

DIFFÉRENTIELLE D'UNE APPLICATION. GRADIENT

Table des matières

I. Notion de différentielle en physique	1
1) Définition	1
2) Différentielle d'une application	2
3) Propriétés de la différentielle	3
4) Théorème de Schwarz	3
II. Champ scalaire et champ vectoriel	4
1) Systèmes de coordonnées	4
2) Champ vectoriel et champ scalaire. Définition	5
3) Gradient d'un champ scalaire	7
a) Définition	7
b) Expression en coordonnées cartésiennes	7
c) Expression en coordonnées cylindriques	7
d) Expression en coordonnées sphériques	8
4) Linéarité du gradient	8
5) Relation entre gradient et surfaces iso - f	8

I. Notion de différentielle en physique**1) Définition**

On va donner ici une définition de la différentielle d'une application telle qu'elle est utilisée couramment par les physiciens. Cette définition est un peu différente de celle qu'en donnent les mathématiciens.

Tout part d'un théorème très classique d'analyse qui est le théorème de Taylor-Young. On a juste besoin de sa formulation à l'ordre 1, d'abord pour une application d'une seule variable réelle, puis pour une application de plusieurs variables réelles. On en donne les énoncés suivants, commodes pour la suite :

Théorème : cas d'une seule variable réelle

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (non vide) et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en $x \in I$. Alors pour tout $x' \in I$ on a :

$$f(x') = f(x) + (x' - x) \frac{df}{dx}(x) + (x' - x) \varepsilon(x')$$

où $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue en x et telle que $\lim_{x' \rightarrow x} \varepsilon(x') = 0$

Dans le cas d'une application de deux variables réelles ce théorème s'écrit de la façon suivante :

Théorème : cas de deux variables réelles

Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ (non vides), $P = I \times J$ et une application $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \in P \mapsto f(x, y)$. Si f admet des dérivées partielles en (x, y) , c'est à dire si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ existent}$$

alors pour tout $(x', y') \in P$ on a :

$$f(x', y') = f(x, y) + (x' - x) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (y' - y) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2} \varepsilon(x', y')$$

où $\varepsilon : P \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue en (x, y) et telle que $\lim_{(x', y') \rightarrow (x, y)} \varepsilon(x', y') = 0$

2) Différentielle d'une application

En conséquence des remarques précédentes, si les variables x et y varient de manière infinitésimale, c'est à dire si :

$$x' = x + dx \text{ et } y' = y + dy$$

alors la variation infinitésimale de l'application f peut s'écrire de façon approchée :

$$df \hat{=} f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dy$$

Généralisation :

Si P est un pavé ouvert de $\mathbb{R}^n$ et si $f : P \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_n) \in P \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ est une application admettant des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors la variation infinitésimale de f provoquée par des variations infinitésimales des variables $x'_i = x_i + dx_i$ s'écrit :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Exemple :

3) Propriétés de la différentielle

Soient P un pavé de $\mathbb{R}^n$, f et g deux applications de P dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $(x_1, \dots, x_n) \in P$. Alors, en posant $x = (x_1, \dots, x_n)$ pour simplifier les notations :

$$\boxed{d(f + g) = df + dg \quad \text{et} \quad d(fg) = f(x) dg + g(x) df}$$

Théorème de Schwarz

Soit f une application dont les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$ existent et sont continues en $x = (x_1, \dots, x_n)$, pour tout i, j dans $\{1, \dots, n\}$. Alors, pour tout i, j dans $\{1, \dots, n\}$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)$$

4) Théorème de Schwarz

Soit P un pavé ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ une application. En posant $x = (x_1, \dots, x_n) \in P$ on peut être amené à calculer les dérivées partielles secondes de f en x (si elles existent). On pose par définition :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) (x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)$$

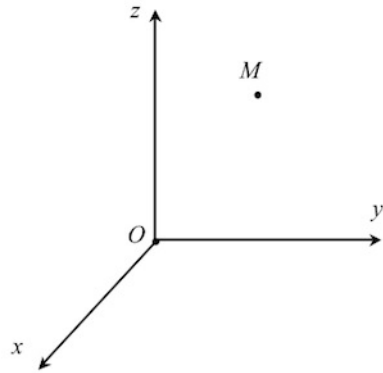
Avec ces notations on a le :

