

Exercices d'oraux - Correction

ÉLECTROCINÉTIQUE ET SIGNAUX NUMÉRIQUES

1 Réponse d'un circuit du second ordre

1. Pour déterminer l'équation différentielle, on peut utiliser la loi des mailles et la loi des nœuds, mais il est plus simple de passer par la fonction de transfert et d'utiliser la notation complexe. Avec un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{U}{E} = \frac{Z_{eq}}{Z_{eq} + r + jL\omega} = \frac{1}{1 + \frac{r + jL\omega}{Z_{eq}}}$$

avec Z_{eq} correspondant à l'association en parallèle de la résistance R et du condensateur $\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} + jC\omega$, donc

$$\frac{U}{E} = \frac{1}{1 + (r + jL\omega) \left(\frac{1}{R} + jC\omega \right)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{R} \right) + j\omega \left(\frac{L}{R} + rC \right) - LC\omega^2}$$

En repassant en notation réelle, on obtient :

$$\ddot{u} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L} \right) \dot{u} + \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{r}{R} \right) u = \frac{E}{LC}$$

donc $\lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L} \right)$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} \left(1 + \frac{r}{R} \right)}$ par identification avec $\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{E}{LC}$. Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique amorti.

2. Le type de solution dépend du signe du discriminant de l'équation caractéristique puisqu'il s'agit d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants. Or, $\Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2) = -4\omega^2 < 0$ avec $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \in \mathbb{R}$, ce qui signifie que $\omega > 0$. On a donc affaire à un régime pseudo-périodique, avec des oscillations amorties, et la solution s'écrit donc (attention à ne pas oublier la solution particulière!) :

$$u(t) = \frac{E}{\omega_0^2 LC} + e^{-\lambda t} [A \cos \omega t + B \sin \omega t] = \frac{RE}{r + R} + e^{-\lambda t} [A \cos \omega t + B \sin \omega t]$$

avec A et B des constantes qui dépendent des conditions initiales.

3. Si on suppose que pour $t < 0$, le régime permanent est établi, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert. Par ailleurs, l'interrupteur est encore fermé, donc $u(t = 0^-) = 0$. Comme la tension est continue dans le condensateur, on en déduit que $u(t = 0^+) = 0$.

On peut ainsi en déduire le courant passant dans la résistance en régime permanent pour $t < 0$:

$i(t = 0^-) = \frac{E}{r}$. Comme il y a continuité du courant dans la bobine, on a $i(t = 0^+) = \frac{E}{r}$, or d'après la

loi des nœuds, $i(t = 0^+) = i_R(t = 0^+) + i_C(t = 0^+) = \frac{u(t = 0^+)}{R} + i_C(t = 0^+) = 0 + i_C(t = 0^+)$, donc

$i_C(t = 0^+) = \frac{E}{r}$. Or $i_C(t = 0^+) = C \frac{du}{dt}(t = 0^+)$, donc finalement $\dot{u}(t = 0^+) = \frac{E}{rC}$.

4. On peut maintenant utiliser les conditions initiales pour déterminer A et B :

$$u(t = 0^+) = 0 = E \frac{R}{r + R} + A \quad \text{donc} \quad \boxed{A = -E \frac{R}{r + R}}$$

de plus, $\dot{u}(t > 0) = (-A\omega \sin\omega t - A\lambda \cos\omega t - \lambda B \sin\omega t + B\omega \cos\omega t) e^{-\lambda t}$, donc

$$\dot{u}(t = 0^+) = \frac{E}{rC} = -A\lambda + B\omega \quad \text{et} \quad B = \frac{E}{rC\omega} + \frac{A\lambda}{\omega}$$

$$\text{Finalement } B = \frac{E}{rC\omega} - E \frac{R}{r + R} \times \frac{1}{2\omega} \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L} \right) \text{ soit } \boxed{B = \frac{E}{\omega} \left[\frac{1}{rC} - \frac{R}{2(r + R)} \left(\frac{1}{RC} + \frac{r}{L} \right) \right]}$$

2 Filtre RLC

$$1) \frac{H = \frac{z}{e} = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{R\omega}\right)} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec $|H_0| = 1$, $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{L}{R}$ et $Q\omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow Q^2 = \frac{L}{R^2C}$ et $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

d'où $\omega_0 = \frac{1}{RCQ} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

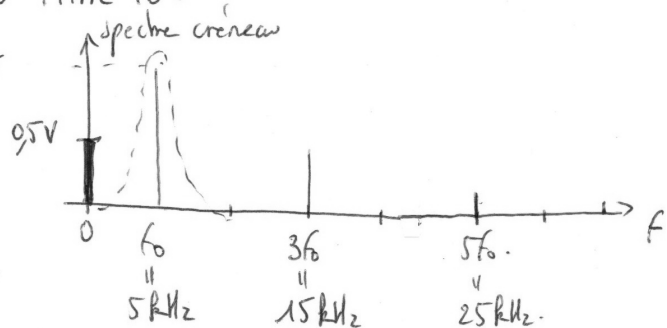
2) D'après le graphique, on lit $f_0 = 5 \text{ kHz}$ et $\Delta f = 58 - 4,1 \approx 1,7 \text{ kHz}$.
 donc $L = \frac{RQ}{\omega_0} = \frac{RQ}{2\pi f_0} = \frac{R}{2\pi \Delta f} \approx \frac{100}{2\pi \times 1700} \approx 10 \text{ mH}$ (Bon ODG).
 or $\Delta f = \frac{f_0}{Q}$

et $C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L} \approx \frac{1}{4\pi^2 \times 5000^2 \times 10^{-2}} \approx 1 \cdot 10^{-7} \text{ F} = 100 \text{ nF}$ (Bon ODG).

3) Le signal rectangulaire a une période $T_1 = 0,2 \text{ ms}$, donc $f_1 = 5 \text{ kHz}$, qui est justement la fréquence propre du filtre f_0 .

Le spectre du signal créneau est

D'après la valeur de la bande passante $\Delta f = 1,7 \text{ kHz} < f_0$, les pics à $3f_0, 5f_0, \dots$ sont filtrés, et il ne reste que le fondamental.



La valeur moyenne est également filtrée.

Le signal n'est pas déphasé d'après le diagramme de phase du filtre car $\varphi(f_0) = 0$.

On notera que l'amplitude du signal filtré correspond bien à $\frac{4E}{\pi}$, où $E = 0,5 \text{ V}$, donc $\frac{2}{\pi} = 0,64 \text{ V}$.

On voit cependant que le signal n'est pas parfaitement sinusoïdal (cf question suivante).

4) Le spectre de gauche correspond au signal rectangulaire.

On reconnaît les pics de fréquences : 5 kHz, 15 kHz, 25 kHz, ...
d'amplitudes décroissantes.

Vérifions la cohérence des amplitudes :

* 1^{er} pic à 5 kHz : $20 \log 0,64 = -3,9 \text{ dB}$ → Bof mais spectre
peut-être pas assez précis

* entre pic à 15 kHz et 100 kHz, décroissance de -15 dB à -32 dB,
soit environ -17 dB.

Le spectre de droite comporte les mêmes pics, mais ceux de fréquences
autres que f_0 sont atténués :

pic à 15 kHz : -35 dB environ }
à 100 kHz : -70 dB environ } -35 dB

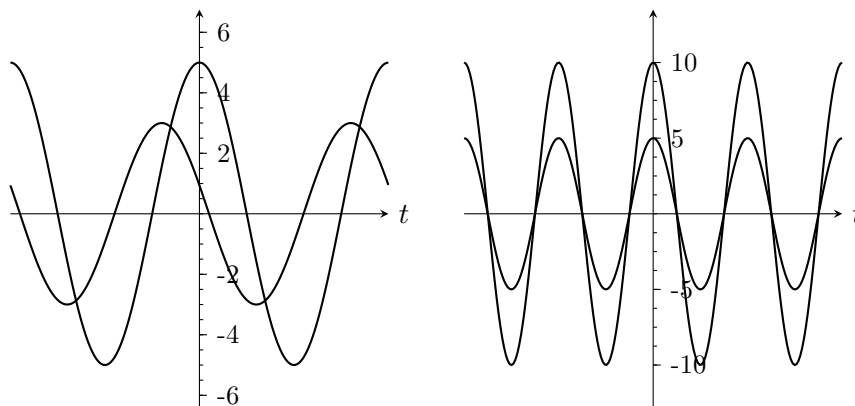
On voit donc qu'en une décade (de 10 kHz à 100 kHz environ),
le filtre a bien atténué de -20 dB supplémentaires entre le signal
d'entrée et le signal de sortie.

3 Action d'un filtre sur un signal sinusoïdal

On alimente un filtre de fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ(x - 1/x)} \quad \text{avec } x = f/f_0$$

avec une tension sinusoïdale $u_e(t) = 5 \cos(2\pi ft)$. On observe à l'oscilloscope les courbes ci-dessous, avec $f = 500 \text{ Hz}$ (première courbe) et $f = 1000 \text{ Hz}$.



1. La tension de sortie du filtre observée à l'oscilloscope s'écrit :

$$s(t) = 5 G(2\pi f) \cos(2\pi ft + \varphi) \quad \text{avec} \quad \varphi = \arg H = -\arctan \left[Q \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right]$$

On constate que sur le second oscillogramme les deux signaux sont en phase ($\varphi = 0$) ce qui ne peut se produire que si $f = f_0$. On en déduit que : $f_0 = 1000$ Hz.

De plus, dans ce cas $G(f_0) = H_0$ et l'amplitude de $s(t)$ est égale à 10 V donc $H_0 = 10/5 = 2$.

Sur le premier oscillogramme on voit que l'amplitude de $s(t)$ vaut 3V et donc, pour $f = 500$ Hz, $G(f) = 3/5 = 0,6$. On a donc :

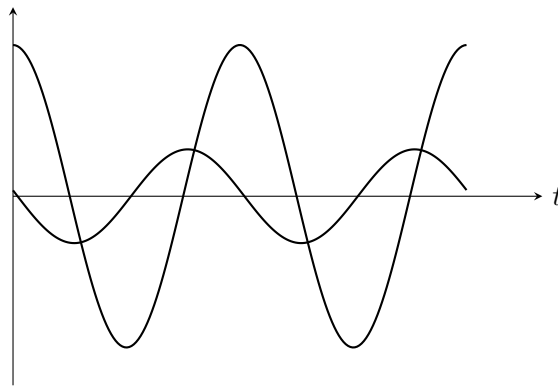
$$\frac{2}{\sqrt{1 + Q^2 (f/f_0 - f_0/f)^2}} = 0,6 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\sqrt{(2/0,6)^2 - 1}}{(f_0/f - f/f_0)} = 2,1$$

Le filtre n'est donc pas très sélectif.

2. Pour $f = 300$ Hz on calcule :

$$G(f) = 0,31 \quad \text{et} \quad \varphi = 81^\circ = 1,4 \text{ rad} > 0$$

La sortie $s(t)$ est en avance sur l'entrée, presque en quadrature avance sur $u_e(t)$. Le décalage temporel exact est $\tau = \varphi/\omega = \frac{\varphi}{2\pi} T = 0,23 T$ où T est la période des deux signaux. L'amplitude de $s(t)$ est égale à 1,55 V, environ au tiers de celle de $u_e(t)$.



4 Filtre et oscillateur

1. Une analyse qualitative montre qu'il s'agit d'un filtre passe-bande, ce que confirme la forme trouvée par le calcul :

$$H = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{1}{2 + jR_3C\omega + \frac{2R_3}{jL\omega}}$$

- 2.

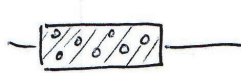
$$\ddot{v}_s + \frac{2 - (1 + R_2/R_1)}{R_3C} \dot{v}_s + \frac{2}{LC} v_s(t) = 0$$

Il faut donc $R_1 = R_2$ pour obtenir des oscillations libres.

5 Mesure de la présence d'impuretés dans une solution

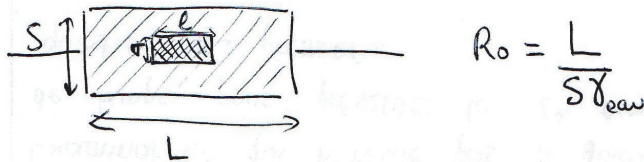


résistance R_0

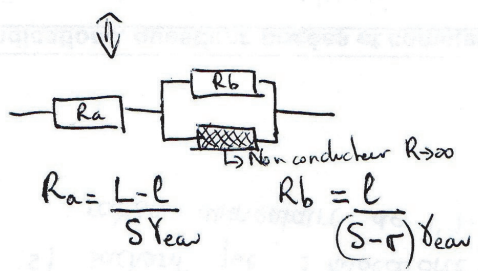


résistance $R_1 = R_0 + \delta R_0$ $\delta R_0 \ll R_0$

1)



$$R_0 = \frac{L}{S \gamma_{eau}}$$



$$R_a = \frac{L-l}{S \gamma_{eau}} \quad R_b = \frac{l}{(S-\sigma) \gamma_{eau}}$$

$$\Rightarrow R_1 = R_a + R_b = \frac{1}{\gamma_{eau}} \left[\frac{L-l}{S} + \frac{l}{S-\sigma} \right]$$

$$R_1 = \frac{1}{\gamma_{eau} S} \left[L-l + l \left(1 + \frac{\sigma}{S} \right) \right] = \frac{1}{\gamma_{eau} S} \left[L + \frac{l \sigma}{S} \right]$$

$$= R_0 \left[1 + \frac{l \sigma}{L S} \right] = R_0 + \delta R_0 \quad \text{où } \delta R_0 = R_0 \frac{l \sigma}{L S} = R_0 \left(\frac{v}{V} \right)$$

f : fraction volumique de l'impureté.

