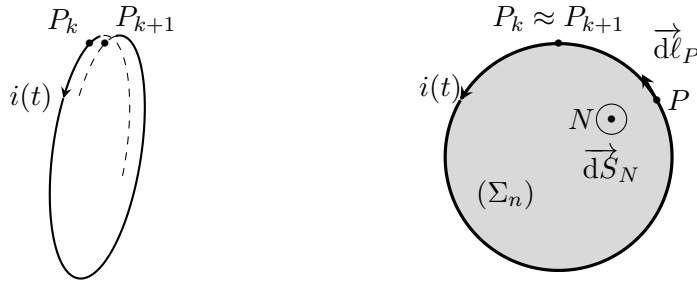
- En général, la bobine est constituée de  $N$  tours de fils (c'est à dire  $N$  spires), chaque spire étant un tronçon de fil. En numérotant les spires par un entier  $n$  on a donc par la loi d'addition :

$$L_b = \sum_{n=1}^N L_n \quad \text{et} \quad M_b = \sum_{n=1}^N M_n$$

où  $L_n$  est l'inductance de la spire  $n$  et  $M_n$  son inductance mutuelle avec un autre circuit.

- Lorsque les enroulements de fil de la bobine sont jointifs et que la section du fil est suffisamment petite, comme après avoir fait un tour on revient quasiment au même point, on peut considérer que les spires forment des courbes fermées  $(\mathcal{C}_n)$  "collées" les unes à la suite des autres (figure 13).

Chaque spire est donc une courbe fermée  $(\mathcal{C}_n)$  orientée par la flèche du courant et qui délimite une surface  $(\Sigma_n)$  orientée par la règle de la main droite.



1 spire = une courbe quasi-fermée :  $P_k \approx P_{k+1}$

Spire ( $\mathcal{C}_n$ )

FIGURE 13 – Une spire d’une bobine à spires jointives, dans l’hypothèse où la section du fil est très petite, de façon à pouvoir assimiler chaque spire à une courbe fermée.

En désignant par  $\vec{B}_p$  le champ magnétique propre du circuit ( $\mathcal{C}$ ), proportionnel à l’intensité  $i$  qui le traverse, on a donc, par définition de  $L_n$  :

$$\begin{aligned} L_n i(t) &= \oint_{\mathcal{C}_n} \vec{A}_p(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_{\Sigma_n} \text{rot } \vec{A}_p(N, t) \cdot d\vec{S}_N \\ &= \iint_{\Sigma_n} \vec{B}_p(N, t) \cdot d\vec{S}_N = \Phi(\vec{B}_p/\Sigma_n) \end{aligned}$$

ce qui entraîne :

$$L_n = \frac{1}{i} \Phi(\vec{B}_p/\Sigma_n) \quad \text{et} \quad L_b = \sum_{n=1}^N L_n = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^N \Phi(\vec{B}_p/\Sigma_n)$$

ou encore

$$\boxed{\sum_{n=1}^N \Phi(\vec{B}_p/\Sigma_n) = L_b i(t)} \quad (23)$$

De la même façon, si  $\vec{B}_2$  désigne le champ magnétique créé par l’autre circuit (ce qui crée l’inductance mutuelle  $M$ ), proportionnel à l’intensité  $i_2$  dans cet autre circuit, on a :

$$\begin{aligned} M_n i_2(t) &= \oint_{\mathcal{C}_n} \vec{A}_2(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P \stackrel{\text{Stokes}}{=} \iint_{\Sigma_n} \text{rot } \vec{A}_2(N, t) \cdot d\vec{S}_N \\ &= \iint_{\Sigma_n} \vec{B}_2(N, t) \cdot d\vec{S}_N = \Phi(\vec{B}_2/\Sigma_n) \end{aligned}$$

et donc :

$$M_n = \frac{1}{i_2} \Phi(\vec{B}_2/\Sigma_n) \quad \text{et} \quad M_b = \sum_{n=1}^N M_n = \frac{1}{i_2} \sum_{n=1}^N \Phi(\vec{B}_2/\Sigma_n)$$

ou encore

$$\boxed{\sum_{n=1}^N \Phi(\vec{B}_2/\Sigma_n) = M_b i_2(t)} \quad (24)$$

Les équations (23) et (24) sont la base pour calculer l’inductance propre  $L_b$  et l’inductance mutuelle  $M_b$  d’une bobine.