II. Champ scalaire et champ vectoriel

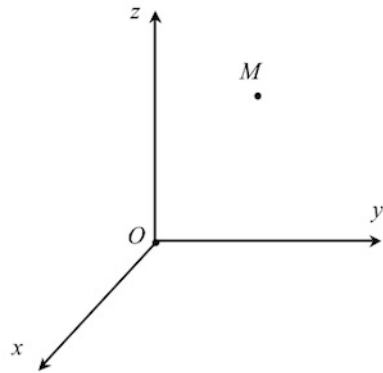
L'espace est rapporté à un repère cartésien $(Oxyz)$ de vecteurs unitaires respectifs $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$. La base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est supposée orthonormée et directe.

1) Systèmes de coordonnées

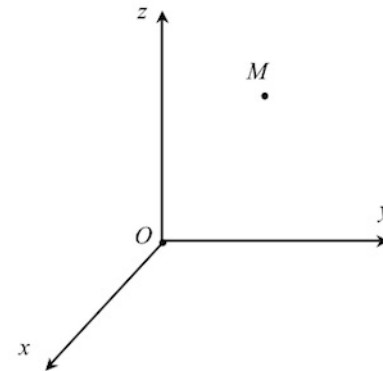
a) *Coordonnées cartésiennes*



b) *Coordonnées cylindriques*



c) *Coordonnées sphériques*



2) Champ vectoriel et champ scalaire. Définition

La notion de champ est très importante en physique. Elle intervient dans plusieurs domaines comme l'électromagnétisme, la gravitation, la mécanique des fluides, mais aussi la thermodynamique (diffusion thermique).

Définition - Champ scalaire

Un *champ scalaire* $f(M, t)$ représente une grandeur physique de nature scalaire, définie en chaque point M de l'espace (ou bien d'une région de l'espace) et à chaque instant t . Mathématiquement, il s'agit d'une application :

$$(M, t) \mapsto f(M, t) \in \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C})$$

De façon imagée, on peut dire qu'on définit un champ scalaire *en attachant* un nombre en tout point M et à chaque instant t .

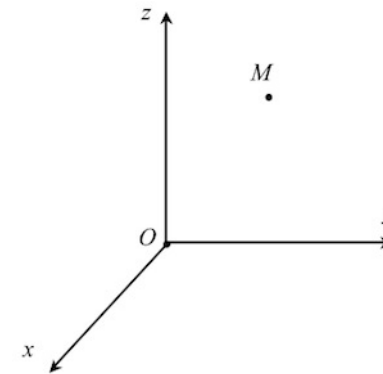
Exemples :

Définition - Champ vectoriel

Un *champ vectoriel* $\vec{a}(M, t)$ représente une grandeur physique de nature vectorielle, définie en chaque point M de l'espace (ou bien d'une région de l'espace) et à chaque instant t . Mathématiquement, il s'agit d'une application :

$$(M, t) \mapsto \vec{a}(M, t)$$

Ici de même, un manière imagée de voir un champ vectoriel consiste à *attacher* un vecteur en chaque point de l'espace et à chaque instant.



Exemples

Selon le système de coordonnées utilisé, on peut écrire un champ scalaire ou vectoriel en utilisant les coordonnées choisies pour repérer M et en projetant $\vec{a}(M, t)$ sur la *base locale* de ce système de coordonnées :

Coordonnées cartésiennes :

$$\begin{aligned} f(M, t) &= f(x, y, z, t) \\ \vec{a}(M, t) &= a_x(x, y, z, t) \vec{e}_x + a_y(x, y, z, t) \vec{e}_y + a_z(x, y, z, t) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} f(M, t) &= f(r, \theta, z, t) \\ \vec{a}(M, t) &= a_r(r, \theta, z, t) \vec{e}_r + a_\theta(r, \theta, z, t) \vec{e}_\theta + a_z(r, \theta, z, t) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Coordonnées sphériques :