On admet que pour N impuretés:

$$R_1 = R_0 + R_0 N \frac{v}{V} = R_0 + N \delta R_0$$

2) La première partie est un soustracteur et le second un amplificateur non inverseur de gain $\frac{R_4 + R_3}{R_4}$ → gain à déterminer

$$\left\{ \begin{aligned} V_- \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) &= \frac{V_s}{R_2} + \frac{e}{R_2} \Rightarrow V_+ (R_2 + R_0) = R_0 V_s + R_2 e \\ V_+ \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_2} \right) &= \frac{e}{R_0} \Rightarrow V_+ (R_2 + R_0) = R_2 e \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} +V_+ \delta R_0 &= R_0 V_s \\ \frac{R_0 e \delta R_0}{(R_2 + R_0)} &= R_0 V_s \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow V_s = \frac{+R_2 e \delta R_0}{R_0 (R_2 + R_0)}$$

⇒ V_s proportionnel à δR_0

→ Gain total du montage :

$$\frac{U}{e} = \frac{U}{V_s} \times \frac{V_s}{e} = \left(1 + \frac{R_3}{R_4}\right) \times \left(\frac{R_2 \delta R_0}{R_0(R_0 + R_2)}\right) \quad \text{or } \delta R_0 = R_0 N F$$

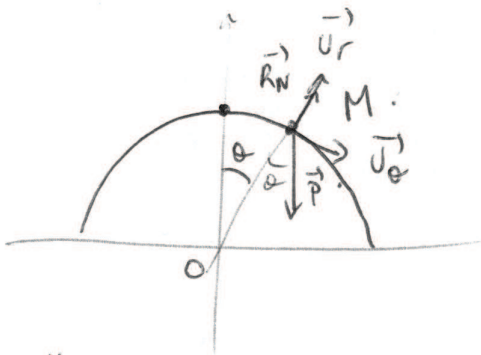
$$= \left(\frac{1 + R_3}{R_4}\right) \frac{R_2}{(R_0 + R_2)} N F$$

Choisir des valeurs tq $K = \frac{(R_3 + R_4) R_2}{R_4 (R_0 + R_2)} = 1$

et $e = 1V \Rightarrow \boxed{U = N F}$

MECANIQUE DU POINT ET DU SOLIDE

6 Glissement du haut d'un igloo



Sans frottement $\Rightarrow R_T = 0$.

Décollage lorsque $R_N = 0$

PFD : sur \vec{u}_r :

$$-mR\dot{\theta}^2 = R_N - mg \cos \theta$$

sur \vec{u}_θ :

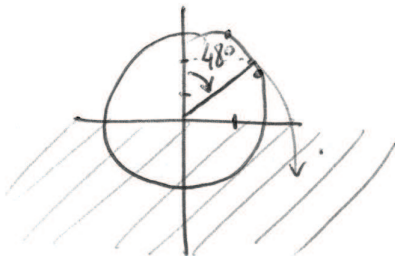
$$mR\ddot{\theta} = mg \sin \theta \rightarrow mR\dot{\theta}\ddot{\theta} = mg \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} m R \dot{\theta}^2 - 0 = -mg(\cos \theta - 1)$$

$$\Rightarrow mR\dot{\theta}^2 = -2mg(\cos \theta - 1)$$

$$= mg \cos \theta$$

lorsque $R_T = 0$



avant : mvmt circulaire :

$$\vec{OM} = R\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

$$\Rightarrow 3mg \cos \theta = 2mg$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{2}{3}$$

soit $\theta = 48^\circ$ cohérent.

7 Influence des frottements sur le mouvement d'un satellite à basse altitude

1. Le satellite étant en orbite circulaire, on obtient avec le PFD : $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}} = 7.65 \text{ km.s}^{-1}$.

2. En l'absence de frottement, $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_T m}{2(R_T+h)}$, $E_p = -\frac{GM_T m}{(R_T+h)}$, et $E_m = -\frac{GM_T m}{2(R_T+h)}$, donc finalement :

$$E_m = -E_c = \frac{E_p}{2}.$$

3. (a) D'après le théorème de l'énergie mécanique, $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ car la force de frottement s'oppose au mouvement du satellite. On en déduit donc que l'énergie mécanique diminue au cours du temps.
- (b) $E_m = -\frac{GM_T m}{2(R_T+h)}$ avec G , m , M_T et R_T fixés, donc si E_m diminue, alors h diminue également.
4. $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$ implique $\frac{dv}{dh} = \frac{\sqrt{GM_T}}{2(R_T+h)^{3/2}}$, donc $dv = \frac{\sqrt{GM_T}}{2(R_T+h)^{3/2}} dh$ et finalement $dv = 0.56 \text{ mm.s}^{-1}$.

On obtient $dv > 0$: les frottements augmentent la vitesse du satellite ! En fait, c'est un effet indirect : les frottements diminuent l'énergie mécanique, donc l'altitude. Au cours de cette « chute », le travail de l'attraction gravitationnelle l'emporte sur le travail des frottements, ce qui a pour effet d'augmenter la vitesse du satellite. Ceci peut être vu également sur la relation $E_m = -E_c$: une diminution de E_m correspond à une augmentation de E_c .

8 Mouvement d'une météorite

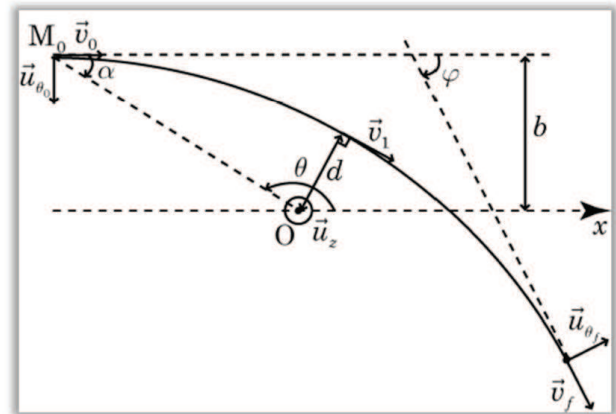
1. Système : météorite

Référentiel : géocentrique supposé galiléen.

Action mécanique :

➤ attraction gravitationnelle

$$\vec{F} = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{u}_r, \text{ conservative.}$$



L'énergie mécanique est donc constante :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GmM_T}{d} \quad (1).$$

La force gravitationnelle est une force centrale.

Le moment cinétique par rapport au centre de force O est donc constant :

$$\vec{L}_0(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = -mOM_0v_0 \sin\theta_0\vec{u}_z = -mbv_0\vec{u}_z = -mdv_1\vec{u}_z \Rightarrow v_1 = \frac{bv_0}{d}.$$

Dans (1), on obtient $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\frac{b}{d}\right)^2 - \frac{GmM_T}{d} \Rightarrow d^2 + \frac{2GM_T}{v_0^2}d - b^2 = 0$

$$\Delta = 4\left(\frac{G^2M_T^2}{v_0^4} + b^2\right) > 0 \Rightarrow d = -\frac{GM_T}{v_0^2} \pm \sqrt{b^2 + \frac{G^2M_T^2}{v_0^4}}.$$

Or $d > 0$: on garde la seule solution positive : $d = -\frac{GM_T}{v_0^2} + \sqrt{b^2 + \frac{G^2M_T^2}{v_0^4}}$.

2. Pour que la météorite ne rencontre pas la Terre, il faut que $d > R_T$:

On doit donc avoir $b > b_{\min}$ avec $b_{\min} = \sqrt{R_T^2 + \frac{2GM_T R_T}{v_0^2}}$.

3.a. Conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = v_0$.

b. Conservation du moment cinétique : $\vec{L}_0 = -mbv_0\vec{u}_z = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z \Rightarrow r^2\dot{\theta} = -bv_0$.

c. Loi de la quantité de mouvement :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{u}_r \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{GM_T}{bv_0}\dot{\theta}\vec{u}_r = -\frac{GM_T}{bv_0}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt}.$$

On en déduit alors
$$\boxed{\vec{v}_f - \vec{v}_0 = -\frac{GM_T}{bv_0}(\vec{u}_{\theta f} - \vec{u}_{\theta 0})}$$
.

d. On projette la relation précédente selon \vec{u}_x : $v_f \cos \varphi - v_0 = \frac{GM_T}{bv_0} \sin \varphi$ (car $\sin \varphi < 0$).

$$v_f = v_0 \Rightarrow v_0 (\cos \varphi - 1) = \frac{GM_T}{bv_0} \sin \varphi.$$

Or $\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)$ et $\sin \varphi = 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi}{2} \right) \Rightarrow \tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) = -\frac{GM_T}{bv_0^2}$.

On a $-\pi \leq \varphi \leq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\varphi}{2} \leq 0 \Rightarrow \boxed{\varphi = -2 \arctan \left(\frac{GM_T}{bv_0^2} \right)}$.

4. $b_{\min} = 9,1 \times 10^3 \text{ km}$ et $\varphi = -0,47 \text{ rad}$.

9 Point matériel dans un tunnel

1. Avec le théorème de Gauss gravitationnel, on montre simplement que (cf cours) : $\vec{g} = -\frac{Gm}{R^3} r \vec{e}_r$

2. Méthode 1 : Méthode énergétique (dans le référentiel terrestre supposé galiléen¹).

Le potentiel gravitationnel à l'intérieur du tunnel est $V(r) = \frac{Gm}{2R^3} r^2 + \text{cte}$, et l'énergie gravitationnelle d'une masse m' qui se déplace dans le tunnel $E_p = m'V(r)$.

Il y a conservation de l'énergie mécanique (on néglige tout frottement solide ou fluide dans le tunnel), donc :

$$\frac{1}{2} m' \dot{x}^2 + \frac{Gmm'}{2R^3} (x^2 + h^2) + \text{cte} = E_m$$

où h est la distance la plus proche du tunnel au centre de la Terre. On a donc finalement :

$$\ddot{x} + \frac{Gm}{R^3} x(t) = 0$$

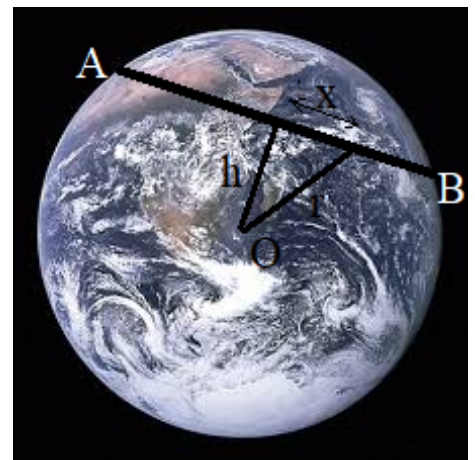
Soit un mouvement d'oscillation sinusoïdale de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{Gm}{R^3}}$ et de période $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \simeq 5000 \text{ s} \simeq 1\text{h}25\text{mn}$ (on rappelle que pour la Terre, $m \simeq 6.10^{24} \text{ kg}$).

Méthode 2 : En utilisant un PFD au point matériel dans le référentiel terrestre (référentiel du tunnel) supposé galiléen² : $m \vec{a} = m \vec{g}$, et en projection sur \vec{u}_x :

$$m' \ddot{x} = -\frac{Gmm'}{R^3} x$$

et on retrouve donc l'oscillateur harmonique précédent.

Remarque : Tout ceci n'est évidemment pas très réaliste...



1. On ne peut se placer dans le référentiel géocentrique car le tunnel tournerait autour de l'axe de rotation de la Terre dans ce cas... On peut souligner le fait que le caractère galiléen de ce référentiel est discuté ensuite.

2. Il ne s'agit ici pas d'une si mauvaise approximation car $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}} = 6000 \text{ s} \ll 24 \text{ h}$.

10 Résolution de problème - 2001 l'odyssée de l'espace

1) Force d'entraînement

Dans le tore, il y a la force d'inertie d'entraînement qui vaut $mR\omega^2$. On cherche donc $R\omega^2 = g$, avec $\frac{\delta R}{R} = 10\%$. On pourra prendre $\delta R \approx 1,75$ m (la distance entre les pieds et la tête). D'où $R = 17,5$ m. Ainsi $\omega = \sqrt{\frac{9,81}{17,5}} = 0,75$ rad \cdot s $^{-1}$, soit une période de rotation de 8 s.

2) Force de Coriolis

Poole se déplace dans le vaisseau : il est soumis à la force d'inertie de Coriolis

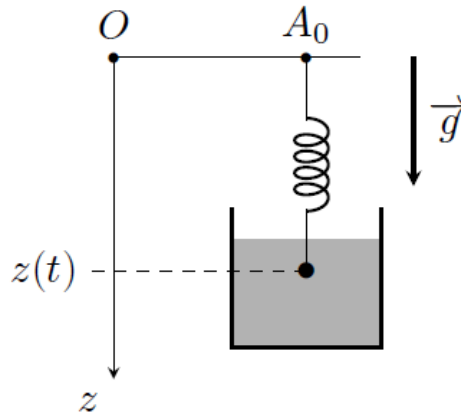
$$\vec{f}_{iC} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m\omega \vec{e}_z \wedge v_\theta \vec{e}_\theta = 2m\omega v_\theta \vec{e}_r$$

Si $v_\theta > 0$, il semble alors plus lourd, comme soumis à une pesanteur $g + \delta g$ avec

$$\delta g = 2\omega \cdot v_\theta$$

Si $v = 10$ km \cdot h $^{-1}$, $\delta g = 2 \times 0,56 \times \frac{10}{3,6} = 3,1$ m \cdot s $^{-2}$: il pèse 30% plus lourd !