- Enfin, la contribution d’une bobine à l’inductance du circuit et à l’inductance mutuelle est **ultra-prépondérante**. On peut très bien négliger la contribution des autres tronçons du circuit, ce qui implique :

$$\boxed{L = L_{\text{reste circ.}} + L_b \approx L_b \quad \text{et} \quad M = M_{\text{reste circ.}} + M_b \approx M_b} \quad (25)$$

Dans le cas où il y a plusieurs bobines en série dans le circuit (deux par exemple), la loi d’addition conduit à :

$$\boxed{L = L_{\text{reste circ.}} + L_{b_1} + L_{b_2} \approx L_{b_1} + L_{b_2}} \quad (26)$$

et

$$\boxed{M = M_{\text{reste circ.}} + M_{b_1} + M_{b_2} \approx M_{b_1} + M_{b_2}} \quad (27)$$

**Exercice 5 : inductance propre d'une bobine**

On considère une bobine finie constituée de  $N$  spires circulaires jointives de rayon  $r$ , parcourues par un courant d'intensité  $i(t)$ . La bobine a pour axe de symétrie  $Oz$  et pour longueur  $\ell$  selon cet axe. On adopte un modèle très rudimentaire pour lequel on suppose que le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par la bobine à l'intérieur de celle-ci est le même que celui créé par un solénoïde infini. Cela revient à négliger complètement les effets de bord.

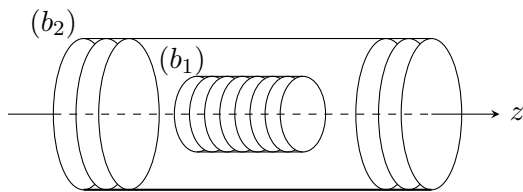
Calculer l'inductance propre  $L$  de cette bobine.

**Exercice 6 : Inductance mutuelle de deux bobines**

Deux bobines ( $b_1$ ) et ( $b_2$ ), de sections circulaires  $S_1$  et  $S_2$ , ont pour caractéristiques :

- $n_1$  et  $n_2$  spires par unité de longueur,
- longueurs  $\ell_1$  et  $\ell_2$  ( $\ell_1 < \ell_2$ ) suffisamment grandes pour pouvoir négliger les effets de bord,

( $b_1$ ) est placée entièrement à l'intérieur de ( $b_2$ ) et leurs axes de symétrie sont confondus.



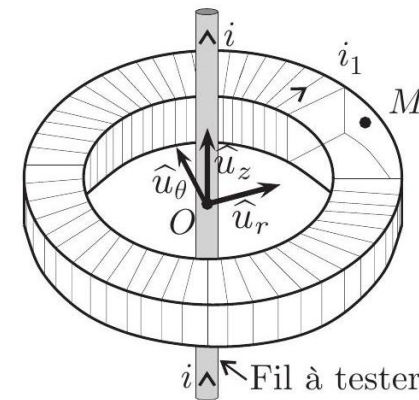
Déterminer l'inductance mutuelle  $M$  entre ces deux bobines.

**Exercice 7 : Pince ampèremétrique (Mines-Pont)**

Une pince ampèremétrique est un appareil dont l'extrémité possède la forme d'un tore. En disposant ce tore autour d'un conducteur parcouru par un certain courant le dispositif équipant la pince permet d'en mesurer l'intensité.

Son principal intérêt est l'absence de contact physique avec le conducteur et le fait qu'il ne soit pas nécessaire d'ouvrir le circuit pour mesurer le courant qui le traverse contrairement à l'implantation d'un ampèremètre classique.

Le dispositif de mesure de la pince ampèremétrique est formé d'un bobinage torique comportant  $N$  spires enroulées sur un tore de section rectangulaire de rayon intérieur  $a$ , de rayon extérieur  $b$ , d'épaisseur  $c$ , d'axe ( $Oz$ ). Le fil conducteur utilisé pour le bobinage possède une résistance linéique  $\lambda$ .



Un point  $M$  intérieur au tore est repéré par ses coordonnées cylindriques :  $\vec{OM} = r\hat{u}_r + z\hat{u}_z$  avec  $r \in [a, b]$  et  $z \in [0, c]$ .

Un fil rectiligne infini de même axe ( $Oz$ ) est parcouru par un courant d'intensité  $i(t)$ . On note  $i_1(t)$  l'intensité du courant circulant

dans la bobine torique. On se place dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

- 1) Montrer qu'au point  $M$  intérieur au tore, le champ magnétique peut se mettre sous la forme  $\vec{B} = B(r)\hat{u}_\theta$  où l'on précisera l'expression de  $B(r)$  en fonction de  $\mu_0$ ,  $i(t)$ ,  $i_1(t)$ ,  $N$  et  $r$ .
- 2) Calculer le flux  $\Phi$  de  $\vec{B}$  à travers le bobinage et en déduire les expressions des coefficients d'autoinductance  $L$  du bobinage et de mutuelle inductance  $M$  entre le fil et le bobinage.
- 3) Déterminer l'expression de la résistance totale  $R_p$  du bobinage en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $N$  et  $\lambda$ .