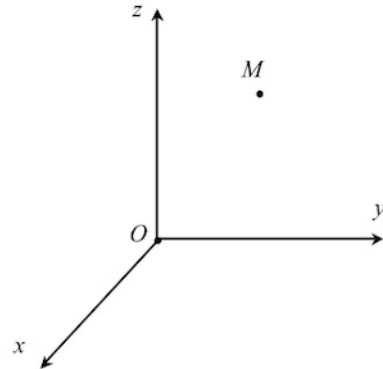
$$\begin{aligned} f(M, t) &= f(r, \theta, \varphi, t) \\ \vec{a}(M, t) &= a_r(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_r + a_\theta(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_\theta + a_\varphi(r, \theta, \varphi, t) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Remarque :

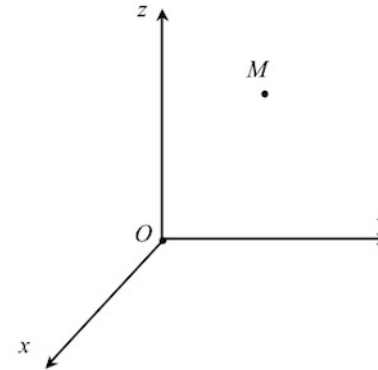
Les trois coordonnées d'espace et le temps sont *indépendantes*.

Cas particuliers

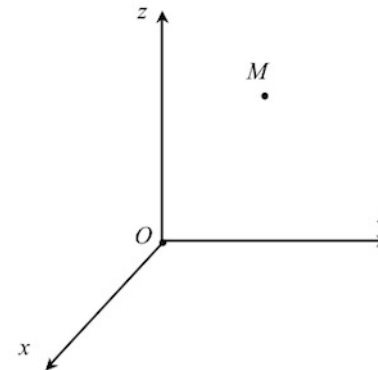
- *Champ à symétrie cylindrique*



- *Champ à symétrie sphérique*



- *Champ uniforme*



- *Champ stationnaire*

3) Gradient d'un champ scalaire

a) Définition

Soit un champ scalaire $f(M, t)$. En repérant le point M dans un des trois systèmes de coordonnées (cartésien, cylindrique ou sphérique) et en notant (q_1, q_2, q_3) les trois coordonnées de M , on pourra écrire :

$$f(M, t) = f(q_1, q_2, q_3, t)$$

Soit M' un point "infinitement" voisin de M , de coordonnées $(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3)$. La variation infinitésimale de f entre M et M' à temps constant (t fixé) s'écrit :

$$df \hat{=} f(M', t) - f(M, t) = f(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, q_3 + dq_3, t) - f(q_1, q_2, q_3, t)$$

c'est à dire :

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} dq_3$$

Définition - Gradient

Le *gradient* d'un champ scalaire f , noté $\overrightarrow{\text{grad}} f$, est un champ vectoriel défini de façon intrinsèque (c'est à dire de façon indépendante du système de coordonnées) par la relation

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \overrightarrow{d\ell}_M$$

où $\overrightarrow{d\ell}_M = \overrightarrow{MM'}$ est le vecteur déplacement élémentaire.

c) Expression en coordonnées cylindriques

b) Expression en coordonnées cartésiennes

d) Expression en coordonnées sphériques

De la même façon on montre que :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

4) Linéarité du gradient

Le gradient est un **opérateur linéaire**. Cela signifie que si f et g sont deux champs scalaires et si λ est un nombre réel ou complexe, alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(f + g) = \overrightarrow{\text{grad}} f + \overrightarrow{\text{grad}} g \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\lambda f) = \lambda \overrightarrow{\text{grad}} f$$

5) Relation entre gradient et surfaces iso -f**Définition - Surface iso-f ou équi-f**

Soit $f(M, t)$ un champ scalaire défini en tout point M de l'espace (ou bien d'une région de l'espace) et à chaque instant t . On appelle *surface iso-f* (ou encore surface *équi-f*) à l'instant t , toute surface (S_t) telle que :

$$\forall (M, M') \in (S_t)^2 \quad f(M, t) = f(M', t)$$

En pratique, on pourra avoir des surfaces :

- *isothermes* : même température en tout point ;
- *isobares* : même pression en tout point ;
- *équipotentielle* : même potentiel électrique $V(M, t)$ en tout point.