11 Mesure d'une viscosité



1. On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) à l'équilibre à la bille dans le référentiel terrestre galiléen. La bille est soumise uniquement :

- à son poids : $m\vec{g} = mg \vec{e}_z$
- à la force élastique du ressort : $\vec{F}_r = -k(z_{\text{éq}} - \ell_0) \vec{e}_z$

En projection sur \vec{e}_z on a donc :

$$mg - k(z_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{z_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{g} > \ell_0}$$

2. a) Il faut ajouter la force de frottement due à la viscosité du liquide : $\vec{f} = -6\pi R\eta \vec{v}$. Le PFD en projection sur \vec{e}_z conduit maintenant à :

$$m\ddot{z} = mg - k(z - \ell_0) - 6\pi R\eta \dot{z} \quad \text{d'où} \quad \ddot{z} + \frac{6\pi R\eta}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{mg + k\ell_0}{m} = \frac{k}{m} z_{\text{éq}}$$

On peut donc poser :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m\omega_0}{6\pi R\eta} = \frac{\sqrt{km}}{6\pi R\eta}}$$

- b) Le régime est manifestement pseudo-périodique. L'équation caractéristique $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$ possède un discriminant $\Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) < 0$ et admet donc deux racines complexes conjuguées :

$$r_+ = -\frac{\omega_0}{2Q} + j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad r_- = -\frac{\omega_0}{2Q} - j\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

En introduisant la pseudo-pulsation $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$, la solution est de la forme :

$$z(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] + z_{\text{éq}}$$

$$z(0) = z_{\text{éq}} \implies A = 0 \quad \text{et donc} \quad :$$

$$\dot{z}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} B \sin(\omega t) + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} B \omega \cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad \dot{z}(0) = B \omega = v_0$$

Finalement on obtient :

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} \sin(\omega t) + z_{\text{éq}}$$

3. a) On a $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ d'où :

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \quad \text{donc} \quad T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

- b) Deux maxima successifs de $z(t)$ sont espacés temporellement de T secondes. De ce fait on a $t_n = t_1 + (n-1)T$ et il en résulte que :

$$z(t_n) = \frac{v_0}{\omega} e^{-\frac{\omega_0(t_1+(n-1)T)}{2Q}} \sin(\omega(t_1 + (n-1)T)) + z_{\text{éq}} = e^{-\frac{\omega_0(n-1)T}{2Q}} \frac{v_0}{\omega} e^{-\frac{\omega_0 t_1}{2Q}} \sin(\omega t_1) + z_{\text{éq}}$$

puisque $\omega T = 2\pi$. On remarque donc que :

$$z(t_n) - z_{\text{éq}} = e^{-\frac{\omega_0(n-1)T}{2Q}} (z(t_1) - z_{\text{éq}})$$

Compte-tenu du fait que $\omega_0 T_0 = 2\pi$, cette relation peut encore se mettre sous la forme :

$$\frac{z(t_n) - z_{\text{éq}}}{z(t_1) - z_{\text{éq}}} = e^{-\frac{2\pi(n-1)}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

- c) On lit sur le graphique : $z(t_1) = 69$ cm, $z(t_{10}) = 61,25$ cm et on peut supposer que $z_{\text{éq}} = 60$ cm. Il vient :

$$-\frac{2\pi(10-1)}{\sqrt{4Q^2-1}} = \ln\left(\frac{z(t_{10}) - z_{\text{éq}}}{z(t_1) - z_{\text{éq}}}\right) = -1,97 \quad \text{d'où} \quad 4Q^2 - 1 = \frac{4\pi^2 9^2}{1,97^2}$$

ce qui donne $Q = 14,3$ ce qui est un facteur de qualité élevé. De plus, comme :

$$6\pi R\eta = \frac{m\omega_0}{Q}$$

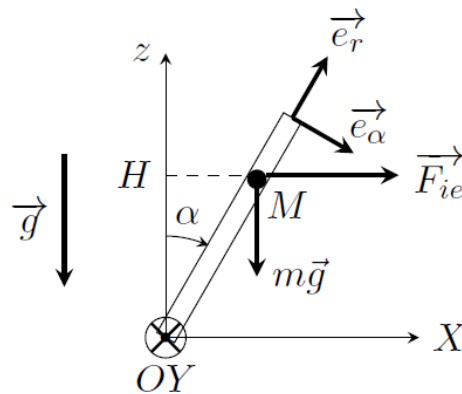
il faut encore mesurer ω_0 . Le graphique donne accès à la pseudo-période T . On lit $10T = 12$ s donc $T = 1,2$ s, ce qui conduit à :

$$T_0 = T \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \approx T$$

compte-tenu de la valeur élevée de Q . Il vient $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 5,2$ rad.s⁻¹ et, finalement :

$$\eta = \frac{m\omega_0}{6\pi R Q} = 0,44 \text{ uSI}$$

12 Bille dans un tube



1. Le référentiel (\mathcal{R}') est en rotation uniforme autour de l'axe Oz qui est un axe fixe du référentiel terrestre supposé galiléen. Ainsi (\mathcal{R}') est un référentiel non galiléen et il faut donc faire intervenir les forces d'inertie. La bille est soumise à :

- son poids : $m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\vec{e}_r + \sin\alpha\vec{e}_\alpha)$;
- La réaction du tube : $\vec{R} = R_\alpha\vec{e}_\alpha + R_Y\vec{e}_Y$;
- La force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HM} = m\omega^2r\sin\alpha\vec{e}_Y$ et donc :

$$\vec{F}_{ie} = m\omega^2r\sin\alpha(\cos\alpha\vec{e}_\alpha + \sin\alpha\vec{e}_r)$$

- La force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = 2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R}')$ avec $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ et $\vec{v}(M/\mathcal{R}') = \dot{r}\vec{e}_r$. On a donc :

$$\vec{F}_{ic} = 2m\omega(\cos\alpha\vec{e}_r - \sin\alpha\vec{e}_\alpha) \wedge \dot{r}\vec{e}_r = 2m\omega\sin\alpha\dot{r}\vec{e}_Y$$

2. a) Appliquons le principe fondamental de la dynamique à la bille dans le référentiel (\mathcal{R}'). En projection sur \vec{e}_r on obtient :

$$m\ddot{r} = -mg\cos\alpha + m\omega^2\sin^2\alpha r$$

et donc :

$$\boxed{\ddot{r} - \omega^2\sin^2\alpha r = -g\cos\alpha}$$

b) La bille est soumise à deux forces conservatives : $m\vec{g}$ et \vec{F}_{ie} . Les deux forces non conservatives \vec{F}_{ic} et \vec{R} ne travaillent pas. Il y a donc conservation de l'énergie mécanique de la bille dans (\mathcal{R}').

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mgz - \frac{m\omega^2}{2}HM^2 = \text{Cste}$$

et donc :

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + mgr\cos\alpha - \frac{m\omega^2}{2}r^2\sin^2\alpha = \text{Cste}$$

En dérivant par rapport au temps on obtient :

$$m\dot{r}\ddot{r} + m\dot{r}\cos\alpha - m\omega^2r\dot{r}\sin^2\alpha = 0$$

ce qui conduit à, après simplification par $m\dot{r}$:

$$\boxed{\ddot{r} - \omega^2\sin^2\alpha r = -g\cos\alpha}$$

3. L'équation caractéristique s'écrit : $X^2 - \omega^2\sin^2\alpha = 0$ et elle admet deux racines réelles $X_\pm = \pm\omega\sin\alpha$. La solution prend la forme :

$$r(t) = A\text{ch}(\omega\sin\alpha t) + B\text{sh}(\omega\sin\alpha t) + \frac{g\cos\alpha}{\omega^2\sin^2\alpha}$$

Les conditions initiales donnent :

$$r(0) = A + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} = r_0 \quad \text{et} \quad \dot{r}(0) = B\omega \sin \alpha = 0$$

d'où :

$$r(t) = \left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \text{ch}(\omega \sin \alpha t) + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

La bille ne peut sortir du tube que si pour $t > 0$, $v(t) = \dot{r}(t) > 0$, ce qui conduit à :

$$\left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \omega \sin \alpha \text{sh}(\omega \sin \alpha t) > 0 \quad \text{pour } t > 0$$

d'où :

$$r_0 > \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}$$

La bille sort en $r = L$ au temps t_1 vérifiant :

$$\left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \text{ch}(\omega \sin \alpha t_1) + \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} = L$$

d'où :

$$t_1 = \frac{1}{\omega \sin \alpha} \arg \text{ch} \left(\frac{L - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}}{r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha}} \right)$$

13 Frottements solides

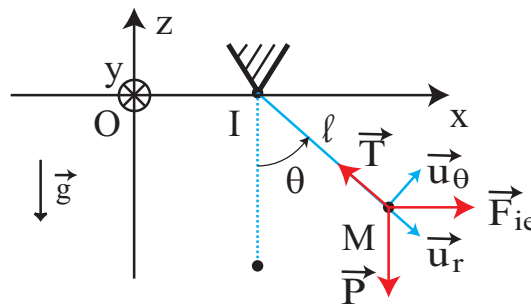
Réponses : 1. $m(\sin \alpha - f \cos \alpha) < M_{eq} < m(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ 2. $(m + M)\ddot{x} = Mg - mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$.
 Corrigé complet mis en ligne plus tard.

14 Oscillations d'une tige

Corrigé mis en ligne plus tard.

15 Pendule soumis à une excitation sinusoïdale

1. Le référentiel \mathcal{R}' est non galiléen car il est accéléré par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen.
2. Dans ce référentiel, les forces qui s'exercent sur le point M sont le poids, la tension du fil et la force d'inertie d'entraînement (pas de force d'inertie de Coriolis car les deux référentiels sont en translation l'un par rapport à l'autre).



Dans la base mobile, en coordonnées cylindriques, on obtient :

- le poids : $\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$
- la tension du fil : $\vec{T} = -T \vec{u}_r$

— la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = -m\ddot{x}\vec{u}_x = -m\ddot{x}(\cos\theta\vec{u}_\theta - \sin\theta\vec{u}_r)$,
donc $\vec{F}_{ie} = m\omega^2 x_0 \sin(\omega t)(\cos\theta\vec{u}_\theta - \sin\theta\vec{u}_r)$

3. On applique le théorème du moment cinétique au point M par rapport au point I fixe dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\frac{d\vec{L}_I}{dt} = \vec{M}_I(\vec{P}) + \vec{M}_I(\vec{T}) + \vec{M}_I(\vec{F}_{ie})$$

or $\vec{L}_I = \ell\vec{u}_r \wedge m\ell\dot{\theta}\vec{u}_\theta = m\ell^2\dot{\theta}(-\vec{u}_y)$ (attention, l'angle θ est ici orienté négativement par rapport à \vec{u}_y , d'où le signe "-"). De plus, en utilisant les bras de levier, $\vec{M}_I(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta(-\vec{u}_y) = mg\ell\sin\theta\vec{u}_y$, $\vec{M}_I(\vec{T}) = \vec{0}$, et $\vec{M}_I(\vec{F}_{ie}) = \ell\cos\theta(-m\ddot{x})(-\vec{u}_y) = -\ell m\omega^2 x_0 \cos\theta \sin(\omega t)\vec{u}_y$. En projection sur \vec{u}_y , on obtient donc :

$$-m\ell^2\ddot{\theta} = mg\ell\sin\theta - m\ell\omega^2 x_0 \cos\theta \sin(\omega t)$$

Et dans la limite des petits angles :

$$-m\ell^2\ddot{\theta} = mg\ell\theta - m\ell\omega^2 x_0 \sin(\omega t) \quad \text{soit} \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = \frac{\omega^2 x_0}{\ell}\sin(\omega t)$$

donc en posant $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$ et $a = \frac{x_0}{\ell}$:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = a\omega^2\sin(\omega t)}$$

4. Il s'agit de l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique forcé. La solution particulière peut être recherchée directement sous la forme $\theta_p(t) = A\sin(\omega t)$ d'après la linéarité de l'équation et sa forme, donc :

$$-\omega^2 A + A\omega_0^2 = a\omega^2 \quad \text{soit} \quad A = a\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

On peut donc en déduire :

$$\theta(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t + a\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t$$

où B et C sont déterminés par rapport aux conditions initiales :

$$\theta(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0.$$

$$\dot{\theta}(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C\omega_0 + a\omega\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0, \text{ donc } C = -a\frac{\omega^3}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \text{ Finalement :}$$

$$\boxed{\theta(t) = -a\frac{\omega^3}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}\sin\omega_0 t + a\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin\omega t}$$

On peut vérifier la validité de la formule, en dehors de son homogénéité, pour des valeurs particulières de ω :

- pour $\omega = 0$, on a bien $\theta(t) = 0$ pour tout t , ce qui est normal si $\theta(t=0) = 0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.
- pour $\omega \rightarrow \omega_0$, il y a résonance puisqu'on excite l'oscillateur à sa fréquence propre, et $\theta(t) \rightarrow \infty$. Ceci est cohérent ici puisqu'on a négligé les frottements, et on se place dans le cadre des petites oscillations. En pratique, on aurait juste des oscillations plus importantes autour de $\omega = \omega_0$.
On s'attend dans ce dernier cas à un comportement chaotique puisqu'on aura une grande sensibilité aux conditions initiales autour de $\omega = \omega_0$.