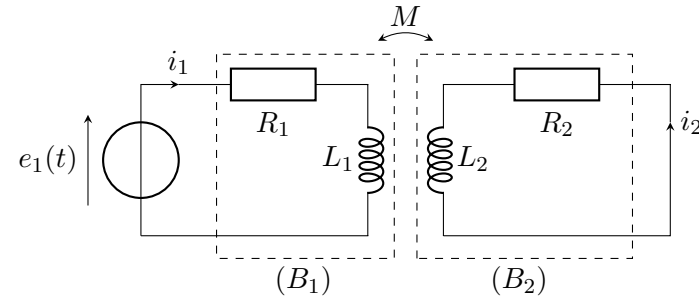
On se place en régime sinusoïdal forcé avec

$i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$  associée à l'intensité complexe  $\underline{i} = I_0\sqrt{2}e^{j\omega t}$   
 et  $i_1(t) = I_1\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_1)$  associée à l'intensité complexe  $\underline{i}_1 = I_1\sqrt{2}e^{j\omega t}e^{j\varphi_1}$ .

- 4) Le bobinage formant un circuit fermé, déterminer l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{\underline{i}_1}{\underline{i}}$  en fonction de  $M$ ,  $\omega$ ,  $R_p$  et  $L$ .
- 5) Dans quel régime de pulsation ce dispositif peut-il former une pince ampèremétrique ?

### Exercice 8 : Impédance d'un circuit couplé par inductance mutuelle à un autre circuit

Un circuit ( $\mathcal{C}_1$ ) alimenté par une source idéale de tension de f.é.m.  $e_1(t) = E_m \cos(\omega t)$  et contenant une bobine ( $B_1$ ) d'inductance  $L_1$  et de résistance  $R_1$  est couplé, avec un coefficient de mutuelle inductance  $M$ , à un circuit ( $\mathcal{C}_2$ ) contenant une bobine ( $B_2$ ) d'inductance  $L_2$  et de résistance  $R_2$  fermée sur elle-même par un court circuit.

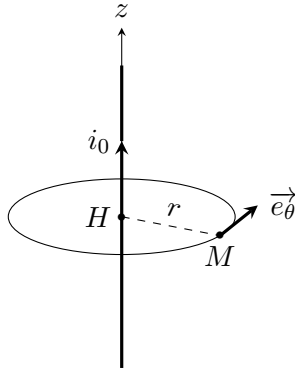


Déterminer l'impédance complexe  $\underline{Z} = \frac{e_1}{i_1}$  entre les bornes de ( $B_1$ ), en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ .

### III. Solutions des exercices

#### Exercice 1

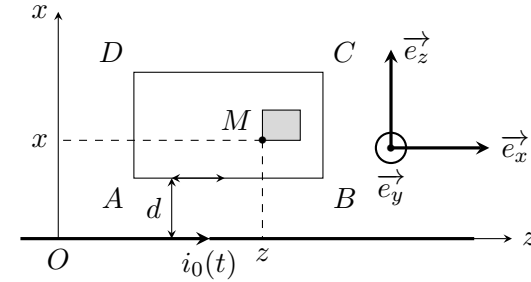
Considérons que  $Oz$  est l'axe du fil et plaçons-nous pour commencer en coordonnées cylindrique : un point  $M$  sera repéré par  $(r, \theta, z)$ . Les symétries et invariances de la distribution de courants indiquent que  $\vec{B}(M, t) = B(r, t) \vec{e}_\theta$ .



Dans l'A.R.Q.S. le théorème d'Ampère est valable comme en régime stationnaire et conduit à :

$$B(r, t) = \frac{\mu_0 i_0(t)}{2\pi r} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i_0(t)}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$$

Replaçons maintenant ce résultat dans le contexte de l'exercice, le cadre étant supposé être situé dans le plan  $(Oxz)$ .



En un point  $M$  intérieur au cadre de coordonnées  $(x, z)$ , le champ magnétique s'écrit :

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i_0(t)}{2\pi x} \vec{e}_y$$

Orientons le cadre en définissant une flèche du courant comme cela est indiqué sur le schéma, c'est à dire dans le sens  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ . Cela a pour effet d'orienter la surface du cadre par la règle de la main droite : le vecteur de surface élémentaire en  $M$  est donc :  $d\vec{S}_M = dx dz \vec{e}_y$ .

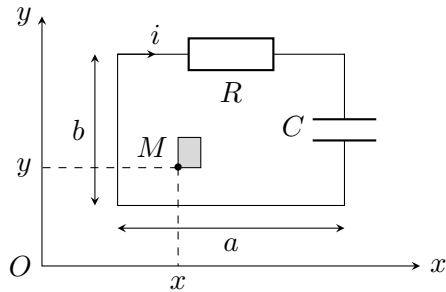
Le flux magnétique à travers la surface du cadre a pour expression :

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{B}/\Sigma) &= \iint \frac{\mu_0 i_0(t)}{2\pi x} \vec{e}_y \cdot dx dz \vec{e}_y = \int_d^{d+b} \frac{\mu_0 i_0(t)}{2\pi x} dx \times \int_{z_A}^{z_{A+a}} dz \\ &= \frac{\mu_0 i_0(t)}{2\pi} a \ln\left(\frac{d+b}{d}\right) \end{aligned}$$

Selon la loi de Faraday :

$$\boxed{e(t) = - \frac{d\Phi(\vec{B}/\Sigma)}{dt} = - \frac{\mu_0}{2\pi} a \ln\left(\frac{d+b}{d}\right) \frac{di_0}{dt}}$$

**Exercice 2**



Commençons par orienter le circuit en définissant la flèche du courant comme cela est indiqué sur le schéma ci-dessus. Cela a pour effet d'orienter la surface du circuit : en un point  $M$  de cette surface, de coordonnées  $(x, y)$ ,  $d\vec{S}_M = -dx dy \vec{e}_z$ .

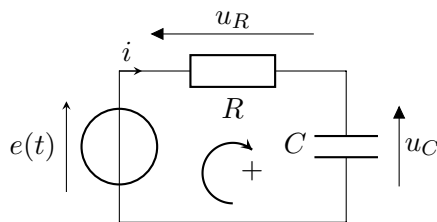
Le flux magnétique est donc :

$$\Phi(\vec{B}/\Sigma) = \iint_{\Sigma} B(t) \vec{e}_z \cdot (-dx dy \vec{e}_z) = -B(t) ab$$

puisque  $B(t)$  est uniforme. La force électromotrice induite est donnée par la loi de Faraday :

$$e(t) = -\frac{d\Phi(\vec{B}/\Sigma)}{dt} = \frac{dB}{dt} ab$$

Le schéma électrocinétique équivalent du circuit est donc :



La loi des mailles conduit à :

$$e(t) - u_R - u_C = 0 \quad \text{avec} \quad u_R = Ri \quad \text{et} \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

d'où l'équation différentielle :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{ab}{RC} \frac{dB}{dt}$$

Dans la suite on posera  $\tau = RC$ , constante de temps du circuit  $RC$ .

- 1) Cas où  $B(t) = B_0 \frac{t}{\tau_b}$  avec  $\tau_b > 0$  (constante de temps).

$$e(t) = \frac{B_0 ab}{\tau_b} = \text{Cste.} \quad \text{L'équation différentielle devient :}$$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{B_0 ab}{\tau \tau_b}$$

dont la solution générale est :

$$u_C(t) = \lambda e^{-t/\tau} + \frac{B_0 ab}{\tau_b}, \quad \lambda \text{ Cste}$$

La continuité de la tension aux bornes d'un condensateur entraîne :  $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$  puisque le condensateur est déchargé pour  $t < 0$ . On obtient donc :

$$u_C(t) = \frac{B_0 ab}{\tau_b} (1 - e^{-t/\tau})$$

- 2) Dans le cas où  $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$ .

Dans ce cas :  $e(t) = -B_0 ab \omega \sin(\omega t)$  et l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = -\frac{B_0 ab}{\tau} \omega \sin(\omega t)$$

La solution générale de l'équation homogène est encore  $\lambda e^{-t/\tau}$ . Une solution particulière peut être obtenue à l'aide des complexes en posant :

$$-\frac{B_0 ab}{\tau} \omega \sin(\omega t) = \frac{B_0 ab}{\tau} \omega \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \text{Re} \left[ \frac{B_0 ab}{\tau} \omega e^{j\pi/2} e^{j\omega t} \right]$$

On cherche une solution particulière complexe de la forme  $\underline{u}_C(t) = U_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$  solution de :

$$\frac{d\underline{u}_C}{dt} + \frac{\underline{u}_C}{\tau} = \frac{B_0 ab}{\tau} \omega e^{j\pi/2} e^{j\omega t}$$

d'où :

$$\underline{u}_C (1 + j\tau\omega) = B_0 ab \omega e^{j\pi/2} e^{j\omega t}$$

donc :

$$\underline{u}_C = \frac{B_0 ab \omega}{1 + j\tau\omega} e^{j\pi/2} e^{j\omega t}$$

On a donc :

$$U_m = |\underline{u}_C| = \frac{B_0 ab \omega}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan(\tau\omega)$$

En repassant dans le domaine réel, la solution particulière s'écrit donc :

$$u_C(t) = \text{Re}[u_C] = U_m \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{B_0 ab}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \sin[\omega t - \arctan(\tau\omega)]$$

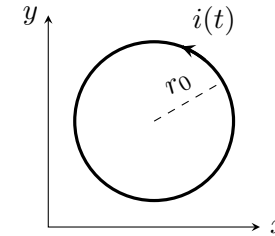
La solution générale est donc :

$$u_C(t) = \lambda e^{-t/\tau} - \frac{B_0 ab}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \sin[\omega t - \arctan(\tau\omega)]$$

et la condition de continuité  $u_C(0^+) = u_C(0^-)$  donne :

$$\lambda = -\frac{B_0 ab}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \sin[\arctan(\tau\omega)]$$

### Exercice 3



Dans cet exercice la flèche du courant est déjà définie par l'énoncé. On a donc  $d\vec{S}_M = +dS_M \vec{e}_z$ .