ELECTROMAGNETISME ET PHYSIQUE DES ONDES

16 Sphère chargée créant un champ de module constant

1. Choix du système de coordonnées : sphériques vue les symétrie de la distribution de charges.

Étude des symétries : les plans contenant O et M sont des plans de symétrie de la distribution de charges donc d'après le principe de Curie, ce sont aussi des plans de symétrie pour $\vec{E}(M)$. On en déduit que $\vec{E}(M) \in$ plans contenant O et M et donc à leur intersection : $\vec{E}(M) // \vec{u}_r$.

Étude des invariances : la distribution de charges est invariante par rotation d'angle θ et φ quelconques donc $E(r, \theta, \varphi) = E(r)$.

On a donc $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r$. Le théorème de Gauss donne alors, avec comme surface d'application la sphère de rayon r passant par M :

$$\begin{aligned} \oiint \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ \oiint E(r)\vec{u}_r \cdot dS(\theta, \varphi)\vec{u}_r &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho(r) d\tau \\ E(r) \oiint dS(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^r r^2 \rho(r) dr \iint d\theta \sin(\theta) d\varphi \\ 4\pi r^2 E(r) &= \frac{4\pi}{\epsilon_0} \int_0^r r^2 \rho(r) dr \\ E(r) &= \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r^2 \rho(r) dr \end{aligned}$$

Pour que $E(r) = E_0 = C^{te}$, il faut donc que $\rho(r) \propto \frac{1}{r}$: soit a tel que $\rho(r) = \frac{a}{r}$.

Alors, $\epsilon_0 E_0 r^2 = a \frac{r^2}{2}$ donc $a = 2\epsilon_0 E_0$. On a donc $\rho(r) = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r}$.

2. $Q_{tot} = \iiint \rho(r) d\tau = \iiint \frac{2\epsilon_0 E_0}{r} d\tau = 2\epsilon_0 E_0 \int_0^R \frac{r^2}{r} dr \iint d\theta \sin(\theta) d\varphi = 2\epsilon_0 E_0 \int_0^R r dr \times 4\pi$

donc $Q_{tot} = 4\pi R^2 \epsilon_0 E_0$ (on peut aussi repartir de $E_0 4\pi R^2 = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$).

Si $r > R$: $E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{tot}}{\epsilon_0}$ donne $\vec{E} = \frac{R^2}{r^2} E_0 \vec{u}_r$; or $\vec{E} = -\text{grad}V$ donc $V = \frac{R^2 E_0}{r} + C_1^{te}$. En prenant comme

convention $V \xrightarrow[r \rightarrow \infty]{} 0$, on a $C_1^{te} = 0$: $V(r \geq R) = \frac{R^2 E_0}{r}$.

Si $r \leq R$: $\vec{E} = E_0 \vec{u}_r = -\text{grad}V$ donne $V(r) = -E_0 r + C_2^{te}$. Comme V est continu, on a $-E_0 R + C_2^{te} = \frac{R^2 E_0}{R}$ donc $C_2^{te} = 2E_0 R$: $V(r \leq R) = E_0(-r + 2R)$.

Remarque : Loin de la sphère, on retrouve l'expression du champ créé par une charge ponctuelle. De plus, le champ est bien continu à la surface de la sphère, car il n'existe pas de charges surfaciques.

17 Spectrographe de Bainbridge

Il y a plusieurs méthodes plus ou moins longues pour faire cet exercice. Même si le réflexe est d'appliquer directement le PFD aux ions et de projeter dans la base cartésienne³, il est beaucoup plus rapide d'utiliser directement le fait que la trajectoire est circulaire lorsque l'ion est en présence du champ magnétique.

Pour un ion de charge $+e$, le PFD donne, en projection sur \vec{e}_r , vecteur radial dans la base polaire $(C, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ associée au mouvement circulaire, où C est le centre du cercle (attention au signe pour la force de Lorentz $\vec{F}_L = e\vec{v} \wedge \vec{B}$) :

$$-m \frac{v^2}{R} = -evB \quad \text{soit} \quad v = R\omega_c \quad \text{avec} \quad \omega_c = \frac{eB}{m}$$

3. On obtient alors des équations différentielles couplées qu'il faut découpler et résoudre, avec les méthodes classiques. On rappelle que la méthode qui consiste à poser $X = \dot{x} + iy$ est certes élégante, mais aussi longue, et conduit généralement à beaucoup d'erreurs.

La vitesse des ions est ici constante et égale à celle au niveau de la fente qui résulte d'un transfert d'énergie potentielle en énergie cinétique dans l'accélérateur, donc $\frac{1}{2}mv^2 = eU$, soit

$$v = \frac{2eU}{m}$$

On peut en déduire le rayon de la trajectoire circulaire d'un ion de masse $m = \frac{M}{N_A}$ dans le spectrographe :

$$R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}}$$

On obtient alors, pour deux ions de masses molaires M_1 et M_2 différentes, une distance d entre les deux impacts sur la plaque photographique donnée par :

$$d = 2(R_1 - R_2) = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2U}{eN_A}} |\sqrt{M_1} - \sqrt{M_2}| = 5\text{cm}$$

Cette distance est très facile à mesurer avec des détecteurs. On peut donc distinguer facilement deux isotopes avec ce type de spectrographe, encore appelé spectrographe de masse. On notera que les données pour U et B ne sont pas trop difficiles à réaliser en laboratoire, ce qui explique que le premier spectrographe ait été construit dès 1918, et que de tels appareils puissent même être transportables comme en témoigne la photo ci-dessous qui correspond à un modèle récent.



18 Câble coaxial

Corrigé mis en ligne plus tard.

19 Solénoïde en régime lentement variable

- $a = 1\text{cm} \ll c\tau = c \frac{L}{R} = 3\text{km}$: ARQS magnétique vérifiée.
- (a) Dans l'ARQS magnétique, le champ \vec{B} se calcule comme en statique :

$$\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$$

à l'intérieur du solénoïde, $\vec{0}$ à l'extérieur.

- (b) Par invariance, $\vec{E}(r)$. Dans la région sans charges, la seule source de champ \vec{E} est le champ \vec{B} , via l'équation $\text{Rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Par analogie avec la magnétostatique, \vec{E} est donc orthogonal à un plan de symétrie de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. En un point M donné, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie de $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, d'où $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$.

(c) La loi de FARADAY donne :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = E(r, t) 2\pi r = -\frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = -\pi r^2 \frac{dB(t)}{dt}$$

en choisissant comme contour Γ le cercle d'axe Oz et de rayon r .

$$\vec{E} = \frac{\mu_0 n I_0 r}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{u}_\theta$$

3. (a) $u_e = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{r}{2\tau} \right)^2 B^2(t)$, et $u_m = \frac{B^2(t)}{2\mu_0}$.

Le rapport $\left(\frac{u_e}{u_m} \right)$ vaut donc :

$$\frac{u_e}{u_m} = \left(\frac{r}{2c\tau} \right)^2$$

avec $|r| \leq a$. Dans le cadre de l'ARQS, ce rapport est négligeable, et $u_{em} \simeq u_m = \frac{B^2(t)}{2\mu_0}$.

(b) $\vec{\pi} = \frac{r B^2(t)}{\tau 2\mu_0} \vec{u}_r$.

(c) L'espace à l'intérieur du solénoïde est vide, donc $\mathcal{P}_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$.

(d) On a $\text{div} \vec{\pi} = \frac{B^2(t)}{2\mu_0 \tau} \text{div}(r \vec{u}_r) = \frac{B^2(t)}{\mu_0 \tau}$ en utilisant le formulaire d'analyse vectorielle.

On vérifie donc bien que $\text{div} \vec{\pi} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0$.

4. (a) Pour une portion de solénoïde de longueur h , $U_e = \frac{\epsilon_0 \pi a^4 h}{16\tau^2} B^2(t)$ et $U_m = \frac{B^2(t)}{2\mu_0} \pi a^2 h$.

D'où $\frac{U_e}{U_m} = \frac{1}{8} \left(\frac{a}{c\tau} \right)^2 \ll 1$ à nouveau.

(b) $L = \mu_0 n^2 \pi a^2 h$.

(c) $\Phi(t) = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{\pi}(r=a, t) \cdot d\vec{S} = \pi a^2 h \frac{B^2(t)}{\tau \mu_0}$

(d) Là encore, le solénoïde étant vide, $\mathcal{P}_V = 0$.

(e) On a bien $\frac{dU_{em}(t)}{dt} + \Phi(t) = 0$.

20 GPS

1. Avec la notation complexe $\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$, on a

$$\underline{\vec{j}} = -i \frac{ne^2}{m\omega} \underline{\vec{E}}$$

2. L'équation de MAXWELL-AMPÈRE s'écrit :

$$-i\vec{k} \wedge \underline{\vec{B}} = \mu_0 \underline{\vec{j}} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \underline{\vec{E}}$$

En remplaçant $\underline{\vec{B}}$ grâce à l'équation de MAXWELL-FARADAY, $\underline{\vec{B}} = \frac{\vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}{\omega}$, on en déduit :

$$\left(\vec{k}^2 + \frac{\mu_0 n e^2}{m} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{\vec{E}} = \vec{0}$$

Cela conduit à la relation de dispersion demandée, avec la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$.

3. Si $\omega < \omega_p$, l'onde est absorbée (onde évanescente). Elle ne peut se propager dans le plasma que si $\omega > \omega_p$.

En différenciant la relation de dispersion, $kdk = \frac{\omega d\omega}{c^2}$, on peut donc calculer la vitesse de groupe :

$$v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

4. $\tau = \frac{H}{v_g} + \frac{D-H}{c}$, ce qui grâce à un développement limité par rapport à f_p/f , donne :

$$\tau \simeq \frac{D}{c} \left(1 + \frac{H}{2D} \frac{f_p^2}{f^2} \right)$$

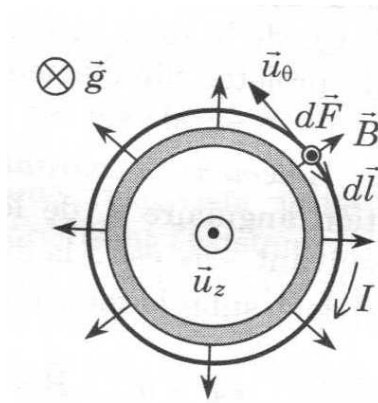
5. Comme $f_2 > f_1$, les temps de parcours sont tels que $\tau_1 > \tau_2$. En reprenant l'expression précédente de τ , on montre :

$$\Delta t = \frac{H f_p^2}{2cD} \frac{f_2^2 - f_1^2}{f_1^2 f_2^2}$$

6. En combinant les résultats des deux questions précédentes, on aboutit à l'expression demandée pour d . Ce terme représente l'erreur sur la position faite en négligeant la dispersion. Son ordre de grandeur est bien supérieur à la précision voulue pour la localisation par GPS. Il faut donc en tenir compte dans le traitement des signaux.

21 Léviton magnétique d'une bobine

1. Le champ magnétique radial $\vec{B} = B \vec{u}_r$ de l'aimant exerce sur un élément de courant $I d\vec{l}$ quelconque de la bobine la force de Laplace élémentaire $d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}$ de sorte que le trièdre $(I d\vec{l}, \vec{B}, d\vec{F})$ est direct.



Par conséquent, pour que $d\vec{F}$ soit orientée vers le haut (dans le sens de (Oz)), il est nécessaire que le courant d'intensité I circule dans le sens horaire autour de (Oz) , c'est-à-dire dans le sens opposé à \vec{u}_θ en coordonnées cylindriques.

2. La bobine de longueur totale $\ell = 2\pi Na$ est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ et à la force de Laplace

$$\vec{F} = \int_{\text{bobine}} I d\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_{\text{bobine}} -I dl \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_r = IB\ell \vec{u}_z = 2\pi NaB \vec{u}_z$$

Pour que la bobine soit immobile en lévitation, la résultante de ces deux forces doit être nulle, ce qui nécessite une intensité électrique

$$I = \frac{mg}{2\pi NaB}$$

dans le sens de $-\vec{u}_\theta$.

L'application numérique conduit à

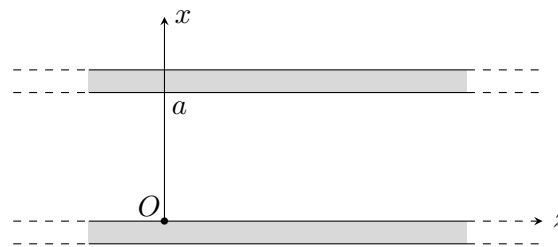
$$I = \frac{0,5 \times 10}{2\pi \times 100 \times 5 \cdot 10^{-2} \times 1} \Rightarrow \boxed{I \approx 160 \text{ mA}}$$

valeur tout-à-fait raisonnable.