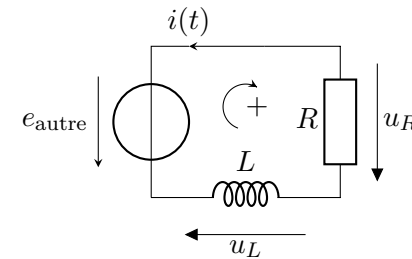
Le flux magnétique créé par  $\vec{B}_{\text{autre}}$  à travers la surface du circuit s'écrit :

$$\Phi_{\text{autre}} = \iint_{\Sigma} B_m \cos(\omega t) \vec{e}_z \cdot dS_M \vec{e}_z = B_m \cos(\omega t) \pi r_0^2$$

on en déduit la f.é.m. induite par ce champ grâce à la loi de Faraday :

$$e_{\text{autre}} = -\frac{d\Phi_{\text{autre}}}{dt} = \omega B_m \sin(\omega t) \pi r_0^2$$

De plus, afin de tenir compte de la force électromotrice auto-induite par le champ magnétique propre de l'anneau, on peut dresser le schéma électrocinétique équivalent de l'anneau, avec l'inductance propre  $L$  et la résistance  $R$ .



La loi des mailles conduit à :

$$-e_{\text{autre}}(t) + u_R + u_L = 0 \text{ avec } u_R = Ri \text{ et } u_L = L \frac{di}{dt}$$

ce qui donne :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{\omega B_m}{L} \sin(\omega t) \pi r_0^2$$

En régime sinusoïdal forcé on ne s'intéresse qu'à la solution particulière qui est sinusoïdale, de pulsation  $\omega$ . Dans ce but on peut poser :  $\tau = L/R$  (constante de temps du circuit  $RL$ ) et poser :

$$\frac{\omega B_m}{L} \sin(\omega t) \pi r_0^2 = \frac{\omega B_m}{L} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \pi r_0^2 = \text{Re} \left[ \frac{\omega B_m}{L} e^{-j\pi/2} e^{j\omega t} \pi r_0^2 \right]$$

On cherche une solution particulière sous forme complexe, de la forme :

$$\underline{i}(t) = I_m e^{j\varphi} e^{j\omega t}$$

Il vient :

$$\frac{d\underline{i}}{dt} + \frac{\underline{i}}{\tau} = \frac{\omega B_m}{L} e^{-j\pi/2} e^{j\omega t} \pi r_0^2$$

d'où :

$$\underline{i}(t) = \frac{\omega B_m}{L} \frac{\tau}{1 + j\tau\omega} e^{-j\pi/2} e^{j\omega t} \pi r_0^2$$

On obtient alors :

$$I_m = |\underline{i}(t)| = \frac{\omega B_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \pi r_0^2 \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2} - \arctan(\tau\omega)$$

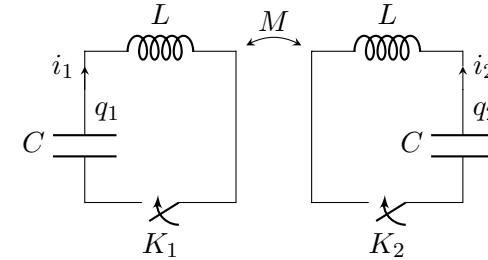
et donc :

$$i(t) = \text{Re}[\underline{i}] = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

soit :

$$i(t) = \frac{\omega B_m}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \pi r_0^2 \sin[\omega t - \arctan(\tau\omega)]$$

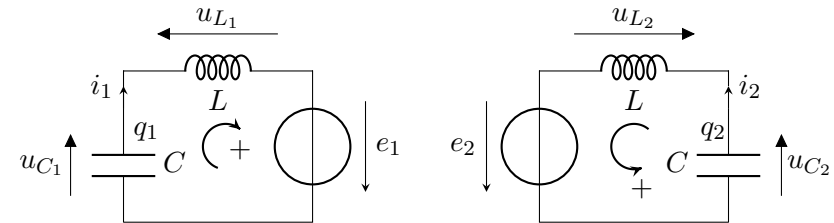
**Exercice 4**



- 1) Les deux inductances du schémas sont placées pour tenir compte des f.é.m. d'auto-induction de chacun des deux circuits. Le schéma électrocinétique équivalent doit en plus tenir compte des forces électromotrices induites mutuelles :

$$e_1 = -M \frac{di_2}{dt} \text{ et } e_2 = -M \frac{di_1}{dt}$$

Pour  $t > 0$  on a donc :



La flèche de la f.é.m.  $e_1$  (resp.  $e_2$ ) est dans le même sens que la flèche du courant  $i_1$  (resp.  $i_2$ ).

Les lois des mailles donnent :

$$u_{C1} - u_{L1} + e_1 = 0 \text{ avec } u_{C1} = \frac{q1}{C} ; u_{L1} = L \frac{di1}{dt} \text{ et } i_1 = -\frac{dq1}{dt}$$

et

$$u_{C_2} - u_{L_2} + e_2 = 0 \quad \text{avec} \quad u_{C_2} = \frac{q_2}{C} ; \quad u_{L_2} = L \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad i_2 = - \frac{dq_2}{dt}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\frac{q_1}{C} + L \frac{d^2 q_1}{dt^2} + M \frac{d^2 q_2}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{q_2}{C} + L \frac{d^2 q_2}{dt^2} + M \frac{d^2 q_1}{dt^2} = 0}$$

Il s'agit de deux équations différentielles couplées.

- 2) Posons  $X = q_1 + q_2$  et  $Y = q_1 - q_2$ . En additionnant les deux équations précédentes puis en les soustrayant, on obtient :

$$\frac{X}{C} + (L + M) \frac{d^2 X}{dt^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{Y}{C} + (L - M) \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0$$

avec  $0 < M < L$  puisque  $M > 0$  par hypothèse d'énoncé et que  $k = \frac{M}{\sqrt{L \times L}} = \frac{M}{L} < 1$ . En introduisant les deux pulsations propres :

$$\omega_x = \frac{1}{\sqrt{(L + M)C}} \quad \text{et} \quad \omega_y = \frac{1}{\sqrt{(L - M)C}}$$

on obtient deux oscillateurs harmoniques :

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \omega_x^2 X = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} + \omega_y^2 Y = 0$$

dont les solutions sont :

$$X(t) = A_x \cos(\omega_x t) + B_x \sin(\omega_x t) \quad \text{et} \quad Y(t) = A_y \cos(\omega_y t) + B_y \sin(\omega_y t)$$

La continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et celle de l'intensité traversant une inductance implique les conditions initiales suivantes :

$$q_1(0^+) = q_1(0^-) = Q_0 ; \quad q_2(0^+) = q_2(0^-) = 0$$

et

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0 ; \quad i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$$

On a donc :

$$X(0^+) = Q_0 ; \quad \dot{X}(0^+) = 0 ; \quad Y(0^+) = Q_0 ; \quad \dot{Y}(0^+) = 0$$

d'où :

$$X(t) = Q_0 \cos(\omega_x t) \quad \text{et} \quad Y(t) = Q_0 \cos(\omega_y t)$$

ce qui conduit à :

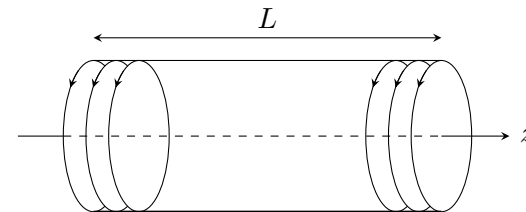
$$\boxed{q_1(t) = \frac{X + Y}{2} = \frac{Q_0}{2} [\cos(\omega_x t) + \cos(\omega_y t)]}$$

et

$$\boxed{q_2(t) = \frac{X - Y}{2} = \frac{Q_0}{2} [\cos(\omega_x t) - \cos(\omega_y t)]}$$

### Exercice 5

On suppose que le champ magnétique de la bobine peut être assimilé à celui d'un solénoïde infini avec un nombre de spires par mètre  $n = N/\ell$ . En plaçant la flèche du courant comme dans la figure ci-dessous on a donc :



$$\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \vec{e}_z$$

Le flux de ce champ à travers une spire circulaire est :

$$\Phi(\vec{B}/1 \text{ spire}) = \iint \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \vec{e}_z \cdot dS \vec{e}_z = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \pi r^2$$

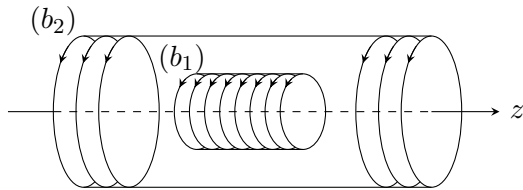
puisque le champ magnétique est uniforme. De plus, le flux à travers une spire ne dépend pas de la position de cette spire en raison à nouveau de l'uniformité de  $\vec{B}$ . En numérotant les spires par un entier  $n$  on a donc :

$$L i(t) = \sum_{n=1}^N \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \pi r^2 = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i(t) \pi r^2$$

et donc :

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi r^2 > 0$$

**Exercice 6**



On va utiliser la propriété de symétrie des inductances mutuelles pour choisir entre  $\Phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1$  et  $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$  lequel des deux est le plus simple à calculer. Ici c'est manifestement  $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ .

On commence par orienter les deux circuits en définissant les flèches des courants comme indiqué sur la figure ci-dessus.