22 Électromagnétisme

Un guide d'onde est constitué de deux plaques métalliques réalisées dans un métal parfait parallèles entre elles et situées en $x = 0$ et $x = a$. Ces plaques sont illimitées dans les directions Oy et Oz . Une onde électromagnétique se propage entre ces deux plaques, le milieu étant assimilé au vide. Le champ électrique de l'onde pour $0 < x < a$ est donné par :

$$\vec{E} = E_m \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_y \quad E_m \text{ réel} > 0 \quad (1)$$



On rappelle la relation de passage du champ électrique à une interface portant une densité surfacique de charges σ :

$$\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12}$$

1. a) Un métal parfait est un conducteur ohmique dont la conductivité électrique γ tend vers l'infini. La loi d'Ohm locale $\vec{E} = \vec{j}/\gamma$ impose alors que $\vec{E} = \vec{0}$ en tout point du volume du métal puisque \vec{j} reste fini.
- b) Pour le plan $x = 0$, prenons M_2 dans le vide et M_1 dans la plaque inférieure. On a alors $\vec{n}_{12} = \vec{e}_x$ et la relation de passage s'écrit :

$$\vec{E}(x = 0^+) - \vec{E}(x = 0^-) = \frac{\sigma(0)}{\varepsilon_0} \vec{e}_x \quad \text{donc} \quad \vec{E}(x = 0^+) = \frac{\sigma(0)}{\varepsilon_0} \vec{e}_x$$

En projetant cette équation sur \vec{e}_x et \vec{e}_y on obtient :

$$\boxed{\sigma(0) = 0}$$

Le même raisonnement effectué pour la plan $x = a$ conduit à :

$$\vec{E}(x = a^+) - \vec{E}(x = a^-) = \frac{\sigma(a)}{\varepsilon_0} \vec{e}_x \quad \text{donc} \quad -\vec{E}(x = a^-) = \frac{\sigma(a)}{\varepsilon_0} \vec{e}_x$$

Les projections conduisent à :

$$\sin(\alpha a) = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma(a) = 0}$$

On en déduit que $\alpha a = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ d'où $\boxed{\alpha = \frac{n\pi}{a}}$.

2. L'onde n'étant pas une OPPS on ne peut pas appliquer la relation de structure. Pour calculer \vec{B} il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday. Il vient :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \vec{e}_x - \frac{\partial E_x}{\partial x} \vec{e}_z$$

donc :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -E_m [ik \sin(\alpha x) \vec{e}_x + \alpha \cos(\alpha x) \vec{e}_z] \exp[i(\omega t - kz)]$$

d'où :

$$\vec{B} = -E_m \left[\frac{k}{\omega} \sin(\alpha x) \vec{e}_x + \frac{\alpha}{i\omega} \cos(\alpha x) \vec{e}_z \right] \exp[i(\omega t - kz)]$$

On ne tient pas compte de la "constante d'intégration" (qui dépend en fait de x , y et z) et qui correspond à un champ magnétique stationnaire puisqu'on ne s'intéresse qu'aux ondes.

3. Dans le vide entre les deux plaques, \vec{E} satisfait à l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$$

ce qui conduit à :

$$\left[-\alpha^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] E_y = 0$$

Comme $E_y \neq 0$ on en déduit que :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2$$

Pour que l'onde puisse se propager il est nécessaire que k soit un réel positif, ce qui implique que :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha^2 > 0 \quad \text{donc} \quad \omega > c\alpha = \frac{c\pi}{a}$$

Dans le cas où $\omega < \frac{c\pi}{a}$, $k^2 < 0$ ce qui conduit à $k = -i\kappa$ et donc :

$$\vec{E} = E_m \sin(\alpha x) e^{-\kappa z} e^{i\omega t} \vec{e}_y$$

Il s'agit d'une onde stationnaire évanescente.

4. On ferme le guide par une paroi parfaitement conductrice en $z = L$, ce qui produit une onde réfléchie dont le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}_r = \underline{r} E_m \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp[i(\omega t + kz)] \vec{e}_y$$

où \underline{r} est le coefficient de réflexion.

a) On se place en $z = L$:

$$\vec{E}(z = L^+) - \vec{E}(z = L^-) = \frac{\sigma(L)}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

La projection de cette équation sur \vec{e}_z conduit à :

$$E_m \sin(\alpha x) \exp[i(\omega t - kL)] + \underline{r} E_m \sin(\alpha x) \exp[i(\omega t + kL)] = 0$$

Pour $x \neq 0$ on obtient :

$$\underline{r} = -e^{-2ikL}$$

b) Le champ résultant est la somme du champ électrique incident et réfléchi. il vient :

$$\vec{E} = E_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} \left[e^{-ikz} - e^{-2ikL} e^{ikz} \right] \vec{e}_y$$

donc :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} e^{-ikL} \left[e^{-ikz} e^{ikL} - e^{-ikL} e^{ikz} \right] \vec{e}_y \\ &= E_m \sin(\alpha x) e^{i\omega t} e^{-ikL} 2i \sin[k(L-z)] \vec{e}_y \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\vec{E} = 2E_m \sin(\alpha x) \sin[k(z-L)] \sin(\omega t - kL) \vec{e}_y$$

il s'agit d'une onde stationnaire. Pour $x \neq 0$, les nœuds de champ électrique sont donnés par $\sin[k(z-L)] = 0$, d'où :

$$k(z-L) = m\pi \iff z = L + \frac{m\pi}{k}, \quad m = 0, -1, -2, \dots$$

23 Induction électromagnétique

Corrigé mis en ligne plus tard.

24 Électromagnétisme - Thermodynamique

Une OPPM de vecteur $\vec{E} = E_{0i} \exp[i(\omega t - k_i z)] \vec{e}_x$ (E_{0i} réel > 0) arrive en incidence normale depuis le vide ($z < 0$) sur un métal occupant le demi-espace $z > 0$. Caractéristiques du métal : conductivité électrique γ , conductivité thermique κ , masse volumique μ , capacité calorifique massique c . Dans le métal, on note \vec{j}_e et \vec{j}_Q les vecteurs densité de courant électrique et thermique.

On étudie la variation de température à l'intérieur du métal dans lequel on suppose que la densité volumique de charges $\rho_e = 0$.

1. On a :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = i\omega \varepsilon_0 \vec{E}$$

Il vient :

$$\frac{\|\vec{j}_d\|}{\|\vec{j}\|} = \frac{\varepsilon_0 \omega}{\gamma} \ll 1 \iff \omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0}$$

L'équation de Maxwell-Ampère devient donc :

$$\text{rot} \vec{E} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}$$

Comme la densité volumique de charges ρ_e est nulle dans le métal, on a :

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E} = \text{grad} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

De plus :

$$\text{rot} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{B} = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

et donc :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

2. On obtient :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \underline{k}^2 = -i\mu_0 \gamma \omega = e^{-i\pi/2} \mu_0 \gamma \omega$$

On en déduit que :

$$\underline{k} = \pm e^{-i\pi/4} \sqrt{\mu_0 \gamma \omega} = \pm \frac{1-i}{\delta}$$

Afin d'assurer une propagation dans le sens $+\vec{e}_z$ on choisit le signe $+$, ce qui donne finalement :

$$\boxed{\underline{k} = \frac{1-i}{\delta}}$$

3. Le champ électrique réfléchi peut se mettre sous la forme :

$$\vec{E}_r = \underline{E}_{0r} \exp [i(\omega t + k_i z)] \vec{e}_x$$

et les champs magnétiques associés s'écrivent :

$$\vec{B}_i = \frac{k_i \vec{e}_x \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{k_i}{\omega} E_{0i} \exp [i(\omega t - k_i z)] \vec{e}_z$$

$$\vec{B}_r = \frac{-k_i \vec{e}_x \wedge \vec{E}_r}{\omega} = -\frac{k_i}{\omega} \underline{E}_{0r} \exp [i(\omega t + k_i z)] \vec{e}_z$$

et

$$\vec{B}_t = \frac{\underline{k} \vec{e}_x \wedge \vec{E}_t}{\omega} = \frac{\underline{k}}{\omega} \underline{E}_m \exp [i(\omega t - \underline{k}z)] \vec{e}_z$$

Le continuité en $z = 0$ impose les deux équations :

$$E_{0i} + \underline{E}_{0r} = \underline{E}_m \quad \text{et} \quad k_i (E_{0i} - \underline{E}_{0r}) = \underline{k} \underline{E}_m$$

De plus $k_i = \omega/c$. L'élimination de E_{0r} conduit au résultat :

$$\boxed{\underline{E}_m = \frac{2 E_{0i}}{1 + \frac{c(1-i)}{\delta \omega}}}$$

4. On sait que $p_J = \vec{j}_e \cdot \vec{E}_t = \gamma \vec{E}_t \cdot \vec{E}_t$. Pour calculer la puissance motyenne on peut s'aider de la relation :

$$\langle p_J \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\vec{E}_t \cdot \vec{E}_t^*] = \frac{1}{2} \text{Re} [\underline{E}_m e^{i\omega t} e^{-z/\delta} e^{-iz/\delta} \vec{e}_z \cdot \underline{E}_m^* e^{-i\omega t} e^{-z/\delta} e^{iz/\delta} \vec{e}_z]$$

et donc :

$$\boxed{\langle p_J \rangle = \frac{|\underline{E}_m|^2}{2} e^{-2z/\delta} = \frac{2E_{0i}^2}{\left(1 + \frac{c}{\delta \omega}\right)^2 + \frac{c^2}{\delta^2 \omega^2}} e^{-2z/\delta}}$$

5. a) Appliquons le premier principe entre les instants t et $t + dt$ à un cylindre métallique dont les deux sections, de même surface S , sont situées entre z et $z + dz$. En régime stationnaire l'énergie interne de la tranche ne varie pas, ce qui conduit à :

$$0 = j_Q(z) S dt - j_Q(z + dz) S dt + \langle p_J \rangle S dz dt$$

et donc :

$$\boxed{-\frac{dj_Q}{dz} + \langle p_J \rangle = 0}$$

b) Avec la loi de Fourier on a $j_Q(z) = -\kappa \frac{dT}{dz}$ et donc :

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{\langle pJ \rangle}{\kappa} = -\frac{|E_m|^2}{2\kappa} e^{-2z/\delta} = -\frac{2E_{0i}^2/\kappa}{(1 + \frac{c}{\delta\omega})^2 + \frac{c^2}{\delta^2\omega^2}} e^{-2z/\delta}$$

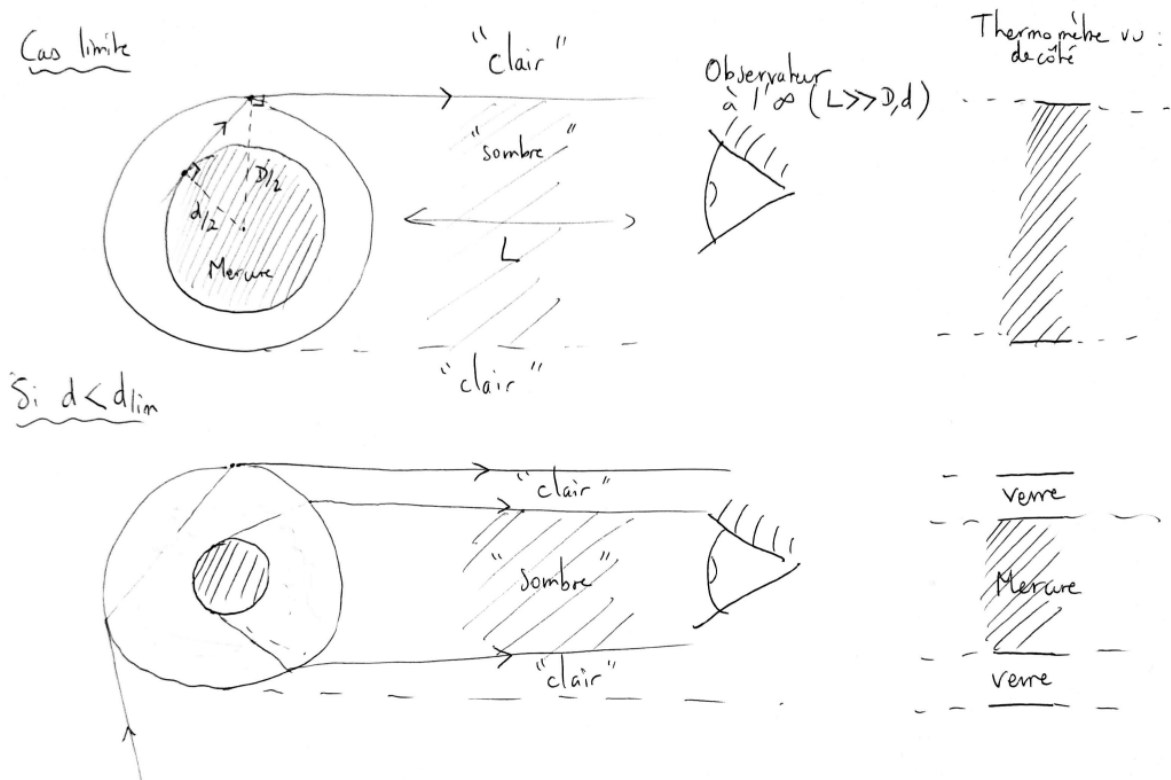
En intégrant on obtient :

$$T(z) = \frac{E_{0i}^2\delta/\kappa}{(1 + \frac{c}{\delta\omega})^2 + \frac{c^2}{\delta^2\omega^2}} e^{-2z/\delta} + T_0$$

OPTIQUE

25 Thermomètre à mercure

- Il suffit d'appliquer la loi de Descartes pour un rayon rasant le tube extérieur, qui doit nécessairement raser lui aussi le tube intérieur pour donner l'impression de voir du mercure dans cette direction.



La loi de Descartes donne dans le cas critique $n_{air} \sin(i_{air}) = n_{verre} \sin(i_{verre})$, or $i_{air} = \frac{\pi}{2}$ et $\sin(i_{verre}) = \frac{d/2}{D/2} = \frac{d}{D}$ par construction. Finalement : $d = D n_{air} / n_{verre} = 3.33mm$.