( $b_1$ ) étant au centre de ( $b_2$ ) on peut considérer que le champ magnétique produit par ( $b_2$ ) au niveau de chaque spire de ( $b_1$ ) est quasiment celui d'un solénoïde infini :

$$\vec{B}_2 = \mu_0 n_2 i_2 \vec{e}_z$$

Pour une spire de ( $b_1$ ) on a donc (on note  $\Sigma_1$  la surface d'une spire) :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1}(1 \text{ spire}) = \iint_{\Sigma_1} \vec{B}_2 \cdot dS \vec{e}_z = \mu_0 n_2 i_2 S_1$$

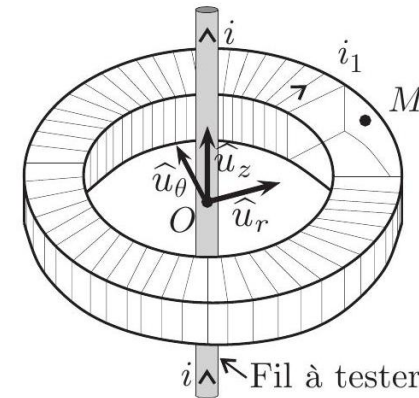
En numérotant les spires de ( $b_1$ ) par un entier  $n$  et en appelant  $N_1 = n_1 \ell_1$  le nombre de spires de ( $b_1$ ), on obtient :

$$\Phi_{2 \rightarrow 1} = \sum_{n=1}^{N_1} \Phi_{2 \rightarrow 1}(1 \text{ spire}) = \mu_0 n_2 i_2 S_1 \times N_1$$

Finalement :

$$M = \frac{1}{i_2} \Phi_{2 \rightarrow 1} = \mu_0 n_1 n_2 S_1 \ell_1$$

**Exercice 7**



1) Le champ magnétique  $\vec{B}$  est celui créé par les deux courants  $i$  et  $i_1$  et il faut donc tenir compte des symétries de ces deux courants. On va supposer que les spires du tore sont jointives. Dans ce cas :

- Le plan  $(M, \widehat{u}_r, \widehat{u}_z)$  est un plan de symétrie des courants contenant  $M$ . Par conséquent il s'agit d'un plan d'antisymétrie de  $\vec{B}$ . On a donc :

$$\vec{B}(M, t) = B(r, \theta, z, t) \widehat{u}_\theta$$

- La distribution de courants est invariante par rotation autour de  $Oz$  et il en est de même pour  $\vec{B}$ , d'où :

$$\vec{B}(M, t) = B(r, z, t) \widehat{u}_\theta$$

Le théorème d'Ampère s'applique en régime stationnaire. On choisit comme courbe d'Ampère ( $\mathcal{C}_A$ ) un cercle de rayon  $r$  et d'axe  $Oz$  :

$$\oint_{\mathcal{C}_A} \vec{B}(M, t) \cdot d\vec{\ell}_M = \int_0^{2\pi} B(r, z, t) r d\theta = 2\pi r B(r, z, t)$$

Le courant enlacé étant  $i + N i_1$ , il vient :

$$2\pi r B(r, z, t) = \mu_0 (i + N i_1) \quad \text{donc} \quad B = B(r, t) = \frac{\mu_0 (i + N i_1)}{2\pi r}$$

On remarque que  $B$  ne dépend pas de  $z$ .

2) On commence par calculer le flux de  $\vec{B}$  à travers la surface d'une seule spire du tore, repérée par l'angle  $\theta$  et dont le vecteur surface élémentaire est  $d\vec{S} = dr dz \widehat{u}_\theta$  compte-tenu de l'orientation des spires du tore. On a donc :

$$\begin{aligned} \Phi(1 \text{ spire}) &= \iint B(r, t) \widehat{u}_\theta \cdot dr dz \widehat{u}_\theta = \int_0^c dz \times \int_a^b \frac{\mu_0 (i + N i_1)}{2\pi r} dr \\ &= \frac{\mu_0 (i + N i_1)}{2\pi} c \ln \left( \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

On remarque que ce flux ne dépend pas de la position de la spire sur le tore : il est donc identique pour toutes les spires. On en déduit (en numérotant les spires par un entier  $n$ ) :

$$\Phi = \sum_{n=1}^N \Phi(1 \text{ spire}) = \frac{\mu_0 (N i + N^2 i_1)}{2\pi} c \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

- Le terme  $\Phi_p = \frac{\mu_0 (N^2 i_1)}{2\pi} c \ln \left( \frac{b}{a} \right)$  est le **flux propre** du tore. Il est de la forme  $\Phi_p = L i_1$  et donc :

$$L = \frac{\mu_0 N^2}{2\pi} c \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