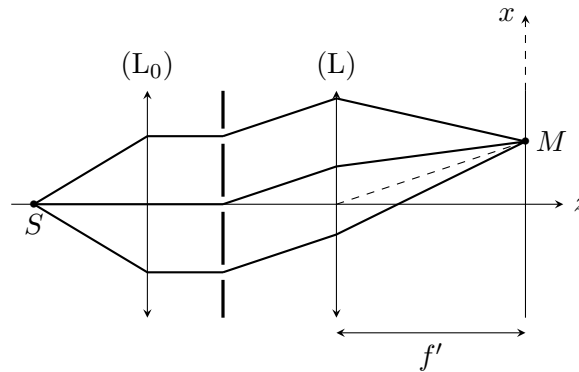
- Si on plonge le thermomètre dans l'eau, la condition à satisfaire est maintenant $d = D n_{eau} / n_{verre} = 4.3mm$, et nécessite donc un diamètre intérieur plus grand. On verra donc apparaître le verre.

26 Association de lentilles

Corrigé mis en ligne plus tard.

27 Trois trous d'Young

1. Schéma :



2. Soit $\tau_k = (SM)_k/c$ le temps de propagation de la lumière de S à M en passant par le trou T_k . En notant κ le coefficient de transmission des trous on obtient :

$$a_k(M, t) = \kappa a(t - \tau_k) \quad \text{donc} \quad \underline{a}_k(M, t) = \kappa \underline{a}(t - \tau_k) = \kappa A_m e^{-i\omega\tau_k} e^{i\omega t}$$

Il vient :

$$\frac{\underline{a}_2(M, t)}{\underline{a}_1(M, t)} = e^{i\omega(\tau_1 - \tau_2)} \quad \text{et} \quad \frac{\underline{a}_3(M, t)}{\underline{a}_1(M, t)} = e^{i\omega(\tau_1 - \tau_3)}$$

De plus $\tau_1 - \tau_2 = \frac{(SM)_1 - (SM)_2}{c} = \frac{ax}{cf'}$ et $\tau_1 - \tau_3 = \frac{(SM)_1 - (SM)_3}{c} = -\frac{ax}{cf'}$. On a donc :

$$\frac{\underline{a}_2(M, t)}{\underline{a}_1(M, t)} = e^{i\omega ax/cf'} = e^{i2\pi ax/\lambda f'} \quad \text{et} \quad \frac{\underline{a}_3(M, t)}{\underline{a}_1(M, t)} = e^{-i2\pi ax/\lambda f'}$$

d'où : $\varphi = \frac{2\pi ax}{\lambda f'}$.

3. La vibration lumineuse en M est la somme des trois vibrations (principe de superposition). On en déduit que :

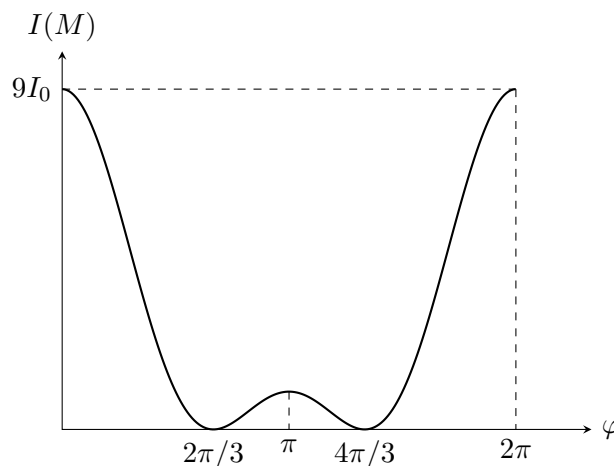
$$\underline{a}(M, t) = \underline{a}_1(M, t) + \underline{a}_2(M, t) + \underline{a}_3(M, t) = \underline{a}_1(M, t) [1 + e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}] = \underline{a}_1(M, t) [1 + 2\cos(\varphi)]$$

Il vient alors :

$$I(M) = \frac{|\underline{a}(M, t)|^2}{2} = \frac{\kappa^2 A_m^2}{2} (1 + 2\cos \varphi)^2$$

qui est de la forme demandée à condition de poser $I_0 = \frac{\kappa^2 A_m^2}{2}$

4. L'allure de la courbe est :

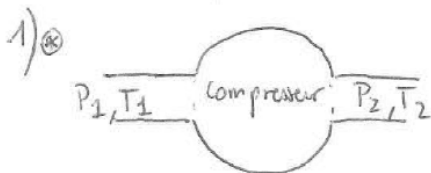


28 Interféromètre de Michelson

Corrigé mis en ligne plus tard.

THERMODYNAMIQUE

29 Compresseur et création d'entropie



Compression adiabatique: $PV^\gamma = \text{cste}$ (loi de Laplace)
 isentropique (réversible)
 car $dS = \underbrace{\delta S_{\text{éch}}}_0 + \underbrace{\delta S_c}_{\text{adiab.}} \Rightarrow \delta S_c = 0$ (réversible)

or $GP \Rightarrow PV = nRT$

$$\Rightarrow P \left(\frac{nRT}{P} \right)^\gamma = \text{cste} \Rightarrow P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cste} \Rightarrow P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_2^\gamma$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \boxed{401 \text{ K}} \text{ échauffement car } T_2 > T_1.$$

$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{C_p}{C_p - R} = 1,4$

⊗ En écoulement permanent, en négligeant la différence de vitesse avant et après le compresseur:

$$\Delta h = w_{m, \text{is}} + \underbrace{q_{m, \text{is}}}_0 \text{ car adia.} \Rightarrow \frac{C_p}{M} (T_2 - T_1) = w_{m, \text{is}} = \boxed{\frac{108 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}}{}} (= 3,14 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$$

$$2) \otimes w_{m, \text{réel}} = \frac{w_{m, \text{is}}}{\eta} = \underline{136 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}} (= 3,93 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$$

$$= \frac{C_p}{M} (T_2' - T_1) \Rightarrow T_2' = \boxed{429 \text{ K}} > T_2 \text{ il y a davantage d'échauffement}$$

⊗ $dU = Tds - PdV$ (identité thermo)

$$\Rightarrow dH = Tds + VdP$$

$$\Rightarrow ds = \frac{dh}{T} - \frac{v dP}{T} \quad \text{or } v = \frac{V}{m} = \frac{nRT}{mP} = \frac{RT}{PM} \text{ et } dh = \frac{C_p}{M} dT.$$

$$= \frac{C_p}{M} \frac{dT}{T} - \frac{R}{T} \frac{dP}{P}$$

$$\Rightarrow \Delta S = \frac{C_p}{M} \ln \frac{T_2'}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} = \Delta S_c \text{ car } \Delta S_{\text{éch}} = 0 \text{ (adiabatique).}$$

$$\underline{\Delta S_c = 66.3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}} > 0 \text{ il y a bien création d'entropie.}$$

30 Compression d'un gaz

On étudie un système constitué de n mol d'un gaz parfait, d'exposant adiabatique $\gamma = C_P/C_V$, à l'intérieur d'un cylindre calorifugé limité par un piston mobile. Dans la situation initiale le gaz est à la pression p_0 et occupe un volume V_0

1. Pour un gaz parfait l'énergie interne U et l'enthalpie H ne dépendent que de la température. De plus :

$$H = U + PV = U + nRT$$

d'où, par différentiation :

$$dH = dU = nR dT \quad \text{c'est à dire} \quad C_P dT = C_V dT + nR dT$$

et donc :

$$\boxed{C_P = C_V + nR}$$

2. a) Le gaz parfait subit une compression adiabatique réversible. Il s'agit d'appliquer la loi de Laplace : $pV^\gamma = \text{Cste}$:

$$p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma \quad \text{donc} \quad \boxed{V_1 = V_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{1/\gamma}}$$

- b) Le second principe de la thermodynamique appliqué aux n moles de gaz conduit à $\Delta S = S_E + S_C = 0$ puisque $S_E = 0$ (adiabatique) et $S_C = 0$ (réversible).

3. On part de la même situation initiale qu'à la question précédente. On élève la pression sur la face externe du piston à la valeur $p_1 > p_0$ tout en le maintenant immobile, puis on le lâche en maintenant cette pression extérieure constante à tout instant.

- a) Le travail des forces de pression s'écrit :

$$W_P = - \int_{V_0}^{V_2} p_1 dV = -p_1 (V_2 - V_0)$$

La transformation étant adiabatique : $Q = 0$. On a donc :

$$U_2 - U_0 = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_0) = -p_1 V_2 + p_1 V_0$$

Or p_1 étant aussi la pression finale du gaz on a : $p_1 V_2 = nRT_2$ et $p_0 V_0 = nRT_0$ et donc :

$$\frac{p_1 V_2 - p_0 V_0}{\gamma - 1} = -p_1 V_2 + p_1 V_0 \iff \gamma p_1 V_2 = [p_0 + (\gamma - 1)p_1] V_0$$

ce qui donne :

$$\boxed{V_2 = \frac{V_0}{\gamma} \left[\gamma - 1 + \frac{p_0}{p_1} \right]}$$

- b) Le second principe appliqué aux n moles de gaz conduit maintenant à $\Delta S_2 = S_E + S_C$ avec $S_E = 0$ (adiabatique) et $S_C > 0$ (irréversible), d'où $\Delta S_2 > 0$.

4. a) Partons par exemple de la seconde identité thermodynamique :

$$dH = T dS + V dp \quad \text{d'où} \quad dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T} dp = \frac{C_P dT}{T} - \frac{nR}{p} dp$$

Or

$$T = \frac{pV}{nR} \iff dT = \frac{p dV + V dp}{nR}$$

et donc :

$$dS = \frac{C_P p dV}{nRT} + \frac{C_P V dp}{nRT} - \frac{dp}{p} = C_P \frac{dV}{V} + C_P \frac{dp}{p} - nR \frac{dp}{p}$$

Finalement à l'aide de la relation de Mayer on obtient :

$$dS = C_P \frac{dV}{V} + C_V \frac{dp}{p}$$

b) Intégrons la relation précédente entre les états 0 et 2 :

$$\Delta S_2 = C_P \int_{V_0}^{V_2} \frac{dV}{V} + C_V \int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = C_P \ln \left(\frac{V_2}{V_0} \right) + C_V \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right)$$

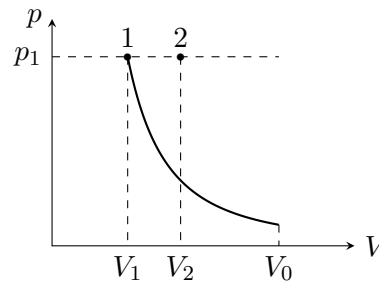
De la même façon entre les états 0 et 1 :

$$\Delta S_1 = 0 = C_P \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right) + C_V \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right)$$

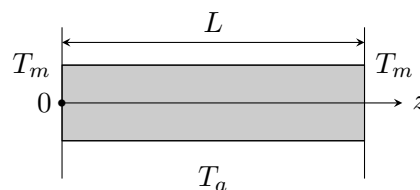
Par différence :

$$\Delta S_2 = C_P \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{V_2 = V_1 e^{\Delta S_2 / C_P}}$$

Comme $\Delta S_2 > 0$ on en déduit que $V_2 > V_1$, ce qui permet de dessiner le diagramme de Clapeyron :



31 Diffusion thermique



1. La loi de Fourier s'écrit :

$$\boxed{\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T}$$

où \vec{j}_Q est la densité de courant thermique, orthogonale aux surfaces isothermes. Le signe $-$ est nécessaire car \vec{j}_Q est dirigé des hautes vers les basses températures, contrairement à $\overrightarrow{\text{grad}} T$ qui est dirigé des basses vers les hautes températures.

2. a) On applique le premier principe entre t et $t + dt$ à une tranche de cylindre dont les deux bases, de surface πr^2 sont situées entre z et $z + dz$. En régime stationnaire il n'y a pas de variation d'énergie interne :

$$0 = j_Q(z) \pi r^2 dt - j_Q(z + dz) \pi r^2 dt - h(T(z) - T_a) 2\pi r dz = 0$$

ce qui conduit à :

$$-\frac{dj_Q}{dz} - \frac{2h}{r} (T(z) - T_a) = 0 \quad \text{avec} \quad j_Q(z) = -\lambda \frac{dT}{dz}$$

ce qui donne :

$$\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{2h}{\lambda r} (T(z) - T_a) = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{d^2T}{dz^2} - \frac{T(z) - T_a}{\delta^2} = 0}$$

avec $\boxed{\delta = \sqrt{\frac{\lambda r}{2h}}}$.

- b) L'équation caractéristique s'écrit $X^2 - 1/\delta^2 = 0$ et admet deux racines réelles $X_{\pm} = \pm \frac{1}{\delta}$. La solution générale s'écrit donc :

$$T(z) = A \operatorname{ch}\left(\frac{z}{\delta}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{z}{\delta}\right) + T_a$$

Les conditions aux limites en $z = 0$ et en $z = L$ sont la continuité de la température. On a donc $T(0) = T(L) = T_m$ et donc :

$$A = T_m - T_a \quad \text{et} \quad T_m - T_a = A \operatorname{ch}\left(\frac{L}{\delta}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{L}{\delta}\right)$$

ce qui entraîne :

$$\boxed{A = T_m - T_a \quad \text{et} \quad B = (T_m - T_a) \frac{1 - \operatorname{ch}\left(\frac{L}{\delta}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{L}{\delta}\right)}}$$

3. La puissance thermique élémentaire échangée avec l'air pour une surface élémentaire $2\pi r dz$ est :

$$\delta P_a = h (T(z) - T_a) 2\pi r dz = 2\pi r h \left[A \operatorname{ch}\left(\frac{z}{\delta}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{z}{\delta}\right) \right] dz$$

La puissance totale échangée avec l'air s'obtient par intégration sur z :

$$\begin{aligned} P_a &= 2\pi r h \int_0^L \left[A \operatorname{ch}\left(\frac{z}{\delta}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{z}{\delta}\right) \right] dz \\ &= 2\pi r h \delta \left[A \operatorname{sh}\left(\frac{L}{\delta}\right) + B \left(\operatorname{ch}\left(\frac{L}{\delta}\right) - 1 \right) \right] \\ &= 2\pi r h \delta \frac{T_m - T_a}{\operatorname{sh}\left(\frac{L}{\delta}\right)} \left[\operatorname{sh}^2\left(\frac{L}{\delta}\right) - \left(\operatorname{ch}\left(\frac{L}{\delta}\right) - 1 \right)^2 \right] \\ &= 4\pi r h \delta \frac{T_m - T_a}{\operatorname{sh}\left(\frac{L}{\delta}\right)} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{L}{\delta}\right) - 1 \right) \end{aligned}$$

ce qu'on peut aussi mettre sous la forme suivante, avec un peu de trigonométrie hyperbolique :

$$\boxed{P_a = 4\pi r h \delta (T_m - T_a) \operatorname{th}\left(\frac{L}{2\delta}\right)}$$

Le signe de P_a est celui de $T_m - T_a$: positif si $T_m > T_a$ (la tige reçoit de la chaleur de la part de l'air) et négatif si $T_m < T_a$ (la tige cède de la chaleur à l'air).

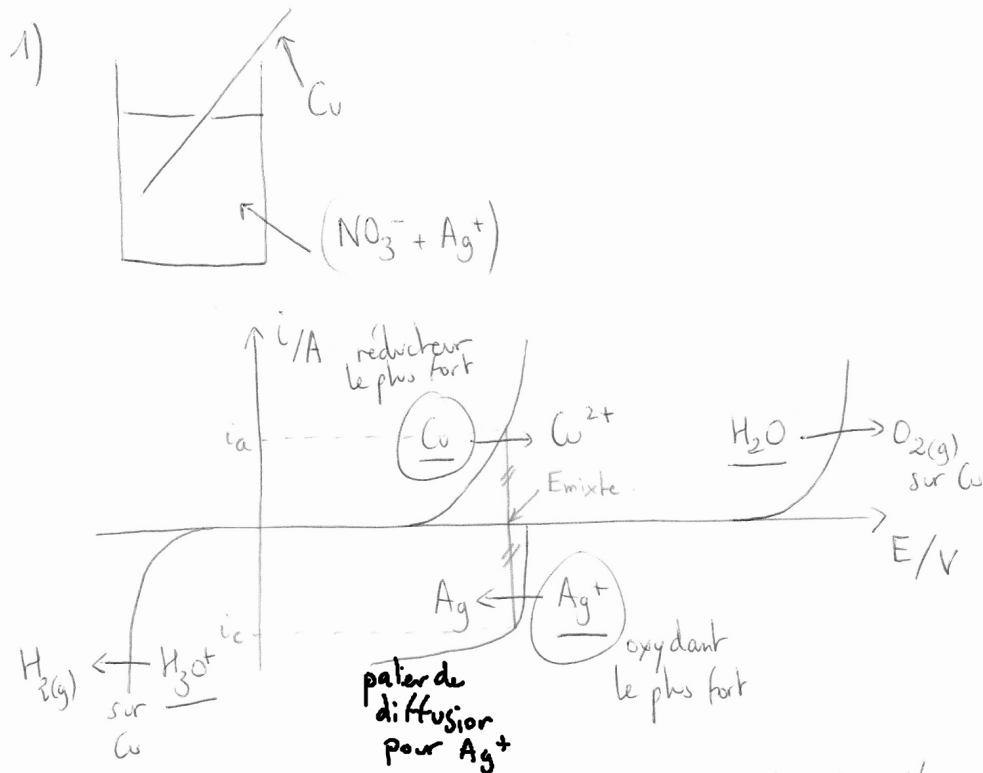
32 Machine thermique

Corrigé mis en ligne plus tard.

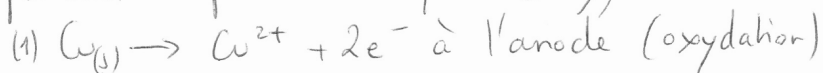
33 Barrage

Corrigé mis en ligne plus tard.

34 Raffinage électrolytique du cuivre



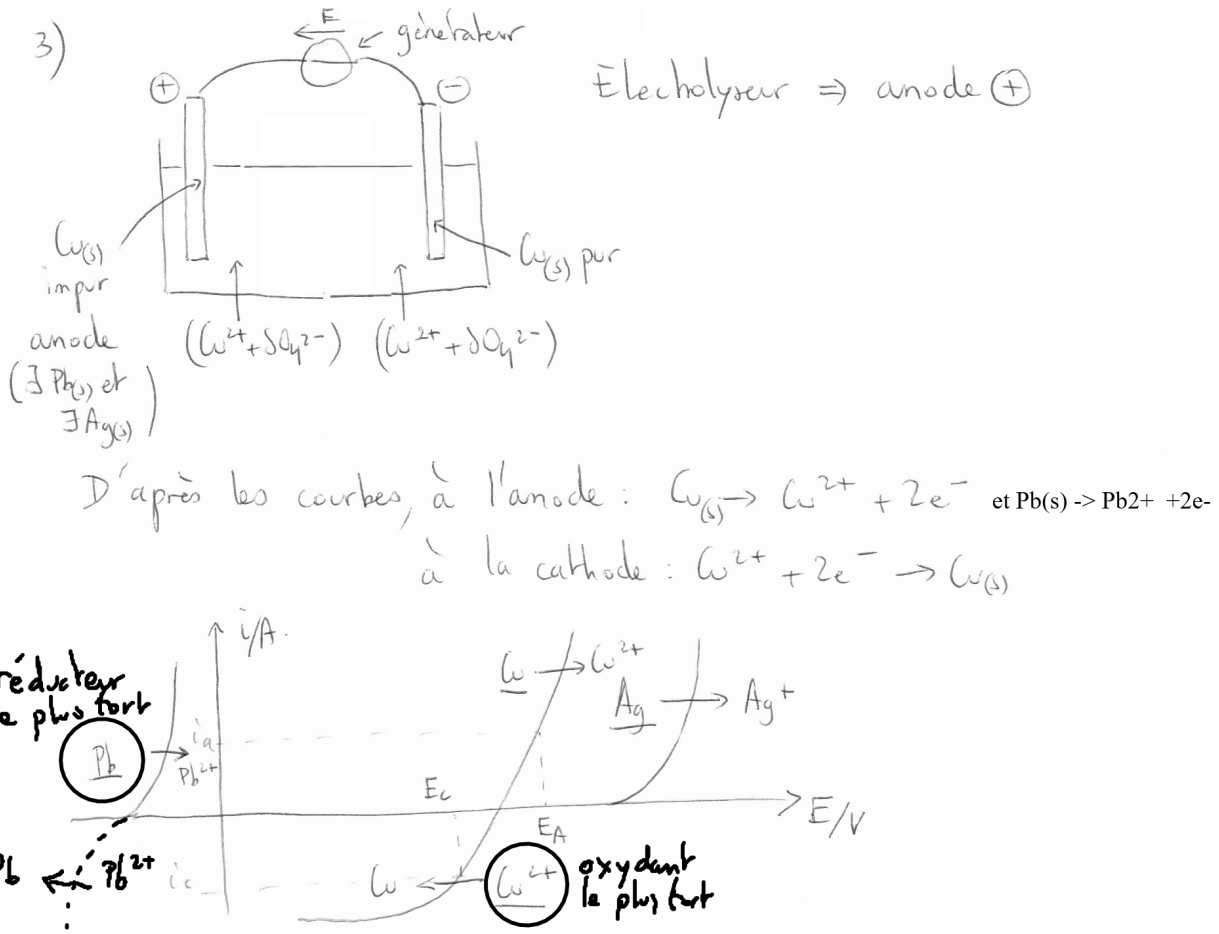
Pour déterminer la réaction qui a lieu, on cherche l'oxydant présent le plus fort : Ag^+ (il a un potentiel E le plus élevé que H_3O^+) qui va réagir sur le réducteur présent le plus fort : Cu (qui a un potentiel E plus faible que H_2O), donc :



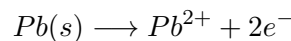
D'après la courbe intensité potentiel, il s'agit d'une réaction spontanée (cas du potentiel mixte du cours), et donc d'une réaction très avancée, avec :

$$\begin{aligned} \Delta_r G^\circ &= \Delta_{1/2} G^\circ(1) + 2\Delta_{1/2} G^\circ(2) \\ -RT \ln K^\circ &= 2F E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) - 2F E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag}) \\ -RT \ln 10 \log K^\circ &= 2F (E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) - E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag})) \\ K^\circ &= 10^{-2 \frac{E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) - E^\circ(\text{Ag}^+/\text{Ag})}{0,06}} = 10^{-2 \frac{[0,34 - 0,80]}{0,06}} = 2,2 \cdot 10^{15} \gg 1 \\ &\text{cohérent.} \end{aligned}$$

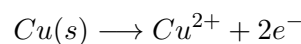
2) On cherche les courants i_a et i_c tq $i_a = -i_c$ au niveau d'un potentiel mixte unique (une seule solution ici) \rightarrow cf figure. Comme i_a est important, la réaction est rapide.



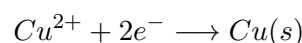
4°) Lorsque le potentiel de l'anode est porté au potentiel E_A , dans un premier temps, toutes les impuretés solides en Pb uniquement passent en solution sous la forme d'ions Pb^{2+} (mais pas les impuretés en argent), car on lit $i_{(A,Pb)} \rightarrow \infty$ et $i_{(A,Ag)} \simeq 0$:



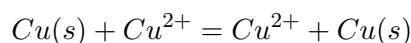
C'est ensuite (ou en même temps, mais moins rapidement) le cuivre qui est oxydé à l'anode :



A la cathode, lorsque celle-ci est portée au potentiel E_C , seul le cuivre se redépose (pas le plomb car on lit $i_{(C,Pb^{2+})} = 0$, et pas l'argent qui est resté sous forme solide à l'anode ou qui vient se déposer au fond du béccher sous forme solide).

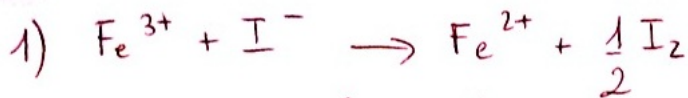


La véritable réaction bilan est donc



du $Cu(s)$ pur vient donc se déposer sur la cathode.

35 Ordre initial d'une réaction



$$v_0 = k [\text{Fe}^{3+}]_0^p [\text{I}^-]_0^q$$

Pour l'instant $[\text{I}^-]_0 = \text{cte} \Rightarrow v_0 = K [\text{Fe}^{3+}]_0^p$ avec $K = k [\text{I}^-]_0^q$

\Rightarrow on trace $\ln v_0 = f([\text{Fe}^{3+}]_0) \rightarrow \ln v_0 = \ln K + p \ln [\text{Fe}^{3+}]_0$

et p est le coefficient directeur de la droite.

\rightarrow une régression linéaire à la calculatrice conduit à : $\boxed{p=1}$
avec $r^2 > 0,999$.

2) On a maintenant $[\text{Fe}^{3+}]_0 = \text{cte} \Rightarrow v_0 = K' [\text{I}^-]_0^q$

$$\text{soit } \ln v_0 = \ln K' + q \ln [\text{I}^-]_0$$

et une régression linéaire à la calculatrice conduit à $\boxed{q=2}$

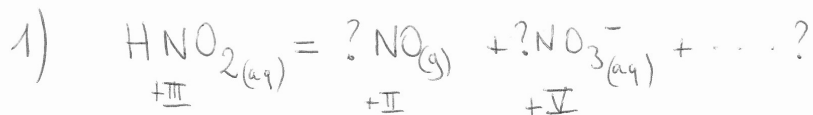
3) La loi de vitesse s'écrit donc : $v = k [\text{Fe}^{3+}] [\text{I}^-]^2$

(on notera que ce n'est pas un acte élémentaire car l'ordre total n'est pas égal à la molécularité - loi de Van't Hoff).