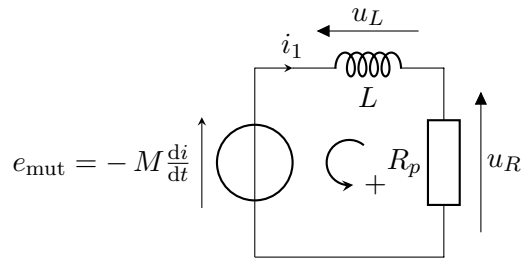
- Le terme  $\Phi_{\text{fil} \rightarrow \text{tore}} = \frac{\mu_0 (N i)}{2\pi} c \ln \left( \frac{b}{a} \right)$  est le flux envoyé par le fil à travers la surface du tore. Il est de la forme  $\Phi_{\text{fil} \rightarrow \text{tore}} = M i$  et donc :

$$M = \frac{\mu_0 N}{2\pi} c \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

3)  $\lambda$  étant la résistance linéique du fil conducteur du bobinage, de longueur totale  $\ell$  on a :

$$R_p = \lambda \ell = \lambda \times 2(b - a + c) \times N = 2N\lambda(b - a + c)$$

4) Le bobinage est un circuit fermé. On peut donc dessiner son schéma électrocinétique équivalent, en tenant compte de l'inductance propre  $L$ , de la f.é.m. d'induction mutuelle  $e_{\text{mut}}$  et de la résistance  $R_p$  du bobinage :



**Remarque :**

La flèche de  $e_{mut}$  est dans le même sens que la flèche du courant  $i_1$ .

La loi des mailles donne :

$$u_R + u_L - e_{mut} = 0 \quad \text{avec} \quad u_L = L \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad u_R = R_p i_1$$

d'où :

$$L \frac{di_1}{dt} + R_p i_1 = e_{mut} = -M \frac{di}{dt}$$

En régime sinusoïdal forcé, on passe dans le domaine complexe :

$$L \frac{di_1}{dt} + R_p i_1 = -M \frac{di}{dt}$$

c'est à dire :

$$(R_p + jL\omega) i_1 = -jM\omega i$$

d'où :

$$\underline{H} = \frac{i_1}{i} = \frac{-jM\omega}{R_p + jL\omega}$$

- 5) Il faut pouvoir mesurer la valeur efficace  $I_0$  du courant dans le fil. Le plus efficace est que la valeur efficace  $I_1$  soit directement

proportionnelle à  $I_0$ , ce qui est réalisé pour  $L\omega \gg R_p$ . Dans ce cas :

$$\frac{I_1}{I} = \left| \frac{-jM\omega}{R_p + jL\omega} \right| \approx \left| \frac{-jM\omega}{jL\omega} \right| = \frac{M}{L} = \frac{1}{N}$$

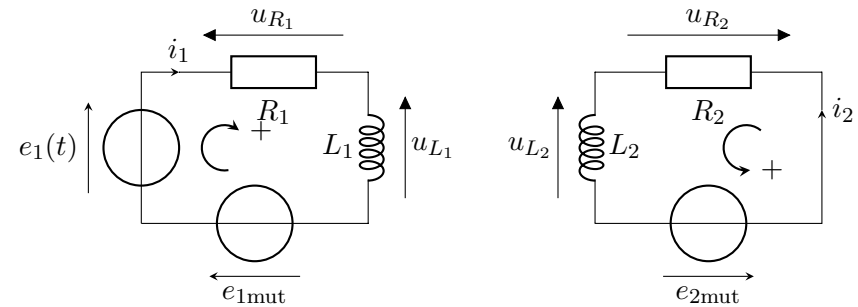
d'où :

$$I_1 = \frac{I}{N}$$

**Exercice 8**

Dressons le schéma électrocinétique équivalent des deux circuits, compte-tenu des inductances mutuelles :

$$e_{1mut} = -M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_{2mut} = -M \frac{di_1}{dt}$$



Les lois des mailles donnent ;

$$e_{1mut} + e_1 - u_{R_1} - u_{L_1} = 0 \quad \text{et} \quad e_{1mut} - u_{R_1} - u_{L_1} = 0$$

et donc :

$$e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

En régime sinusoïdal forcé on utilise la notation complexe :  $\underline{e}_1(t) = E_m e^{j\omega t}$  et on pose  $\underline{i}_1(t) = I_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}$  et  $\underline{i}_2(t) = I_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}$ . On obtient :

$$\underline{e}_1 = (R_1 + jL_1\omega) \underline{i}_1 + jM\omega \underline{i}_2 \quad \text{et} \quad (R_2 + jL_2\omega) \underline{i}_2 + jM\omega \underline{i}_1 = 0$$

On élimine  $\underline{i}_2$  pour trouver :

$$\underline{i}_2 = - \frac{jM\omega}{R_2 + jL_2\omega} \underline{i}_1$$

d'où :

$$\underline{e}_1 = (R_1 + jL_1\omega) \underline{i}_1 + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega} \underline{i}_1$$

et donc :

$$\underline{Z} = R_1 + jL_1\omega + \frac{M^2\omega^2}{R_2 + jL_2\omega}$$