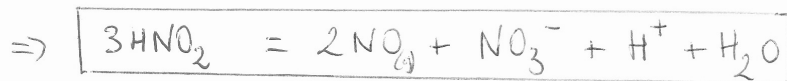
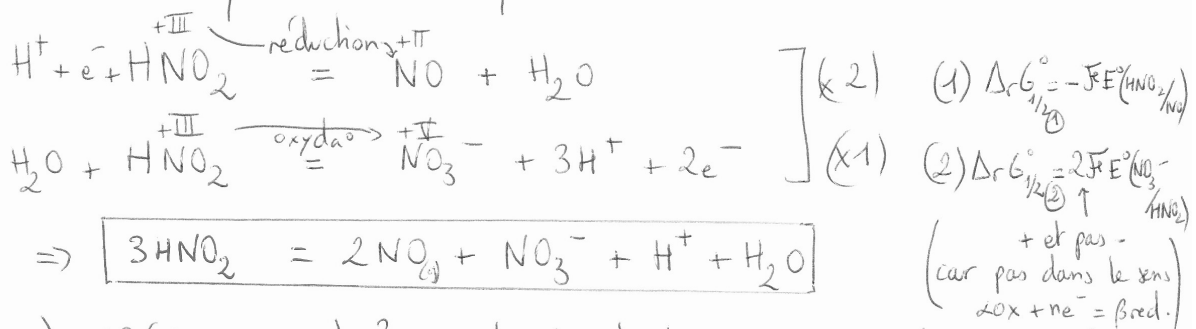
On peut trouver k avec l'une ou l'autre des régressions linéaires précédentes. Avec la seconde, on a :

$$\ln K' = \ln [\text{Fe}^{3+}]_0 + \ln k \Rightarrow \boxed{k = 8,85 \text{ mol}^{-2} \cdot \text{L}^2 \cdot \text{s}^{-1}}$$

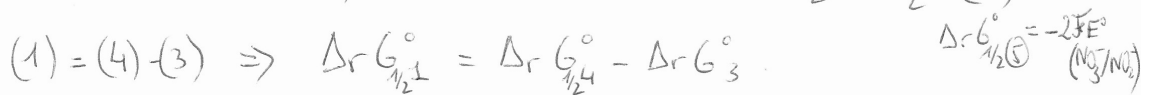
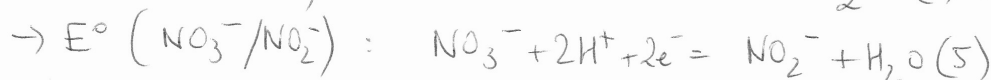
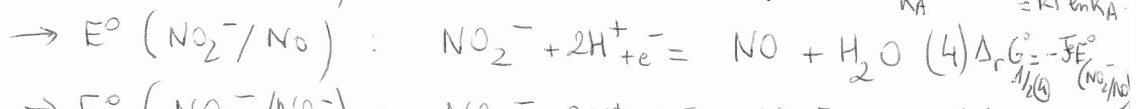
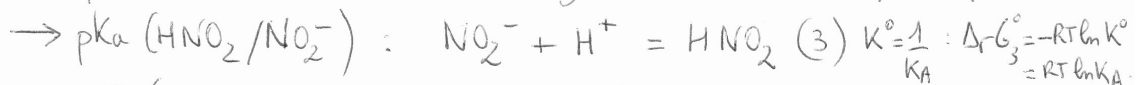
36 Dismutation de l'acide nitreux



On voit, d'après les nombres d'oxydation, qu'il s'agit d'une réaction de dismutation en oxydoréduction. Plutôt que de chercher à équilibrer directement, on peut revenir aux demi-équations électroniques:



2) $E^\circ(\text{HNO}_2/\text{NO})$? On cherche à trouver une combinaison linéaire d'équilibres dont on connaît les grandeurs thermodynamiques:

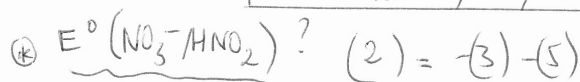


$$\Rightarrow -F E^\circ(\text{HNO}_2/\text{NO}) = -F E^\circ(\text{NO}_2^-/\text{NO}) - RT \ln K_A$$

$$\Rightarrow E^\circ(\text{HNO}_2/\text{NO}) = E^\circ(\text{NO}_2^-/\text{NO}) + \frac{RT \ln K_A}{F}$$

$$= 1,18 + 0,06 \times (-3,35)$$

$$\boxed{E^\circ(\text{HNO}_2/\text{NO}) = 0,98 \text{ V}}$$



$$\Rightarrow \Delta_r G_{1/2}^\circ = -\Delta_r G_3^\circ - \Delta_r G_{1/2}^\circ(5) \Rightarrow 2F E^\circ(\text{NO}_3^-/\text{HNO}_2) = -RT \ln K_A + 2F E^\circ(\text{NO}_3^-/\text{NO}_2^-)$$

$$\Rightarrow E^\circ(\text{NO}_3^-/\text{HNO}_2) = E^\circ(\text{NO}_3^-/\text{NO}_2^-) - \frac{RT \ln K_A}{2F} = 0,85 - \frac{0,06 \times (-3,35)}{2}$$

$$\boxed{E^\circ(\text{HNO}_2/\text{NO}) = 0,95 \text{ V}}$$

$$3) \Delta_r G^\circ = 2\Delta_{1/2} G^\circ_1 + \Delta_{1/2} G^\circ_2 = -2FE^\circ(\text{HNO}_2/\text{NO}) + 2FE^\circ(\text{NO}_3^-/\text{NO}_2^-)$$

$$= 96500 \times (-2 \times 0,98 + 1,90) = \underline{-5,79 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

4) Il y a équilibre lorsque le quotient de réaction est égal à la constante d'équilibre $K^\circ = e^{-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}} = 10,4$

$$\text{et } Q_r = \frac{[\text{H}^+][\text{NO}_3^-] \left(\frac{P_{\text{NO}}}{P^\circ}\right)^2}{[\text{HNO}_2]^3 \left(\frac{P^\circ}{P^\circ}\right)}$$

$$\text{soit } P_{\text{NO}} = P^\circ \sqrt{\frac{K^\circ [\text{HNO}_2]^3}{[\text{H}^+][\text{NO}_3^-]}}$$

$$= P^\circ \sqrt{\frac{10,4 \times (0,1)^3}{(10^{-2})^2}} = \boxed{10,2 \text{ bar}}$$

37 Dérivés oxygénés de l'azote

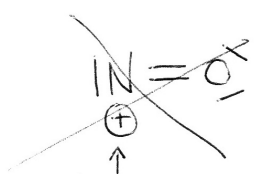


→ N : $5e^-$ de valence

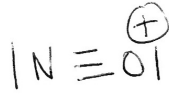
→ O : $6e^-$ de valence

soit 5 doublets à répartir

} NO^+ a $5+6-1 = 10e^-$ de valence
 ↑
 charge +



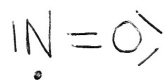
ou



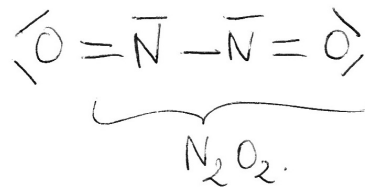
charge \oplus sur l'atome le moins électro-négatif mais N ne vérifie pas la règle de l'octet.

charge \oplus sur l'atome le plus électro-négatif, ce qui n'est pas le plus favorable, mais c'est la seule formule qui vérifie la règle de l'octet

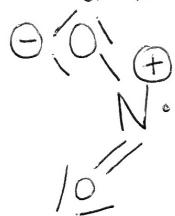
2) (NO) $11e^-$ de valence $\Rightarrow \exists$ un e^- célibataire : il s'agit donc d'un radical :



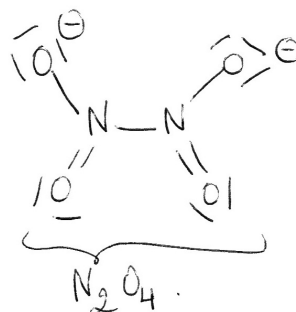
se dimérise facilement en mettant en commun les $2e^-$ célibataires



3) (NO_2) $17e^-$ de valence $\Rightarrow \exists$ un e^- célibataire : il s'agit encore d'un radical



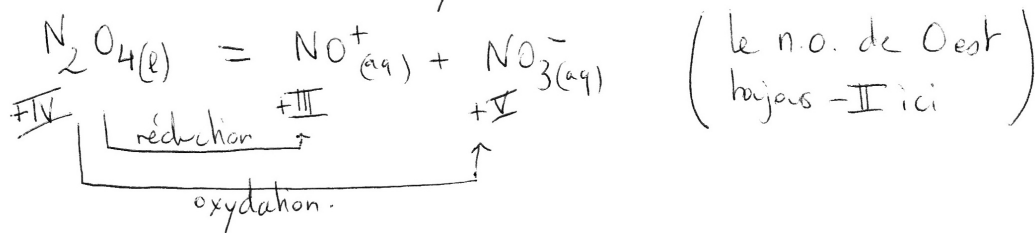
se dimérise



4) Pour justifier le caractère paramagnétique de NO et NO₂, il suffit de remarquer qu'il y aura au moins un électron célibataire lors du remplissage des niveaux d'énergie, de sorte que le spin est nécessairement non nul. \Rightarrow tous les radicaux sont donc paramagnétiques, c'est à dire qu'ils vont se comporter comme des dipôles magnétiques dans un champ magnétique extérieur.

[On notera ici qu'on ne peut pas connaître précisément les positions des niveaux d'énergie car il s'agit des orbitales de molécules, et non d'atomes (cf diagrammes énergétiques de N₂ et O₂ vus en physique statisque).

5) Il s'agit d'une réaction de dismutation car l'élément azote est à la fois oxydé et réduit :



38 Cristallographie

Corrigé complet mis en ligne plus tard.

Réponses : a = 407 pm, 2. R(Au) = 144 pm et C = 0,74, 3. R_O = 60 pm

39 Atomistique

Corrigé mis en ligne plus tard.

40 Étude d'un équilibre entre gaz

$$1. P_{\text{H}_2} = P_{\text{tot}} = \frac{nRT}{V} = 25,0 \text{ bar}.$$

2. Commençons par dresser le tableau d'avancement :

	2 HI (g)	\rightleftharpoons	I ₂ (g)	+	H ₂ (g)	Total gaz
état initial	n_0		0		0	n_0
état final	$n_0 - 2\xi_f = n_0(1 - \alpha)$		$\xi_f = n_0 \frac{\alpha}{2}$		$\xi_f = n_0 \frac{\alpha}{2}$	n_0

$$K_1^0 = \frac{P_{\text{H}_2} P_{\text{I}_2}}{P_{\text{HI}}^2}, \text{ et donc d'après le tableau d'avancement, à tout instant } P_{\text{H}_2} = P_{\text{I}_2} \text{ et } P_{\text{tot}} = \frac{nRT}{V} = \text{cste}$$

car la quantité de matière totale ne varie pas au cours de la réaction. Donc $K_1^0 = \frac{P_{\text{H}_2}^2}{(P_{\text{tot}} - 2P_{\text{H}_2})^2}$ et à l'équilibre, sachant que $P_{\text{H}_2} = 3,10 \text{ bar}$: $K_1^0 = 2,73 \cdot 10^{-2}$.

3. Le coefficient de dissociation α de l'iodure d'hydrogène HI à l'équilibre est défini par :

$$\alpha = \frac{\text{HI ayant réagi}}{\text{HI initialement introduit}} = \frac{2\xi_f}{n_0}$$

Donc d'après le tableau d'avancement : $K_1^0 = \frac{\alpha^2}{4(1-\alpha)^2}$, et en utilisant la calculatrice, on obtient :

$$\alpha_{eq} = 0.248$$

4. On calcule le quotient de réaction : $Q = \frac{P_{\text{H}_2}P_{\text{I}_2}}{P_{\text{HI}}^2} = \frac{1}{2^2} = 0,25 > K_1^0(T = 900 \text{ K})$, donc le système n'est pas à l'équilibre, et il va évoluer de manière à ce que Q se rapproche de K_1^0 (on rappelle que ce critère d'évolution repose initialement sur le second principe, puis sur $\Delta_r G d\xi \neq 0$), c'est à dire dans le sens indirect \leftarrow , dans le sens de formation de l'iodure d'hydrogène.
5. À $T_2 = 769 \text{ K}$, $K_2^0(T_2) = 2,18 \cdot 10^{-2} < K_1^0$, donc la réaction se fait moins bien à plus basse température. D'après la loi de Van't Hoff, on peut en déduire que la réaction est endothermique puisqu'une élévation de température à pression constante (**il ne faut pas oublier de préciser que la pression n'est pas facteur d'équilibre ici**, et donc bien que P_{tot} varie si T varie, cela ne pose pas de problème) conduit à un déplacement dans le sens de la **réaction endothermique** $\Delta_r H^0 > 0$. On peut trouver la valeur de $\Delta_r H^0$ grâce à la relation de Van't Hoff qu'on peut intégrer en se plaçant dans l'approximation d'Ellingham ($\Delta_r H^0$ indépendant de la température) :

$$\frac{d \ln(K^0)}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} \quad \Rightarrow \quad \ln(K_1^0) - \ln(K_2^0) = \frac{\Delta_r H^0}{R} \left(\frac{-1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right)$$

Donc $\Delta_r H^0 = R \frac{\ln(K_1^0) - \ln(K_2^0)}{\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}} = 9,9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. On trouve bien $\Delta_r H^0 > 0$, ce qui est cohérent pour une réaction endothermique.

6. On peut déduire la valeur de $\Delta_r S^0$ des résultats précédents sachant que : $\Delta_r S^0 = \frac{\Delta_r H^0 - \Delta_r G^0}{T}$. On peut faire le calcul à $T = T_1$ par exemple (dans l'approximation d'Ellingham, $\Delta_r S^0$ est de toute façon indépendant de la température) :

$$\Delta_r S^0 = \frac{\Delta_r H^0 + RT_1 \ln(K_1^0)}{T_1} = -19,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La réaction se faisant à nombre de moles de gaz constant, il était difficile d'anticiper le signe de cette grandeur.

41 Diagramme potentiel-pH du cadmium

Corrigé mis en ligne plus tard.

42 Électrolyse

Corrigé mis en ligne plus tard.